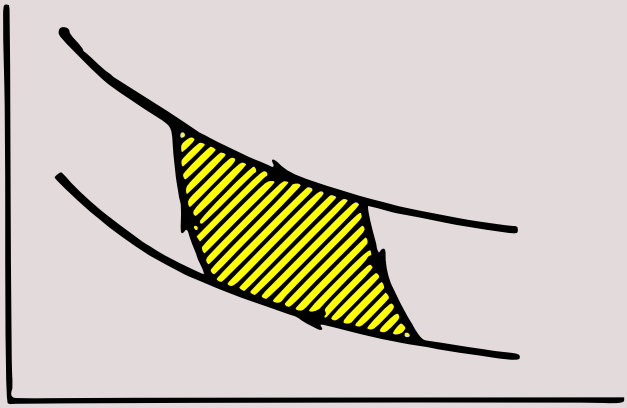
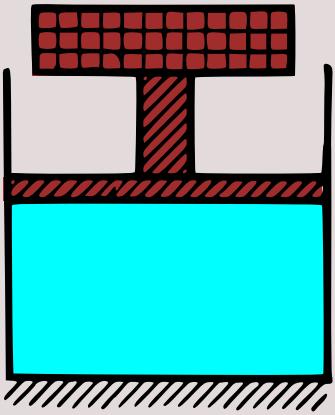
L. Sedov

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Tome I





Éditions Mir Moscou

Л. СЕДОВ

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ТОМ I

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

L. SÉDOV

MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Tome I

ÉDITIONS MIR • MOSCOU

Traduit du russe par V. PLATONOV
et revu par V. PARTON

На французском языке

© Издательство «Наука» 1973 с изменениями

© Traduction française · Editions Mir · 1975

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS À L'ÉDITION RUSSE 7
AVANT-PROPOS À L'ÉDITION FRANÇAISE 10

Chapitre premier. INTRODUCTION

§ 1. Objet et méthodes de la mécanique des milieux continus . . . 11
§ 2. Hypothèses de base 17

Chapitre II. CINÉMATIQUE DU MILIEU DÉFORMABLE

§ 1. Description lagrangienne du mouvement du milieu continu 24
§ 2. Description eulérienne du mouvement du milieu continu 33
§ 3. Champs scalaires et vectoriels, leurs caractéristiques 36
§ 4. Eléments du calcul tensoriel 48
§ 5. Théorie des déformations 65
§ 6. Tenseur des taux de déformation 100
§ 7. Distribution des vitesses dans un élément infinitésimal du milieu continu 102
§ 8. Théorèmes de Stokes et de Gauss-Ostrogradsky. Certaines propriétés des champs de vecteurs qui s'y rapportent 112

Chapitre III. NOTIONS ET ÉQUATIONS DYNAMIQUES DE LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

§ 1. Equation de continuité 127
§ 2. Equations du mouvement du milieu continu 135
§ 3. Equations des moments cinétiques 149
§ 4. Axes principaux et composantes principales du tenseur des contraintes symétrique 157

Chapitre IV. SYSTÈMES COMPLETS D'ÉQUATIONS MÉCANIQUES POUR LES MODÈLES LES PLUS SIMPLES DES MILIEUX CONTINUS. QUELQUES NOTIONS D'ANALYSE TENSORIELLE

§ 1. Fluides parfaits 161
§ 2. Corps linéaire élastique, fluide linéaire visqueux 166
§ 3. Exemples des équations rapportées aux axes curvilignes et notions complémentaires de l'analyse tensorielle 179

Chapitre V. NOTIONS ET ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THERMODYNAMIQUE

§ 1. Théorème des forces vives et travail des forces internes surfaciques 191
§ 2. Premier principe de la thermodynamique (loi de conservation de l'énergie) et équation de la chaleur reçue 196
§ 3. Equilibre thermodynamique, processus réversibles et irréversibles 212

§ 4. Milieux biparamétriques. Gaz parfait. Cycle de Carnot . . . 217
§ 5. Second principe de la thermodynamique et notion d'entropie 228
§ 6. Potentiels thermodynamiques des milieux biparamétriques 246
§ 7. Exemples de milieux parfaits et de milieux visqueux. Leurs propriétés thermodynamiques. Conductivité thermique . . . 251
§ 8. Premier et second principes de la thermodynamique appliqués aux volumes finis d'un milieu continu. Taux de production d'entropie dans certains processus irréversibles 265
§ 9. Introduction à la théorie des modèles des mélanges de fluides compte tenu des réactions chimiques et de la diffusion des composantes 269
§ 10. Modèles des mélanges dans le cas des transformations réversibles 282
§ 11. Modèles des mélanges dans le cas des transformations irréversibles 290

Chapitre VI. NOTIONS ET ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

§ 1. Notions fondamentales de l'électrodynamique. Champ électromagnétique. Equations de Maxwell dans le vide 301
§ 2. Equations de Maxwell dans l'espace de Minkowski 311
§ 3. Transformations de Lorentz et systèmes de référence inertiaux 317
§ 4. Interaction du champ électromagnétique avec les conducteurs 329
§ 5. Interaction du champ électromagnétique avec les corps compte tenu de la polarisation et de l'aimantation 338
§ 6. Hydrodynamique magnétique 361
§ 7. Lois régissant les lignes du champ magnétique et celles de rotation « figées » 364

Chapitre VII. SUR LA POSITION DES PROBLÈMES DANS LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

§ 1. Bases générales de la position de problèmes concrets 372
§ 2. Simplifications usuelles dans la position de certains problèmes conduisant à la réduction du nombre de variables indépendantes 381
§ 3. Linéarisation des équations et des problèmes de la mécanique des milieux continus 385
§ 4. Conditions sur les surfaces de fortes discontinuités 390
§ 5. Fortes discontinuités dans un champ électromagnétique . . 406
§ 6. Surfaces de discontinuité au sein des milieux parfaits compressibles 411
§ 7. Dimensions des grandeurs physiques. Théorème des produits des puissances 430
§ 8. Paramètres définissant une classe des phénomènes. Exemples typiques des applications de la théorie des dimensions . . . 441
§ 9. Similitude et simulation des phénomènes 462

Supplément I. FONCTIONS TENSORIELLES NON LINÉAIRES DE PLUSIEURS ARGUMENTS TENSORIELS par *V. Lokhine* et *L. Sédov* 480
Bibliographie au Supplément I 502

Supplément II. MODÈLES DES MILIEUX CONTINUS À DEGRÉS DE LIBERTÉ INTERNES par *L. Sédov* 504

Bibliographie au Supplément II 530
Index 532

AVANT-PROPOS À L'ÉDITION RUSSE

Pénétrer les mystères de la nature ou résoudre les problèmes techniques actuels n'est point pensable sans construire de nouveaux modèles décrivant de façon détaillée et profonde les corps, les phénomènes, les interactions micro- et macroscopiques mécaniques ou physiques en général.

En cherchant à répondre aux diverses questions générales que posent la structure de la matière, l'astrophysique, les propriétés essentielles des interactions dans de complexes organismes vivants ou des corps du monde minéral, on s'adresse constamment, comme l'affirment l'expérience et l'essence même de la science, à des conceptions, notions, lois, idées, méthodes de nature universelle.

A l'heure actuelle, on dispose d'une information scientifique considérable, des théories développées et des données expérimentales sur le comportement des champs physiques, sur le mouvement et l'équilibre des fluides, du plasma et des corps solides déformables.

Mettre en évidence les fondations communes et les liaisons intimes entre diverses théories et entre les phénomènes observés c'est aider à mieux comprendre l'état actuel de la science, à estimer à sa juste valeur les acquis scientifiques, à s'orienter de la meilleure façon dans la riche information recueillie. Tout cela est indispensable pour le développement fructueux de la science.

Dans l'exposé des bases de la mécanique et de la physique, il nous a paru utile de nous guider du principe suivant : il ne faut pas perdre de vue que les notions et les relations introduites n'ont la signification qui leur est attribuée que dans le cadre d'un certain ensemble de modèles que l'on construit dans le but de décrire les classes déterminées de phénomènes réels. Ceci est également vrai pour les notions fondamentales telles que l'espace, le temps, la force, la température, etc. On sait que la notion de force newtonienne n'a pas de sens dans certaines interactions relevant de la mécanique quantique et qu'elle s'avère absolument insuffisante lorsqu'il s'agit de décrire les interactions mécaniques ayant lieu dans les modèles actuels compliqués des milieux continus. De même les notions « universelles » d'entropie et de température n'ont pas de sens et s'avèrent inutiles pour les modèles de la mécanique rationnelle.

On voit donc qu'il est dépourvu de sens de parler des notions et des lois fondamentales en dehors de l'ensemble des classes de modèles, qu'elles soient très vastes ou étroites, introduites de façon explicite ou implicite par la théorie ou par l'expérience. En renonçant à ce principe, en trop généralisant et en s'écartant de l'essence du problème, on risque de se perdre dans des raisonnements sans

matière sur le sens de la force, de l'entropie, etc. Par contre, les modèles concrets correctement introduits sont d'une clarté voulue et l'imprécision éventuelle est facilement éliminée. Mais, naturellement, les modèles ne reflètent la réalité que d'une façon approchée et cela dans des domaines restreints; compléter, perfectionner, simplifier les modèles existants ou construire de nouveaux modèles est dans la nature du progrès continuel de la science.

Il nous semble que le profit que tirera l'étudiant du cours de mécanique consiste moins à en apprendre les applications connues que surtout à appliquer les connaissances acquises aux problèmes qui seront l'objet de ses recherches ultérieures.

Ces dernières années la nécessité est devenue évidente d'introduire au programme d'enseignement supérieur le cours de mécanique des milieux continus comme une base commune de développement de la thermodynamique, de la théorie de l'électromagnétisme, de l'hydrodynamique, de la dynamique des gaz, des théories d'élasticité, de plasticité, de glissement et de beaucoup d'autres chapitres de la physique et de la mécanique. Nous insistons surtout sur les liens organiques existant entre les domaines cités de la physique et de la mécanique qui semblent du premier abord tout différents les uns des autres.

Ce cours de mécanique des milieux continus est donc conçu dans l'esprit des indications précédentes. Il représente une version amplifiée du cours professé par l'auteur pendant plusieurs années à l'Université de Moscou et dont le texte existait primitivement en 1966-1968 sous forme polycopiée.

Le cours comprend deux tomes. Dans le premier tome sont exposées les méthodes mathématiques et les notions universelles, les bases de la thermodynamique et de l'électrodynamique. Nous espérons qu'un bref exposé des notions de base de ces disciplines sera utile non seulement aux lecteurs se spécialisant dans la mécanique. Dans le premier tome on établit également les fondamentales équations physiques et relations complémentaires aux fortes discontinuités, ainsi que les conditions initiales, les conditions aux limites et autres. En même temps on attire l'attention sur l'importance des méthodes approchées, ayant trait, par exemple, à la linéarisation des problèmes. C'est dire que le premier tome prépare les bases à la construction de modèles concrets des milieux continus et met en relief les éléments types des procédés de schématisation des problèmes posés.

On donne également en supplément au premier tome deux articles dont la matière est organiquement liée au sujet du cours. Le premier traite de la théorie générale de la symétrie dans l'espace tridimensionnel, du problème de classification des cristaux à symétrie ponctuelle et de la théorie de la structure des fonctions tensorielles non linéaires de plusieurs arguments tensoriels. Le second est un exposé

systématique de la méthode générale de construction des modèles complexes des milieux continus à degrés de liberté intérieurs, méthode basée sur l'équation variationnelle universelle.

Nous souhaitons que le lecteur prenne connaissance de ces articles, nécessaires à la lecture compétente d'ouvrages consacrés aux nouveaux théories et modèles de la mécanique des milieux continus.

Le second tome traite des modèles concrets et des théories de l'hydrodynamique, de la dynamique des gaz, de l'élasticité et de la plasticité. On y résout les problèmes types dans le cadre des modèles classiques et l'on y établit les régularités les plus importantes qu'on rencontre dans de vastes classes de mouvements et de processus.

Les paragraphes 6 à 10 du chapitre VIII sont consacrés à la théorie générale des machines hydrauliques et des machines à gaz; ces paragraphes représentent un exposé revisé d'un cours « à option » donné par l'auteur à l'Université de Moscou. Certains résultats de cette théorie, intéressants pour les applications, trouvent une justification plus stricte dans les paragraphes du chapitre VIII consacrés à la théorie générale du mouvement d'un obstacle solide dans un fluide.

La méthode déductive de l'exposé, le choix et la présentation de la matière concourent à construire un schéma logique du mouvement des milieux continus et poursuivent ce but principal qui est de donner au lecteur, à partir d'un minimum nécessaire d'information, en se limitant aux exemples les plus simples mais ayant une valeur pratique importante, une base indispensable pour bien comprendre les principes de la mécanique et les effets principaux connus accompagnant les mouvements des milieux continus. En d'autres termes, nous avons essayé d'éclaircir le problème au maximum en partant du strict minimum d'information.

Nous n'avons pas inclus dans ce cours certains chapitres importants de l'hydromécanique et de la mécanique des solides, pensant que le lecteur trouvera leur exposé détaillé dans les cours et les ouvrages spéciaux. Il s'agit notamment de la théorie de l'écoulement plan des fluides, de la théorie de l'écoulement non stationnaire des gaz, de la théorie des ondes à la surface d'un fluide pesant, de la théorie plus détaillée de similitude et de dimension en mécanique, de la théorie de la couche limite et de la turbulence, de la théorie développée de la plasticité et du fluage et de quelques autres. Le lecteur trouvera la liste des ouvrages complémentaires sur la mécanique des milieux continus à la fin du tome II.

Les notes prises à mon cours par V. Rozantséva et M. Eglit ont servi de point de départ à cet ouvrage; ces dernières m'ont été d'un grand secours et ont contribué à améliorer l'énoncé de manière notable par leurs remarques fécondes. J'exprime ma reconnaissance la plus vive à V. Rozantséva et M. Eglit pour leur travail considérable qui a permis la parution de l'ouvrage proposé.

Je tiens à remercier V. Karlikov qui m'a beaucoup secondé dans l'exposé consacré à l'hydrodynamique et D. Ivlev, pour la rédaction du chapitre traitant des problèmes plans de la théorie de l'élasticité.

J'adresse mes plus vifs remerciements à G. Bam-Zélikovitch, G. Stépanov et A. Tcherkez qui m'ont apporté une aide précieuse lors de la préparation et de la rédaction des chapitres concernant la théorie générale des machines à gaz et des machines hydrauliques. J'exprime également toute ma gratitude à H. Svechnikova qui a consacré tant d'efforts à cet ouvrage et à nombre de mes collaborateurs et de mes étudiants qui m'ont aidé à mettre au point la première version polycopiée de l'ouvrage.

L. Sédov

Moscou, décembre 1968

AVANT-PROPOS À L'ÉDITION FRANÇAISE

Cet ouvrage est la traduction de la deuxième édition russe, améliorée et complétée, du *Cours de mécanique des milieux continus* parue à Moscou en 1973.

J'ai un grand plaisir d'y voir le moyen le meilleur pour les étudiants et les chercheurs français de faire connaissance avec les idées et méthodes de ce Cours de mécanique des milieux continus. Il m'est permis d'espérer que ce livre stimulera l'intérêt aux domaines d'avenir de la mécanique des milieux continus dont les méthodes et l'essence se trouvent liées à la science et à la technique de nos jours.

Je signale à l'intention du lecteur qu'il existe une traduction anglaise de la première édition russe de cet ouvrage, en quatre volumes, parue à la maison Wolters-Noordhoft Publishing en 1971-1972.

L. Sédov

Moscou, juillet 1975

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

§ 1. Objet et méthodes de la mécanique des milieux continus

Objet de la mécanique des milieux continus. La mécanique des milieux continus est un vaste domaine de la mécanique consacré aux mouvements des corps déformables: gaz, liquides ou solides.

La mécanique rationnelle étudie les mouvements d'un point matériel, des systèmes discontinus des points matériels et du corps rigide. En utilisant les données et les méthodes de la mécanique rationnelle, la mécanique des milieux continus envisage des corps matériels qui remplissent l'espace d'une façon ininterrompue, continue, et dont les points changent de distance lors du mouvement.

Outre les corps matériels usuels, tels que l'eau, l'air ou le fer, la mécanique des milieux continus s'intéresse également aux milieux particuliers que sont les champs: champ électromagnétique, champ de rayonnement, champ gravitationnel (d'attraction), etc.

Les mouvements des fluides et des solides déformables que l'on observe en analysant les phénomènes naturels et en résolvant de nombreux problèmes techniques sont très variés.

Nous sommes en mesure de diriger, d'une façon plus ou moins sûre, un grand nombre de mouvements des corps déformables s'appuyant sur la simple expérience personnelle quotidienne. Les observations journalières créent un sentiment de réalité et un « bon sens » qui permettent souvent de prévoir et de réaliser les effets mécaniques nécessaires.

Pourtant, les cas complexes exigent que s'accumulent et se concentrent les faits expérimentaux schématisés et que s'élaborent des méthodes spéciales d'études pratiques et théoriques. De telles recherches ont abouti à la création et au développement de la mécanique des milieux continus en tant que science.

Les cas ne manquent pas où chacun trouve immédiatement la solution de tel ou tel problème pratique important du mouvement des corps déformables. Tout le monde sait comment s'y prendre pour verser de l'eau d'un récipient dans un autre, pour conserver l'air chaud à l'intérieur des habitations, pour se protéger de la pluie et du vent, etc. Il existe cependant nombre d'autres problèmes qui ne peuvent être résolus qu'à la base de connaissances spéciales. Quelle est, par exemple, la vitesse du gaz comprimé qui sort par l'orifice d'une bouteille, comment se déplace un cyclone

dans les couches atmosphériques; comment diminuer la résistance que l'air oppose à un avion et l'eau à un navire; comment construire une tour métallique de T.V. de 500 m ou un pont dont l'arche entre les deux supports les plus proches est de 1 km; quelles sont les conséquences à prévoir si l'on diminue ou augmente le diamètre d'une hélice d'avion; que peut-on dire, enfin, sur la distribution des pressions et les mouvements d'air qui suivent l'explosion d'une bombe, etc.

Signalons d'emblée que la discussion sur de nombreux problèmes n'est point close et les méthodes théoriques et expérimentales connues n'y donnent toujours pas de réponses satisfaisantes. D'actuelles recherches scientifiques se consacrent à la résolution de nouveaux problèmes complexes de valeur scientifique et pratique considérable et à d'autres problèmes dont l'étude a été largement préparée par l'évolution antérieure de la science.

Citons quelques-uns de nouveaux problèmes à résoudre: diminution de la résistance de l'eau au déplacement des corps à de grandes vitesses, de l'ordre de 100 m/s; création et maintien du plasma à une température de quelques millions de degrés; explication des particularités du comportement des matériaux aux charges et températures élevées (compte tenu des phénomènes de fluage, de plasticité, etc.); détermination des forces qui agissent sur les bâtiments lors d'une explosion; construction d'un avion hypersonique long courrier; explication de la circulation globale de l'air dans l'atmosphère; prévisions météorologiques; étude de processus mécaniques se déroulant dans les plantes et les organismes vivants; problèmes de l'évolution des astres, des phénomènes qui se produisent sur le Soleil et bien d'autres.

Certes, le progrès scientifique et technique dans les domaines en question est intimement lié à la recherche scientifique, mais on n'en doit pas moins sous-estimer le rôle que jouent le talent, une intuition et un « flair » de l'ingénieur acquis au cours d'une longue expérience en la matière. Il faut se garder de croire que les constructions mécaniques telles qu'avions, navires, etc., peuvent être calculées et prévues dans tous les détails. Bien des constructions se font à l'heure actuelle selon le même principe que celui dont se servaient les Vikings il y a plus de 1000 ans pour bâtir leurs navires. A cette époque, la mécanique comme science n'existait pas même à l'état embryonnaire, ce qui n'empêchait pas pour autant ces bateaux d'être fort bien adaptés à la navigation.

Il ne faut pas oublier, cela va sans dire, que la technique moderne est devenue si complexe qu'elle ne peut plus se passer de la science, de toute l'expérience antérieure systématisée. De même que l'industrie moderne ne peut se concevoir sans la mécanisation indispensable, le progrès technique actuel est impensable sans l'appui d'un fondement scientifique.

Problèmes de la mécanique des milieux continus. Citons quelques-uns des problèmes essentiels de la mécanique des milieux continus qui ont déjà fait l'objet d'études.

— Le problème de l'action du fluide sur les corps qui s'y meuvent. Les forces exercées par le fluide sur le corps dépendant essentiellement du mouvement du fluide, l'étude du mouvement des corps dans un fluide est donc directement liée à celle du mouvement du fluide.

Les problèmes d'ordre technique, tels que le mouvement des avions, des hélicoptères, des dirigeables, des obus, des fusées, des navires, des sous-marins, ainsi que ceux touchant à la construction de divers instruments de locomotion — hélices d'avion et de bateau, etc. — ont particulièrement stimulé le développement du problème considéré.

— L'écoulement du fluide dans des tubes et, de manière générale, dans divers mécanismes. Dans ces problèmes les lois régissant l'interaction du fluide avec les surfaces limitrophes du flux et, notamment, les résistances offertes par les parois solides mobiles ou immobiles, les phénomènes de la distribution irrégulière des vitesses, etc. revêtent une signification particulière. Ces problèmes entrent en ligne de compte toutes les fois qu'il s'agit du calcul des oléoducs, des gaz-lines, des pompes, des turbines et d'autres machines hydrauliques.

— Le filtrage: la pénétration du liquide dans le sol et dans d'autres substances poreuses. On se heurte, par exemple, au problème du mouvement de l'eau dans le sol lors de l'édification des fondations de constructions diverses (barrages, appuis de ponts, centrales hydroélectriques), de tunnels souterrains, etc. Le phénomène de filtrage a une grande importance dans l'industrie pétrolière.

— L'hydrostatique: l'équilibre des liquides et des corps flottants ou immergés; les figures de l'équilibre des corps liquides en rotation sous l'action des forces d'attraction newtoniennes.

— Les mouvements ondulatoires: propagation des ondes dans les solides; ondes sur la surface de la mer; ondes produites par le mouvement d'un navire; propagation des ondes dans les rivières et les canaux; afflux; séismes; oscillations acoustiques; problème général du bruit dans divers milieux, etc. Le milieu environnant (fluides, solides, champs) est constamment en état de vibration et est sujet aux diverses perturbations se propageant dans le temps et dans l'espace. Il est bien clair que ces phénomènes sont d'une grande importance tant dans la vie courante que dans la résolution de nombreux problèmes techniques.

— Les mouvements non stationnaires des gaz sujets aux transformations chimiques lors d'une explosion, d'une détonation, d'une combustion, par exemple dans un courant d'air, dans les cylindres

des moteurs à explosion ou dans les chambres des moteurs à réaction, etc.

— La protection des corps solides contre la combustion et la forte fusion lorsqu'ils entrent, à grande vitesse, dans les couches denses de l'atmosphère.

— La théorie des mouvements turbulents des fluides qui sont en réalité des mouvements irréguliers, très complexes, de caractère aléatoire, fluctuations se produisant près de certains processus réguliers moyens, et dont on doit tenir compte dans les problèmes pratiques étudiés. Le nombre écrasant des mouvements des fluides dans les astres et dans les nuages cosmiques, dans l'atmosphère terrestre, dans les rivières et canaux, dans les tubes et dans d'autres constructions techniques et machines, se rattachent aux mouvements turbulents; d'où l'importance particulière de la théorie et des expériences consacrées à la turbulence. De nos jours même, les recherches sur la turbulence ne sont pas encore en mesure d'en fournir une explication satisfaisante de nombreuses propriétés et lois.

— La description du mouvement des fluides très fortement comprimés lorsque les propriétés physiques de différents milieux sont rendues plus complexes par ces états, surtout à de hautes températures. Il existe des applications importantes et fort intéressantes où l'on a affaire à des corps soumis à de très grandes pressions (de l'ordre de quelques milliers, voire, de millions d'atmosphères), telles que l'industrie des diamants artificiels, l'estampage par explosion, etc.

D'autre part les phénomènes affectant les gaz très raréfiés présentent un intérêt particulier. L'analyse de différents processus liés au mouvement des milieux dans le vide très poussé que ce soit dans un laboratoire, dans l'espace cosmique, dans l'atmosphère des astres et des planètes nécessite l'intervention des méthodes de la mécanique des milieux continus.

— Les problèmes d'hydrodynamique magnétique et les recherches consacrées aux milieux ionisés en mouvement (plasma), surtout l'aspect de leur interaction avec le champ électromagnétique, acquièrent de nos jours une importance pratique et gnoséologique de tout premier ordre. L'étude de ce genre de phénomènes est nécessaire, par exemple, pour la construction des générateurs magnétohydrodynamiques de courant électrique fondés sur la transformation directe de l'énergie du mouvement du plasma en énergie du courant électrique. Notons également que la résolution du problème concernant l'utilisation de l'énergie thermonucléaire est étroitement liée aux problèmes touchant le comportement du plasma à haute température dans les champs magnétiques puissants.

— Les prévisions météorologiques, science fondée essentiellement sur l'analyse des mouvements des masses d'air dans l'atmosphère terrestre qui constitue un des chapitres importants de la

mécanique des milieux continus, intimement lié à beaucoup d'autres domaines de la physique.

— Les problèmes fondamentaux de l'astrophysique et de la cosmogonie étudiés dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Citons, entre autres, les questions ayant trait à la structure intérieure des astres et de leurs photosphères, au mouvement des nébuleuses et des nuages cosmiques, aux éclatements et explosions des étoiles variables, aux pulsations des céphéides et, enfin, le problème fondamental de l'évolution des galaxies, de la constitution et de l'évolution de l'univers.

— L'étude des mouvements et de l'équilibre des corps « solides » déformables constituant un vaste domaine de la mécanique des milieux continus. La théorie de l'élasticité est à la base de la construction d'installations et de mécanismes sans nombre. Un intérêt toujours croissant est actuellement porté à certains domaines de la mécanique, tels que l'étude des propriétés élastiques complexes des corps et l'analyse des effets non élastiques se manifestant dans les solides, notamment, la plasticité due aux déformations rémanentes, le fluage caractérisé par l'accroissement graduel des déformations pour des charges extérieures constantes et lié à la résistance à la chaleur des pièces des machines (le phénomène de fluage s'observe dans les mécanismes après un fonctionnement de longue durée ou même de courte durée lorsque les températures étaient élevées).

On attache une grande importance à l'étude des différentes formes de la fatigue des matériaux, à l'évaluation des phénomènes d'hérédité dans les processus du mouvement et l'équilibre des corps.

L'apparition et l'utilisation de nouveaux matériaux polymères ont entraîné l'analyse de leur structure physique interne qui se modifie éventuellement dans bien des applications intéressantes d'un point de vue pratique. Enfin, des problèmes de tout premier plan concernant la résistance et la dégradation des constructions fabriquées à partir de différents matériaux n'ont pas encore trouvé une solution suffisamment claire.

On peut mentionner en outre les problèmes mécaniques liés aux mouvements de mélanges variés, des sables, de la neige, des sols, des alliages, des solutions liquides, des suspensions et émulsions, des liquides où sont additionnés des polymères, etc. Sont intéressants les problèmes de la cavitation qui réside en la formation et la disparition dans un liquide en mouvement de bulles et de grandes cavités remplies de gaz et de vapeurs de liquide.

On doit souligner tout particulièrement qu'actuellement la technologie industrielle des usines chimiques s'appuie sur des recherches mécaniques consacrées aux mouvements des milieux continus correspondants.

Mentionnons d'importantes nouvelles théories traitant des problèmes de l'interaction des rayons lasers puissants avec des subs-

tances diverses (problèmes de l'optique non linéaire) ainsi que de l'interaction des corps mobiles avec des champs électromagnétiques. A l'échelle macroscopique ce genre de phénomènes a un lien direct avec les effets décrits dans le cadre de la mécanique quantique. Des problèmes analogues surgissent au cours de la description des propriétés macroscopiques des corps qui se déplacent à des températures très basses ou bien lorsque l'aimantation et la polarisation électrique entrent en ligne de compte.

Au cours des dernières années un grand nombre de recherches ont été consacrées à la mécanique biologique. Sont construits notamment des modèles mécaniques permettant de décrire la circulation sanguine dans les organismes vivants, la contraction musculaire, la propagation d'excitations par des nerfs, les mécanismes de déplacement, dans divers milieux, des virus, des bactéries et d'autres micro-organismes, les déplacements des poissons dans l'eau, etc.

Méthodes de la mécanique des milieux continus. L'ouvrage proposé est un cours théorique de mécanique des milieux continus. Il y est question des méthodes mathématiques d'étude du mouvement des corps déformables. Elles se caractérisent par les traits suivants. On introduit une série de notions qui caractérisent et définissent univoquement le mouvement du milieu continu. Ces notions s'expriment soit à l'aide des nombres, soit à l'aide d'autres notions mathématiques. Le champ des vitesses, le champ des pressions, la température, la circulation, etc. en fournissent des exemples. On se familiarisera par la suite avec ces notions ainsi qu'avec bien d'autres caractéristiques du mouvement du milieu continu.

On élabore dans la mécanique des milieux continus des méthodes permettant de ramener les problèmes mécaniques à des problèmes mathématiques, c'est-à-dire de déterminer certains nombres ou fonctions numériques à l'aide de différentes opérations mathématiques.

En outre, l'un des buts essentiels de la mécanique des milieux continus est l'établissement des propriétés et des lois générales du mouvement des corps déformables. On prendra connaissance par la suite des lois régissant les forces avec lesquelles le liquide agit sur les corps qui s'y meuvent; on établira la relation entre la pression et la vitesse valable pour d'importantes et assez vastes classes de mouvements; on mettra en évidence la dépendance entre les charges extérieures et les déformations qui s'ensuivent, etc.

Il faut ajouter que la résolution mathématique des problèmes concrets de la mécanique des milieux continus se rapporte en général à la mécanique des milieux continus. L'explication réside dans le fait que le plus souvent les connaissances mathématiques actuelles s'avèrent insuffisantes pour résoudre, même dans les cas les plus simples, les problèmes de la mécanique des milieux continus déjà

traduits dans la forme mathématique. C'est pourquoi on se voit dans l'obligation de modifier l'énoncé des problèmes et de n'obtenir que des solutions approchées fondées sur diverses conjectures et hypothèses mécaniques.

La mécanique des milieux continus a stimulé le développement de nombreuses branches des mathématiques. Mentionnons à titre d'exemple certains chapitres de la théorie des fonctions de variable complexe, les problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles, les équations intégrales, etc., qui doivent leur développement à la mécanique des milieux continus.

Le fait que certains problèmes de la mécanique des milieux continus trouvent leurs analogues dans d'autres chapitres de la mécanique et de la physique n'est pas sans être utile.

Il se trouve également que divers problèmes de la mécanique des milieux continus et les méthodes mathématiques de leur analyse sont très étroitement liés entre eux. Par exemple, les recherches sur l'écoulement des liquides dans les tubes ont contribué à l'explication de certains effets observés sur l'aile d'un avion se déplaçant dans l'air. Les méthodes qui permettent de résoudre le problème de l'écoulement autour de l'aile d'avion ont beaucoup en commun avec celles qu'on emploie pour la résolution des problèmes du filtrage des fluides dans le sol. De nombreuses conséquences de la théorie de l'écoulement des gaz dans les tubes s'appliquent dans divers problèmes du mouvement ondulatoire de l'eau dans les canaux, etc.

Dans les premiers temps nous serons bien loin de l'étude des problèmes indiqués ci-dessus. Il conviendra d'abord de nous initier aux notions de caractère général, tant mécaniques que mathématiques. Au début, le lecteur n'aura pas l'impression d'aborder l'étude de sujets en rapport direct avec les phénomènes réels de la nature et de la technique. On justifiera cet état de fait en se référant à l'histoire du développement de la mécanique des milieux continus. Les premiers succès dus à l'application pratique des méthodes mathématiques de la mécanique des milieux continus développées en théorie de l'écoulement des fluides se sont fait attendre plus de cent ans.

On trouvera dans le présent ouvrage les bases de la mécanique des milieux continus nécessaires et suffisantes pour une étude compétente de différents problèmes concrets.

§ 2. Hypothèses de base

a) Constitution des corps réels et l'hypothèse de la continuité

L'étude du mouvement des corps nécessite la connaissance de leurs propriétés réelles. On sait que tous les corps représentent un ensemble de molécules et d'atomes de différentes espèces. Les corps

peuvent être ionisés, c'est-à-dire composés d'électrons, d'ions (atomes et molécules ayant quelques électrons en plus ou en moins) et de particules neutres. Voici, à titre d'information, quelques caractéristiques des particules élémentaires que nous donne la physique.

Caractéristiques des particules élémentaires. Le rayon du noyau d'un atome est de l'ordre de 10^{-13} cm, celui de la molécule d'hydrogène est de $1{,}36 \cdot 10^{-8}$ cm, ce qui signifie que le rayon du noyau est très inférieur à celui d'une molécule et pourtant c'est précisément le noyau qui concentre la plus grande partie de la masse de la substance : la masse de l'électron est de $9{,}1066 \cdot 10^{-28}$ g, celle du proton est de $1{,}6724 \cdot 10^{-24}$ g.

Dans les conditions normales (à la température 0 °C et sous la pression atmosphérique au niveau de la mer), un centimètre cube d'air contient $N = 2{,}687 \cdot 10^{19}$ molécules. Un cube d'arête égale à un millième de centimètre, ce qui est souvent en dehors de la précision courante des mesures de longueurs en technique, comprend $27 \cdot 10^{9}$ particules. A l'altitude de 60 km, sensiblement supérieure au « plafond » des avions modernes, le nombre de particules dans l'atmosphère est $N = 8 \cdot 10^{15}$ 1/cm³. Pour la matière interstellaire, ensemble des matériaux extrêmement diffus, on a $N = 1$ 1/cm³ $= 10^{15}$ 1/km³. La distance d'un kilomètre est petite par rapport aux distances cosmiques, c'est pourquoi même ce gaz interstellaire peut être considéré comme un milieu à très grand nombre de particules dans de petits volumes.

Sur la Lune qui est dépourvue d'atmosphère $N = 10^{10}$ 1/cm³, soit 2,7 milliards de fois moins que celui au niveau de la surface terrestre. Ce vide extrêmement poussé ne peut pas être expérimentalement obtenu aux laboratoires sur la Terre. Le plus souvent, dans un tel vide les substances se soudent en entrant en contact.

Pour le fer (Fe), $N = 8{,}622 \cdot 10^{22}$ 1/cm³, sa densité est de

$$\rho_{Fe} = 7{,}8 \text{ g/cm}^3,$$

tandis que la densité de la substance nucléaire de Fe est de

$$\rho_{nucl.\,Fe} = 1{,}16 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3 \text{ et } \rho_{Fe}/\rho_{nucl.\,Fe} = 7 \cdot 10^{-14}.$$

On voit donc que les volumes occupés par les corps sont beaucoup plus grands que ceux où la substance elle-même est concentrée.

Ainsi donc tous les corps sont en réalité « composés du vide » ; en même temps, dans le volume relativement petit occupé par le corps dans l'espace il y a toujours un grand nombre de particules.

Les atomes et les molécules sont en mouvement chaotique permanent.

Dans les conditions atmosphériques normales, la vitesse moyenne v_{moy} des molécules d'hydrogène est de 1692 m/s (supérieure à la

vitesse d'un avion de transport moderne). Les molécules se heurtent incessamment les unes contre les autres; le parcours libre d'une molécule d'hydrogène, dans les conditions atmosphériques normales, est $l = 11{,}2 \cdot 10^{-6}$ cm. Pour l'oxygène $v_{moy} = 425$ m/s, $l = 6{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm, c'est-à-dire le nombre de chocs subis par une molécule en une seconde s'élève à $6{,}45 \cdot 10^{9}$.

Sur les interactions des particules. On sait que les particules exercent entre elles une interaction. Dans le cas des gaz raréfiés ces interactions se réduisent uniquement aux chocs. Pour les liquides et les solides les particules étant plus rapprochées, les forces d'interaction sont essentielles.

La cohésion et l'élasticité sont assurées par des forces de nature électrique qui se ramènent, en gros, aux forces de Coulomb et à l'interaction entre les aimants élémentaires. Les forces nucléaires et les forces d'interaction faible ne sont mises en évidence que par les réactions nucléaires où les particules agissent les unes sur les autres à petites distances. Pour rapprocher ainsi les particules il faut mettre en jeu une énergie gigantesque puisée dans le mouvement chaotique de particules portées à des températures de quelques millions de degrés.

Processus physico-chimiques essentiels dans la mécanique des milieux continus. L'électrodynamique joue un rôle très important car, en sachant les forces électriques d'interaction des particules, on peut concevoir la théorie des corps solides déformables.

En pensant aux notions abstraites pour la construction des modèles des corps réels, l'on doit nécessairement tenir compte de différentes particularités de structure de ces derniers. Les corps peuvent être gazeux, liquides, solides, cristallins, ou à des phases différentes. L'augmentation de la température conduit à des états où la substance peut être considérée comme gazeuse, liquide ou solide en même temps.

Outre la structure, on attache une grande importance à la nature de la substance, ainsi qu'aux propriétés des constituants des mélanges, des solutions et des alliages.

Dans bien des cas surgissent des problèmes mécaniques concernant le mouvement des corps où l'on doit tenir compte de la transformation des parties constituantes et de leurs concentrations relatives. Tels sont, par exemple, les problèmes du mouvement des gaz accompagné de réactions nucléaires, chimiques et, entre autres, de combustion, de dissociation, de recombinaison, d'ionisation, etc.

En étudiant le mouvement des corps matériels, il faut aussi tenir compte des processus de changement de phase tels que condensation, vaporisation, fusion, solidification, polymérisation, recristallisation, etc.

L'étude du mouvement du milieu continu nécessite l'introduction des contraintes intérieures. Dans les corps de structure moléculaire discontinue, celles-ci sont des moyennes statistiques conditionnées tant par les forces d'interaction des molécules situées de part et d'autre d'une section que par le transfert à travers cette section d'une quantité de mouvement macroscopique par suite de l'agitation thermique des molécules.

La viscosité des gaz s'explique par l'agitation thermique des molécules tendant à niveler les mouvements macroscopiques des particules voisines du gaz. Ainsi donc, le caractère des contraintes intérieures dans les milieux matériels est déterminé par la structure moléculaire, les forces d'interaction entre les molécules et les atomes, qui entrent en jeu lorsque les distances qui les séparent sont très petites, et par l'agitation thermique due à la température.

La conduction de chaleur s'explique de manière analogue. Deux particules voisines quelconques du milieu qui sont en contact échangent de l'énergie soit par choc, soit par échange direct des molécules rapides et lentes. L'énergie statistique moyenne de l'agitation thermique caractérisée par la température tend à se niveler.

De même, le mécanisme de la diffusion des constituants hétérogènes dans les mélanges trouve une explication dans le processus cinétique moléculaire d'interpénétration des molécules due à l'agitation thermique.

Plus complexe est le phénomène du rayonnement qui a lieu soit à la suite des effets quantiques dus aux changements des niveaux énergétiques dans une molécule, un atome ou un noyau, soit à la suite de mouvements accélérés de particules chargées. Le rayonnement, interprété comme une émission de photons, le plus souvent est étroitement lié à l'agitation thermique des molécules et des atomes et dépend sensiblement de la température déterminant les excitations éventuelles de l'énergie lors du choc entre les particules. Dans les recherches sur le mouvement des milieux continus à hautes températures on doit donc prendre en considération les effets de transfert de l'énergie et de variation de température résultant des processus parallèles d'absorption et de diffusion de l'énergie rayonnante.

La polarisation électrique et l'aimantation liées à la disposition régulière et ordonnée des particules élémentaires dans les corps peuvent également s'avérer essentielles dans le mouvement des corps matériels.

Les mécanismes d'interaction interne dans les solides, dans les matériaux de structure moléculaire complexe, dans les corps de très grande densité à des températures relativement basses, etc. peuvent être très complexes et, en général, ne se prêtent à aucune description dans le cadre de la mécanique newtonienne. L'introduction des notions et des lois de la mécanique quantique est indis-

pensable dans la plupart des cas pour la compréhension de telles interactions.

L'un des objectifs fondamentaux de la physique est l'établissement des lois macroscopiques des phénomènes cités plus haut à la base de l'analyse profonde des mécanismes physiques microscopiques et des propriétés des particules élémentaires.

Approches statistique et phénoménologique. Notons que l'on ne connaît pas toujours la structure complexe des molécules et les forces électriques de cohésion. Il semble bien que la représentation du corps comme un ensemble des particules élémentaires serait à la base du développement de la mécanique. Or, il est impossible de suivre le mouvement de chaque particule élémentaire, étant donné qu'elles sont très nombreuses et que les forces d'interaction sont inconnues. Soulignons qu'en général il importe peu de connaître le mouvement de chaque particule élémentaire.

En pratique on n'a besoin que de certaines caractéristiques moyennes sommaires, ou globales.

L'une des méthodes générales pour l'étude du comportement des milieux continus est la méthode statistique développée en physique.

Elle applique le calcul des probabilités à l'étude des phénomènes et introduit les moyennes qu'on prend sur un grand ensemble de particules. Les méthodes statistiques font nécessairement appel aux hypothèses supplémentaires sur les propriétés des particules, leurs interactions, ainsi qu'à des simplifications de ces propriétés et interactions. Signalons que dans bien des cas il n'existe même pas de base pour l'élaboration de ces méthodes. Même une fois établies, elles ne s'avèrent que fort peu efficaces pour la résolution des problèmes à cause de l'extrême complexité des équations correspondantes.

Une autre méthode générale de l'étude du mouvement des corps matériels consiste à établir la théorie macroscopique phénoménologique s'appuyant sur les lois et les hypothèses générales fournies par l'expérience. Les théories macroscopiques s'avèrent efficaces pour la résolution d'importants problèmes pratiques, et les conséquences qui en découlent sont en accord avec l'expérience.

C'est la théorie macroscopique phénoménologique du milieu matériel que nous allons développer dans ce qui suit.

Hypothèse de continuité. Introduisons la notion de milieu continu. Tous les corps se composent de particules isolées, mais nombreuses, et cela pour n'importe quel volume considéré ; c'est pourquoi un corps se présente approximativement comme un milieu remplissant l'espace d'une manière continue. On considérera l'eau, l'air, le fer, etc. comme des corps remplissant entièrement un volume d'espace.

La notion de continuum embrasse non seulement les corps matériels ordinaires, mais on peut y rattacher également divers champs, par exemple, le champ électromagnétique.

Cette abstraction est indispensable si l'on veut décrire le mouvement des corps déformables à l'aide de l'appareil des fonctions continues, des calculs intégral et différentiel.

b) L'espace et le temps

On entend par espace un ensemble de points donnés par des nombres dits coordonnées.

Espace métrique. Considérons des variétés métriques continues, c'est-à-dire les espaces, où sont définies les distances entre les points. L'espace euclidien usuel à trois dimensions dont les points sont donnés par le système de coordonnées cartésiennes x, y, z unique pour tout l'espace nous fournit l'exemple d'un espace métrique. La distance de deux points x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 est définie par la formule

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\,. \tag{2.1}$$

Espace euclidien. Peut-on introduire, dans n'importe quel espace, un système unique de coordonnées cartésiennes pour tout l'espace? Pour simplifier, envisageons des espaces bidimensionnels. Il est évident que l'on peut introduire pour tout le plan un système unique de deux coordonnées cartésiennes. Ce n'est pas possible sur la surface d'une sphère dont la courbure n'est pas nulle, c'est-à-dire on ne peut pas introduire sur la sphère un système de deux coordonnées de manière à définir la distance de deux points quelconques, calculée comme une longueur d'arc de grands cercles, d'après la formule (2.1). Sur la sphère le système de coordonnées cartésiennes n'a de sens que dans le voisinage immédiat de chaque point. De même, dans le cas d'un espace métrique tridimensionnel il n'est pas souvent possible d'introduire un système de coordonnées cartésiennes unique pour tout l'espace.

Dans ce qui suit on n'envisagera que les espaces où il est possible d'établir un système de coordonnées cartésiennes unique pour tous les points. Ce genre d'espace est dit euclidien; la mécanique qui s'y développe s'appelle mécanique newtonienne. L'expérience montre que l'espace physique réel est sensiblement euclidien si les régions considérées de l'espace ne sont pas très grandes.

Temps absolu. La notion de temps est liée à l'expérience, elle est donc indispensable en mécanique. Tout phénomène mécanique est décrit du point de vue d'un observateur quelconque. Généralement parlant, le temps dépend du système de référence de l'observateur.

Nous admettrons que le temps coule identiquement pour tous les observateurs — dans le train, dans l'avion, dans la classe... Donc, nous nous servirons du temps absolu, abstraction, qui n'est valable pour la description adéquate des faits réels que si on néglige les effets de la relativité.

Ainsi, on étudiera le mouvement du milieu continu — continuum — dans l'espace euclidien et dans le temps absolu. Plus haut on a introduit trois hypothèses fondamentales qui permettront l'élaboration de la théorie du mouvement des corps déformables. Les conséquences qui en découlent sont souvent en accord avec l'expérience, sans l'être toujours. Si besoin est, le modèle adopté de l'espace et du temps peut être précisé et généralisé. Toutefois, toutes les généralisations ultérieures se font à la base et compte tenu de la mécanique newtonienne appuyée par les hypothèses décrites ci-dessus. Leur signification deviendra claire grâce à la théorie développée dans ce qui suit.

CHAPITRE II

CINÉMATIQUE DU MILIEU DÉFORMABLE

§ 1. Description lagrangienne du mouvement du milieu continu

Systèmes de coordonnées. Un mouvement est toujours étudié dans un système de référence, ou système de coordonnées. Le système de coordonnées permet d'établir une correspondance entre les nombres et les points de l'espace. Ainsi, dans l'espace tridimensionnel, tout point est défini par trois nombres x^1, x^2, x^3 appelés coordonnées du point. Les lignes le long desquelles deux coordonnées quelconques demeurent constantes sont dites courbes coordonnées (fig. 1). Par exemple, la ligne sur laquelle $x^2 = \text{const}$, $x^3 = \text{const}$ définit la courbe coordonnée x^1, les différents points y sont fixés par des valeurs de x^1; des x^1 croissants définissent le sens de la ligne. Par chaque point de l'espace, on peut mener trois courbes coordonnées. Les tangentes aux courbes coordonnées en chaque point ne sont pas coplanaires et forment, en général, un trièdre non orthogonal.

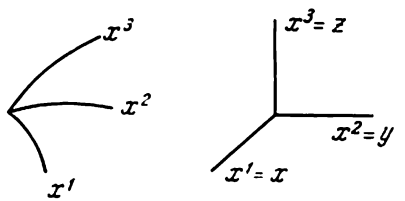


Fig. 1. Systèmes de coordonnées curvilignes et cartésiennes

Quand les courbes coordonnées x^1, x^2, x^3 sont droites, elles constituent un système de coordonnées rectilignes, dans le cas contraire, on aura un système de coordonnées curvilignes. On verra dans ce qui suit la nécessité d'utiliser des coordonnées curvilignes en mécanique des milieux continus.

Notations pour les coordonnées et le temps. Nous convenons de désigner par x^1, x^2, x^3 les coordonnées dans tout système, y compris, parfois, le système cartésien, en laissant la notation x, y, z pour les coordonnées relatives au système de coordonnées cartésiennes orthogonales; le temps est noté par t.

Mouvement d'un point. Un point est en mouvement par rapport au système de coordonnées x^1, x^2, x^3 si ses coordonnées varient en fonction du temps:

$$x^i = f^i(t) \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{1.1}$$

Le point mobile s'identifie, aux différents instants, avec des points d'espace différents. Le mouvement d'un point est défini si l'on connaît les fonctions (1.1), dites lois du mouvement du point.

Mouvement d'un continuum. Le milieu continu représente un ensemble ininterrompu de points. Par définition, connaître le mouvement d'un milieu continu c'est connaître le mouvement de tous ses points (l'étude du mouvement d'un volume de milieu continu tout entier n'est pas suffisante).

Sur l'individualisation des points d'un continuum. Le problème consiste à savoir individualiser les points de continuum qui sont géométriquement parfaitement identiques. On verra par la suite que les règles d'individualisation utilisées dans la théorie sont déterminées, en général, par le fait que le mouvement de chaque point du milieu continu est soumis à certaines lois physiques. Les points individuels d'un milieu continu sont donnés, par exemple, par les valeurs de leurs coordonnées initiales. Nous désignerons les coordonnées des points à l'instant initial t_0 de deux manières : par a, b, c ou par ξ^1, ξ^2, ξ^3, et les coordonnées des points à l'instant arbitraire par x^1, x^2, x^3.

Equation du mouvement du continuum. Pour tout point du continuum fixé par les coordonnées a, b, c on peut avoir une équation du mouvement traduite par les fonctions de quatre variables qui sont les coordonnées initiales a, b, c et le temps t et non pas d'une seule variable, comme c'est le cas d'un point isolé. On a alors

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= x^1(a, b, c, t), \\ x^2 &= x^2(a, b, c, t), \\ x^3 &= x^3(a, b, c, t) \end{aligned}\right\} \quad \text{ou } x^i = x^i(a, b, c, t). \tag{1.2}$$

Si a, b, c sont fixes et t varie, (1.2) donnent la loi du mouvement d'un point fixe du continuum. Si a, b, c sont variables et t fixe, les fonctions (1.2) fournissent la distribution des points du continuum dans l'espace à l'instant donné. Si a, b, c et t sont tous variables, les formules (1.2) décrivant le mouvement du milieu continu sont, par définition, l'équation du mouvement du continuum.

Variables de Lagrange. Les coordonnées a, b, c ou ξ^1, ξ^2, ξ^3 (ou, parfois, leurs fonctions) qui individualisent les points du continuum et le temps t portent le nom de variables de Lagrange.

Le problème principal de la mécanique des milieux continus consiste à rechercher les fonctions (1.2).

La notion de loi du mouvement sera présente d'une façon explicite ou implicite, dans ce qui suit.

Notons pour plus de généralité que le milieu continu, tout en représentant un ensemble de points, n'est pas nécessairement un corps matériel. Ainsi, par exemple, on peut convenir de figurer les prix des marchandises par des points sur le plan et étudier le mouvement des prix dans le domaine économique par les méthodes de la cinématique des milieux continus.

Il est également possible, et on le fait souvent, d'analyser les lois des déplacements dans l'espace de différentes configurations du mouvement des éléments matériels en faisant l'abstraction d'éléments matériels eux-mêmes. Par exemple, quand on observe, par temps de vent, la surface ondulée du champ de seigle, on peut parler des déplacements des dépressions et hauteurs maxima de la nappe de seigle sans se soucier des épis eux-mêmes.

Ainsi donc, en cinématique, on traite un milieu continu comme un être géométrique abstrait, sans y voir seulement un corps matériel. Le mouvement d'un milieu continu est soumis à diverses lois. Celles-ci peuvent être des lois physiques connues dans l'ensemble comme c'est le cas pour le mouvement d'un corps matériel ; pour le mouvement des prix dans le domaine économique, il s'agit de lois mathématiques dont la plupart sont encore à établir.

Continuité des fonctions de l'équation du mouvement. Si nous voulons utiliser pour l'étude de la mécanique des milieux déformables le calcul différentiel et intégral, il faudra admettre que les fonctions qui composent l'équation du mouvement du continuum soient continues et continûment dérivables par rapport à toutes leurs variables. Toute générale qu'elle soit, cette hypothèse limite considérablement le domaine des phénomènes étudiés.

L'eau, par exemple, peut être aspergée ; les éléments d'eau initialement infiniment proches les uns des autres ne le seront plus dans les instants ultérieurs. Ce genre de phénomènes ne se prête pas à la description si l'on suppose la continuité des fonctions composant l'équation du mouvement. Dans bien des problèmes, on sera contraint d'affaiblir l'hypothèse de la continuité du mouvement et de considérer les fonctions ou leurs dérivées comme discontinues sur certaines surfaces. L'exemple en est fourni par les ondes de choc que l'on analysera plus loin. Soulignons toutefois que l'étude des mouvements discontinus s'appuie sur la théorie des mouvements continus.

Biunivocité des fonctions de l'équation du mouvement. Les observations physiques nous suggèrent l'hypothèse selon laquelle les fonctions $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ à chaque instant fixé $t = \text{const}$ sont biunivoques.

Comme on le sait, dans ce cas le jacobien

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix}$$

ne se réduit pas à zéro en tous les points d'un certain volume fini. Si $\Delta \neq 0$, les formules (1.2) sont résolvables relativement à ξ^1, ξ^2, ξ^3 et la solution se présentera sous forme de fonctions univoques continues

$$\xi^i = \xi^i (x^1, x^2, x^3, t). \tag{1.3}$$

Propriétés générales des applications biunivoques continues. L'ensemble de valeurs x^1, x^2, x^3 forme dans l'espace un domaine D occupé

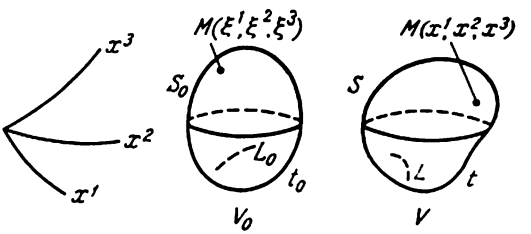


Fig. 2. Mouvement d'un continuum. Pour $t = t_0$, $x^1 = \xi^1$, $x^2 = \xi^2$, $x^3 = \xi^3$

par le corps à l'instant donné t. Si les coordonnées ξ^1, ξ^2, ξ^3 sont envisagées comme valeurs des coordonnées x^1, x^2, x^3 à un autre instant t_0, le domaine D_0 des variations de ξ^1, ξ^2, ξ^3 correspond au volume du corps à l'instant t_0.

Dans ce cas les équations du mouvement (1.2) et (1.3) peuvent être considérées comme des transformations biunivoques et bicontinues des domaines D et D_0.

Comme on le sait, les propriétés topologiques générales de telles transformations consistent en ce qu'un volume V_0 se transforme en un volume V, une surface S_0 en une surface S, une courbe L_0 en une courbe L, et en outre, une surface fermée se transforme en une surface fermée, une courbe fermée en une courbe fermée (fig. 2). Par exemple, un volume ne peut se transformer en un point, car la correspondance biunivoque serait rompue; de même, une courbe fermée ne peut jamais se transformer en une courbe non fermée, car ceci contredirait la condition de la continuité.

Système de référence. Le mouvement d'un continuum, comme tout mouvement, est observé par rapport à un système de coordonnées x^1, x^2, x^3, système de référence de l'observateur. Le système de coordonnées est choisi d'une façon arbitraire, par convention, compte tenu des conditions de l'étude. En pratique, il est souvent lié à la Terre mais peut tout aussi bien être rattaché au Soleil, aux astres, à l'avion, à la voiture, etc. Il peut être mobile ou immobile selon les conditions qui président à son introduction.

En mécanique newtonienne, une importance physique particulière s'attache à l'analyse du mouvement par rapport aux systèmes de coordonnées d'inertie, ces derniers étant en translation relative à une vitesse constante dans le temps. L'existence de tels systèmes (étroitement liée aux postulats sur le caractère euclidien de l'espace physique et sur le temps propre absolu et identique pour différents points) est le postulat fondamental de la mécanique de Newton *).

En physique classique, toutes les lois physiques sont formulées dans les systèmes de référence d'inertie et ne dépendent pas du choix de ces derniers. C'est le principe bien connu de la relativité de Galilée-Newton.

La pratique quotidienne adopte en tant que système d'inertie le système de coordonnées cartésiennes où les astres éloignés sont supposés immobiles.

Repère concomitant. L'étude du mouvement du milieu continu exige en outre l'introduction d'un système de coordonnées concomitant. Un point individualisé de l'espace de coordonnées x^1, x^2, x^3 est également repéré, dans le domaine D, par les coordonnées lagrangiennes ξ^1, ξ^2, ξ^3. Celles-ci forment, dans le même espace, un système de coordonnées curvilignes mobile déformable que nous appellerons repère concomitant. Ainsi, lorsqu'on choisit à l'instant initial t_0 des courbes coordonnées ξ^1, ξ^2, ξ^3 constituées par des points du milieu continu, alors à l'instant suivant elles se transforment

*) La théorie de la relativité restreinte stipule également l'existence des systèmes de coordonnées d'inertie liés entre eux par la transformation de Lorentz, mais l'espace physique est considéré comme un espace quadridimensionnel pseudo-euclidien de Minkowski (la quatrième coordonnée est proportionnelle au temps propre). Cette théorie, elle aussi, prévoit l'utilisation des systèmes de coordonnées mobiles pour les observateurs analysant le mouvement relatif.

En théorie de la relativité générale, tous les systèmes de coordonnées en mouvement relatif sont équivalents ; l'espace physique n'est pas donné mais se définit en supposant toutefois qu'il est quadridimensionnel et riemannien, les lois de la théorie de la relativité restreinte étant valables pour les petits volumes.

On notera ce fait curieux que la solution des problèmes correspondants révèle une certaine ressemblance de l'espace riemannien multiplement connexe dans le sens topologique, vide (dépourvu de masses et de charges) avec l'espace euclidien où sont présents les champs gravitationnel et électrique dus aux masses et charges qui s'y trouvent. (Voir John A. Wheeler, *Neutrinos, gravitation and geometry*, Bologna, 1960.)

avec les points du continuum également en courbes coordonnées du repère concomitant. Même si elles étaient choisies droites à l'instant initial, les coordonnées deviennent généralement curvilignes à l'instant suivant (fig. 3).

Donc, un système de coordonnées lié aux éléments du milieu continu se modifie avec le temps. Le choix d'un tel repère est possible à tout instant donné mais il nous échappe aux instants suivants, étant « figé » dans le milieu et se déformant avec lui. Plus

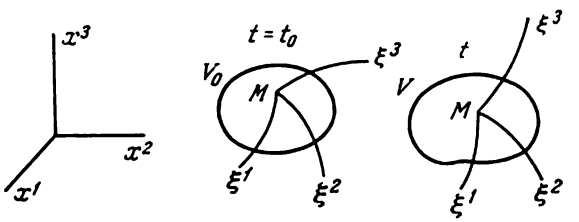


Fig. 3. x^1, x^2, x^3 — système de référence, ξ^1, ξ^2, ξ^3 — système concomitant lagrangien

haut nous avons défini un tel repère figé dans le milieu comme un système de coordonnées concomitant. Tous les points du milieu continu sont toujours au repos par rapport au repère concomitant mobile, leurs coordonnées ξ^1, ξ^2, ξ^3 dans ce système ne variant pas, mais le système lui-même se meut, se détend, se comprime, se tord... La notion de système de coordonnées concomitant est une généralisation pour le cas d'un milieu continu de la notion de repère propre du solide adoptée en mécanique rationnelle *).

Lorsqu'on parle du mouvement du milieu continu, il faut toujours individualiser les points et par suite utiliser les coordonnées lagrangiennes. C'est pourquoi dans l'analyse d'un milieu continu mobile on prévoit un repère x^1, x^2, x^3, par rapport auquel on envisage le mouvement, et un repère concomitant.

L'emploi de ξ^1, ξ^2, ξ^3 et de t en tant que variables indépendantes constitue le point de vue de Lagrange sur l'étude du mouvement des milieux continus qui s'appuie essentiellement sur la description de l'histoire du mouvement de chaque point de la matière pris à

*) Il va sans dire qu'il est toujours possible d'introduire mentalement, pour tout repère et en particulier pour le repère de l'observateur, un milieu idéalisé par rapport auquel le système envisagé soit concomitant.

On peut introduire pour un même milieu des repères concomitants différents. C'est pourquoi on distingue parfois deux sens dans la notion de systèmes de coordonnées de l'observateur : le repère de l'observateur considéré comme un certain système invariant et le système conçu variable pour un observateur dans un repère donné.

part. Une telle description s'avère souvent trop détaillée et compliquée dans la pratique mais elle doit être constamment implicite lorsqu'on établit les lois physiques. Outre la notion de loi du mouvement, on se sert dans la mécanique des milieux continus de certaines autres notions indispensables, notamment de celles de vitesse et d'accélération des points du milieu continu.

Vitesse. Soit un point d'un milieu continu situé en un point M de l'espace à l'instant t et en M' à l'instant $t + \Delta t$ et soit $\overline{MM'} = \Delta \boldsymbol{r}$.

Ici $\Delta \boldsymbol{r}$ est un petit déplacement orienté du point individualisé du milieu continu au bout du temps Δt. Si l'on peut introduire dans l'espace un rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ (ce qui est toujours possible dans l'espace euclidien), $\Delta \boldsymbol{r}$ représente alors l'accroissement du rayon vecteur du point considéré du milieu continu.

En passant à la limite dans le rapport des quantités infinitésimales $\Delta \boldsymbol{r}$ et Δt lorsque $\Delta t \to 0$, nous définissons la vitesse d'un point du milieu continu pour un espace non-euclidien, vitesse qui, dans le cas de l'espace euclidien, est représentée par la dérivée partielle par rapport au temps $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ du rayon vecteur du point du milieu continu dans le repère donné. Le vecteur vitesse est désigné par un $\boldsymbol{v}$ gras.

Généralement, le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ est une fonction du temps t et de trois paramètres ξ^1, ξ^2, ξ^3 qui individualisent le point du milieu continu. Comme la vitesse est calculée pour un point individualisé du milieu, c'est-à-dire pour ξ^1, ξ^2, ξ^3 fixes, il est légitime de prendre la dérivée partielle de $\boldsymbol{r}$ par rapport à t:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}.$$

La vitesse est calculée par rapport à un système de référence. Elle est évidemment nulle dans le repère concomitant par rapport auquel le milieu est immobile.

Vecteurs de base. Par chaque point de l'espace on peut tracer trois courbes coordonnées. Soit un point M (x^1, x^2, x^3), envisageons des segments orientés élémentaires $\Delta \boldsymbol{r}_1$, $\Delta \boldsymbol{r}_2$, $\Delta \boldsymbol{r}_3$ issus de ce point M et le reliant aux points M_1 $(x^1 + \Delta x^1, x^2, x^3)$, M_2 $(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3)$, M_3 $(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3)$ respectivement. En tout point de l'espace on peut passer aux limites dans les rapports $\Delta \boldsymbol{r}_i / \Delta x^i$ ou $\Delta \boldsymbol{r}_i / \Delta \xi^i$ (pour $\Delta x^i \to 0$ ou $\Delta \xi^i \to 0$), qui se trouvent être des vecteurs dirigés suivant les tangentes en M aux coordonnées correspondantes. Dans l'espace euclidien, ces limites sont les dérivées partielles de $\boldsymbol{r}$ par rapport aux coordonnées respectives. Si l'on

prend pour Δx^i ou $\Delta \xi^i$ des longueurs d'arc suivant les courbes coordonnées correspondantes, $\partial \boldsymbol{r}/\partial x^i$, $\partial \boldsymbol{r}/\partial \xi^i$ ont pour valeur l'unité.

Introduisons les notations

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{\partial}_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i} = \hat{\boldsymbol{\partial}}_i, \tag{1.4}$$

où $\boldsymbol{\partial}_i$ et $\hat{\boldsymbol{\partial}}_i$ sont des vecteurs de base pour le système de référence et le système concomitant respectivement. Pour le système de coordonnées cartésiennes x^1, x^2, x^3 on propose les notations $\boldsymbol{\partial}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\partial}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{\partial}_3 = \boldsymbol{k}$, où $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ sont des vecteurs unitaires le long des axes des x, y, z respectivement. Si le système de coordonnées x^1, x^2, x^3 ou ξ^1, ξ^2, ξ^3 est curviligne, $\boldsymbol{\partial}_i$ et $\hat{\boldsymbol{\partial}}_i$ changent d'un point à l'autre et forment en chaque point de l'espace un trièdre en général non orthogonal.

Composantes de la vitesse. Le déplacement infiniment petit d'un point du milieu continu $\overline{MM'} = \Delta \boldsymbol{r}$ peut être décomposé suivant les vecteurs de base $\boldsymbol{\partial}_1$, $\boldsymbol{\partial}_2$, $\boldsymbol{\partial}_3$ pris au point M:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta x^1 \boldsymbol{\partial}_1 + \Delta x^2 \boldsymbol{\partial}_2 + \Delta x^3 \boldsymbol{\partial}_3, \tag{1.5'}$$

où Δx^1, Δx^2, Δx^3 sont les composantes du déplacement $\Delta \boldsymbol{r}$. Dans la forme contractée, (1.5′) s'écrit

$$\Delta \boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3} \Delta x^i \boldsymbol{\partial}_i = \Delta x^i \boldsymbol{\partial}_i, \tag{1.5}$$

où l'on omet dans la dernière expression le signe de la somme $\sum\limits_{i=1}^{3}$. On procédera de la sorte par la suite, en sous-entendant la sommation chaque fois que les expressions du type (1.5) possèdent deux indices identiques dont l'un est en haut et l'autre est en bas.

En divisant (1.5) par un élément de temps Δt qui correspond au déplacement d'un point du milieu du point M au point M' de l'espace de l'observateur et en passant à la limite lorsque $\Delta t \to 0$, on obtient par définition la vitesse d'un point du milieu continu:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \frac{\partial x^i}{\partial t} \boldsymbol{\partial}_i = v^i \boldsymbol{\partial}_i = v^1 \boldsymbol{\partial}_1 + v^2 \boldsymbol{\partial}_2 + v^3 \boldsymbol{\partial}_3, \tag{1.6}$$

d'où

$$v^1 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)_{\xi^i}, \quad v^2 = \left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)_{\xi^i}, \quad v^3 = \left(\frac{\partial x^3}{\partial t}\right)_{\xi^i}.$$

Les indices inférieurs ξ^i montrent que les dérivées sont prises pour des paramètres constants ξ^1, ξ^2, ξ^3 individualisant le point du milieu. Les quantités v^1, v^2, v^3 sont dites composantes du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ dans la base $\boldsymbol{\partial}_1$, $\boldsymbol{\partial}_2$, $\boldsymbol{\partial}_3$. En général, la vitesse et ses composantes

dépendent de ξ^1, ξ^2, ξ^3, t :

$$v^1 = v^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$
$$v^2 = v^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$
$$v^3 = v^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t).$$

Adoptons pour l'emploi ultérieur les notations suivantes : les lettres v aux indices 1, 2, 3 désigneront les composantes du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ dans tout système de coordonnées (y compris parfois le repère cartésien), les lettres u, v, w, les composantes du vecteur vitesse uniquement dans le système de coordonnées cartésiennes, u étant la projection de $\boldsymbol{v}$ sur l'axe des x, v sur l'axe des y et w sur l'axe des z. Dans le repère cartésien, la position du point du milieu est caractérisée par le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

On obtient pour la vitesse $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi^i}\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\xi^i}\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{\xi^i}\boldsymbol{k},$$

donc

$$u = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\xi^i}, \quad v = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{\xi^i}, \quad w = \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{\xi^i}.$$

Sur la notion de vecteur. Nous avons déjà introduit certains vecteurs, à savoir, la vitesse $\boldsymbol{v}$, le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$, le déplacement $d\boldsymbol{r}$. Qu'entend-on par vecteur? Ce n'est pas un scalaire mais, tout comme un scalaire, il est invariant et, par suite, ne dépend pas du choix du système de coordonnées. On définit souvent le vecteur comme trois nombres, dits composantes du vecteur, qui se transforment de manière déterminée au passage d'un système de coordonnées à un autre. Cette définition est pourtant insuffisante, car un vecteur est toujours rattaché à une base, alors, en définissant un vecteur par ses composantes, il faut indiquer leur base.

Dans le système de coordonnées cartésiennes, les composantes d'un vecteur sont associées à $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$; dans un système de coordonnées curvilignes quelconque, elles se rattachent aux vecteurs de base $\boldsymbol{\partial}_i$ qui varient d'un point de l'espace à l'autre. Ainsi donc, les composantes d'un vecteur dans un système de coordonnées curvilignes, à la différence de celles du système cartésien, dépendent essentiellement du point où ce vecteur est envisagé.

S'il s'agit, par exemple, d'un vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ pour chaque point de l'espace, il convient de considérer les nombres v^1, v^2, v^3 et les vecteurs de base $\boldsymbol{\partial}_1$, $\boldsymbol{\partial}_2$, $\boldsymbol{\partial}_3$, en définissant le vecteur $\boldsymbol{v}$ d'après (1.6). De façon analogue on peut représenter à l'aide de vecteurs de base tout vecteur dans le système de coordonnées envisagé.

Accélération. L'accélération $\boldsymbol{a}$ d'un point du milieu continu est, elle aussi, un vecteur

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right)_{\xi^i} = a^i \boldsymbol{\partial}_i,$$

où $a^i = a^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ sont les composantes de l'accélération. L'accélération $\boldsymbol{a}$, comme la vitesse $\boldsymbol{v}$, est calculée pour un point individualisé du milieu continu. On définit l'accélération dans le système de coordonnées de l'observateur x^1, x^2, x^3 où l'on établit l'équation du mouvement (1.2). Le système x^1, x^2, x^3 peut être mobile.

Il convient de remarquer que les relations

$$a^1 = \frac{\partial v^1}{\partial t}, \quad a^2 = \frac{\partial v^2}{\partial t}, \quad a^3 = \frac{\partial v^3}{\partial t}$$

ne sont valables que pour le système de coordonnées cartésiennes et ne le sont plus dans le système curviligne. En effet, le vecteur accélération est défini comme la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps, c'est-à-dire $\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right)_{\xi^i}$; or, le calcul des composantes de l'accélération se fait compte tenu du déplacement du point du milieu dans l'espace avec le temps et de la modification subie par les vecteurs de base $\boldsymbol{\partial}_i$ du repère curviligne, en passant d'un point de l'espace à un autre.

Dans un système de coordonnées cartésiennes sont également vérifiées les formules suivantes:

$$a^1 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad a^2 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad a^3 = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Dans bien des problèmes sur le milieu continu, au lieu de rechercher les lois du mouvement on peut se proposer de trouver celle des composantes de la vitesse v^i ou de l'accélération a^i en fonction de ξ^1, ξ^2, ξ^3 et de t.

Soulignons bien que le point de vue de Lagrange sur l'étude du mouvement des milieux continus se fonde sur les lois physiques, car elles sont liées aux mouvements des points individualisés du milieu.

§ 2. Description eulérienne du mouvement du milieu continu

Fondement du point de vue d'Euler. Prenons un autre aspect du problème: au lieu de nous intéresser à l'histoire du mouvement des points individualisés d'un milieu, analysons ce qui se passe, aux différents instants, dans un point géométrique donné de l'espace par rapport au système de référence de l'observateur. La description eulérienne du mouvement d'un milieu continu consiste essentiellement à porter l'attention sur différents éléments du milieu continu

qui passent par ce point géométrique donné. Ainsi, on peut étudier le courant d'eau d'une rivière soit en suivant la trajectoire de chaque particule d'eau de la source à l'embouchure (c'est le point de vue de Lagrange), soit en observant les modifications du courant d'eau dans des endroits déterminés de la rivière, sans suivre chaque particule dans son mouvement le long de toute la rivière (point de vue d'Euler).

Variables d'Euler. La description eulérienne est très courante dans les applications. Les coordonnées géométriques de l'espace x^1, x^2, x^3 et le temps t sont nommés variables d'Euler. D'après Euler, le mouvement est connu si la vitesse, l'accélération, la température et d'autres grandeurs qui nous intéressent sont données en fonction de x^1, x^2, x^3 et de t. Si x^1, x^2, x^3 sont fixes et t est variable, les fonctions $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x^1, x^2, x^3, t)$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x^1, x^2, x^3, t)$, $T = T(x^1, x^2, x^3, t)$ etc. traduisent les variations avec le temps de la vitesse, de l'accélération, de la température, etc. observées pour différentes particules passant par un point donné de l'espace. Pour t fixe et x^1, x^2, x^3 variables, ces fonctions donnent la distribution dans l'espace des caractéristiques du mouvement ; si x^1, x^2, x^3 et t sont variables, on a la distribution dans l'espace des caractéristiques du mouvement aux différents instants.

Différence entre les points de vue de Lagrange et d'Euler sur l'étude du mouvement des milieux continus. Ainsi donc, d'après Lagrange, on décrit les variations de la vitesse, de l'accélération, de la température, etc. d'un point de matière individualisé, tandis que, selon Euler, on observe ces mêmes paramètres pour une région donnée. En suivant l'idée d'Euler, on veut tout connaître sur les particules entrant dans une certaine région d'espace.

Il est clair que mathématiquement le point de vue d'Euler diffère de celui de Lagrange par ce que les variables eulériennes sont les coordonnées x^1, x^2, x^3 des points de l'espace et le temps t, tandis que dans la description lagrangienne les variables sont le temps t et les paramètres ξ^1, ξ^2, ξ^3 individualisant le point de matière.

Passage des variables de Lagrange aux variables d'Euler. L'équation du mouvement d'un milieu continu est de la forme

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \tag{2.1}$$

où les variables indépendantes ξ^1, ξ^2, ξ^3, t sont les variables de Lagrange. En la résolvant par rapport à ξ^1, ξ^2, ξ^3, on obtient

$$\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t), \tag{2.2}$$

autrement dit, nous sommes passés aux variables d'Euler. Pour x^1, x^2, x^3 fixes, (2.2) indique des points (ξ^1, ξ^2, ξ^3) du milieu qui,

aux instants différents, arrivent à un point donné de l'espace. Si la vitesse

$$v = v(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$

l'accélération

$$a = a(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$

la température

$$T = T(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$$

et d'autres grandeurs sont données selon Lagrange, c'est-à-dire comme fonctions de ξ^1, ξ^2, ξ^3 et de t, (2.2) permet de trouver les mêmes paramètres en fonction des variables d'Euler x^1, x^2, x^3 et de t. Donc, si l'on connaît le mouvement dans la description de Lagrange, on passe à celle d'Euler en résolvant l'équation du mouvement (2.1) par rapport à ξ^1, ξ^2, ξ^3, c'est-à-dire en lui donnant la forme (2.2) ; le passage de la description lagrangienne à celle d'Euler se ramène simplement à la résolution des fonctions implicites.

Passage des variables d'Euler aux variables de Lagrange. Supposons donnée, au contraire, la répartition eulérienne des vitesses dans l'espace. Comment obtenir l'équation du mouvement, c'est-à-dire passer à la description lagrangienne? Prenons le système de coordonnées cartésiennes x, y, z, où sont connus

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t).$$

Les composantes de la vitesse u, v, w sont les dérivées des coordonnées correspondantes x, y, z par rapport au temps t lorsque les paramètres ξ^1, ξ^2, ξ^3 qui individualisent le point du milieu continu sont fixes. Ainsi donc, une fois u, v, w données en fonction des variables d'Euler x, y, z et de t, les relations

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t)$$

représentent le système de trois équations différentielles ordinaires par rapport à x, y, z. En résolvant ce système, on obtient x, y, z en fonction de t et de trois constantes arbitraires C_1, C_2, C_3 qui se déterminent d'après les valeurs de x, y, z à un instant donné t_0 et, partant, représentent les paramètres individualisant le point du milieu continu, autrement dit, les variables lagrangiennes. Ainsi, en résolvant ce système d'équations différentielles, on obtient l'équation du mouvement (2.1) à l'aide de laquelle on passe des variables d'Euler à celles de Lagrange dans toutes les formules de répartition de a, de T, etc. Par conséquent, le passage des variables d'Euler aux variables de Lagrange, pour le champ de vitesses donné, est lié à l'intégration des équations différentielles ordinaires.

Il va de soi que les descriptions lagrangienne et eulérienne du mouvement du milieu continu sont mécaniquement équivalentes.

§ 3. Champs scalaires et vectoriels, leurs caractéristiques

Définition des champs scalaire et vectoriel. L'étude du mouvement d'un milieu continu nécessite l'introduction de grandeurs scalaires et vectorielles : température T, vitesse v, etc. Ces grandeurs peuvent être envisagées en général dans différents systèmes de coordonnées : dans celui de l'observateur ou dans le système figé dans le milieu. Elles se présentent en fonction de x^1, x^2, x^3 ou de ξ^1, ξ^2, ξ^3. Dans chacun de ces systèmes, on peut relever un certain domaine, fini ou infini, et faire correspondre à chaque point de ce domaine un nombre, par exemple la température T, un vecteur, par exemple la vitesse v, ou, comme on verra par la suite, d'autres caractéristiques plus complexes.

L'ensemble des valeurs de telle ou telle grandeur données en chaque point du domaine envisagé est appelé son champ. Si cette grandeur est un scalaire, c'est-à-dire un nombre dont la valeur dans le point donné est indépendante du choix du système de coordonnées, le champ est dit scalaire. Tels sont par exemple le champ des températures, le champ des densités, etc. Si la grandeur envisagée est un vecteur, comme par exemple, la vitesse et l'accélération, le champ est vectoriel. Dans tout système de coordonnées x^1, x^2, x^3, la vitesse possède trois composantes v^1, v^2, v^3 et se définit, par conséquent, pour un point et dans le repère donnés au moyen de trois nombres ; c'est pourquoi le champ des vitesses, comme tout autre champ vectoriel, est équivalent à trois champs des projections du vecteur envisagé. Pourtant, bien que le vecteur ne dépende pas du choix du système de coordonnées, ses projections, elles, en dépendent. Etudions sur l'exemple du champ des températures T et celui des vitesses v certaines propriétés générales des champs scalaires et vectoriels.

Dérivées particulaire et locale par rapport au temps. On peut donner la répartition des températures aussi bien selon Lagrange : $T(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ que selon Euler : $T(x^1, x^2, x^3, t)$. Dans la description lagrangienne, la variation de la température T en unité de temps t pour une particule d'un milieu continu se calcule sans peine. Elle est égale à la dérivée

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}.$$

Quelle sera la même quantité si la répartition de température est donnée en variables d'Euler $T(x^1, x^2, x^3, t)$? Pour cela, il faudra passer des variables d'Euler à celles de Lagrange

$$T(x^1, x^2, x^3, t) =$$
$$= T[x^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), x^2(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), x^3(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), t]$$

et utiliser la règle de différentiation d'une fonction composée. Alors

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i}+\frac{\partial T}{\partial x^1}\left(\frac{\partial x^1}{\partial t}\right)_{\xi^i}+\frac{\partial T}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x^2}{\partial t}\right)_{\xi^i}+\frac{\partial T}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x^3}{\partial t}\right)_{\xi^i},$$

où les dérivées $\frac{\partial x^1}{\partial t}$, $\frac{\partial x^2}{\partial t}$, $\frac{\partial x^3}{\partial t}$ se calculent pour ξ^1, ξ^2, ξ^3 constantes et, par conséquent, représentent respectivement les composantes de la vitesse v^1, v^2, v^3. D'où

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i}+v^i\frac{\partial T}{\partial x^i}.$$

Signalons qu'il n'est pas nécessaire de connaître complètement l'équation du mouvement du milieu continu pour calculer $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\xi^i}$ pour la fonction $T(x^1, x^2, x^3, t)$ donnée; le champ des vitesses $\boldsymbol{v}$ suffit.

La dérivée $(\partial T/\partial t)_{\xi^i}$ caractérise la variation de la température avec le temps au point donné du milieu et elle s'appelle dérivée particulaire, ou matérielle, ou totale de la température T par rapport au temps t. Elle se note souvent dT/dt. La dérivée $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{x^i}$ décrit la variation de la température T en unité de temps au point donné de l'espace de coordonnées x^1, x^2, x^3; elle est appelée dérivée locale et est désignée par $\partial T/\partial t$. Dans le cas général, la dérivée particulaire dT/dt n'est pas égale à la dérivée locale $\frac{\partial T}{\partial t}$, mais en diffère d'une quantité qui dépend du mouvement de la particule et s'appelle terme convectif. Ainsi,

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+v^i\frac{\partial T}{\partial x^i}.$$

Nous remettons à plus tard la définition plus détaillée du terme convectif pour considérer à présent, toujours sur l'exemple du champ des températures, certaines notions qu'on peut introduire pour tout champ scalaire.

Surfaces de niveau. Si la température T est donnée en fonction des variables d'Euler, il est alors possible d'envisager, à chaque instant donné t, les surfaces

$$T(x, y, z, t) = \text{const}$$

appelées surfaces de même niveau, ou équipotentielles. Dans le cas du champ des températures on les appelle surfaces isothermes.

Dérivée suivant la direction. Ayant choisi sur la surface de niveau $T = \text{const}$ un certain point M, on peut observer les variations de la température T en partant de ce point suivant les différentes directions. Désignons une direction quelconque par $\boldsymbol{s}$.

La limite

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta s} = \frac{\partial T}{\partial s}$$

est appelée dérivée de T suivant la direction $\boldsymbol{s}$. Il est alors évident que si $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1$, c'est-à-dire que si la direction $\boldsymbol{s}$ se trouve dans le plan

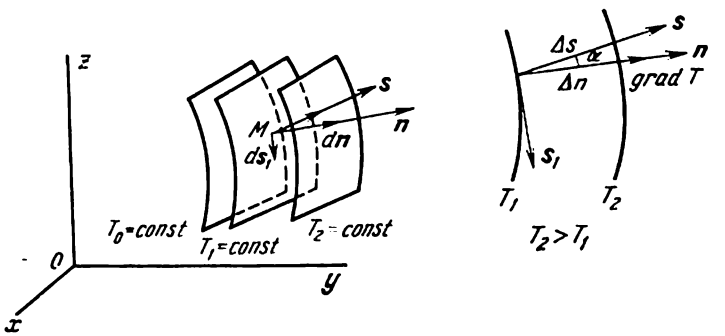


Fig. 4. Surfaces de niveau et vecteur gradient de la température

tangent en M à la surface de niveau $T = \text{const}$, on aura

$$\frac{\partial T}{\partial s_1} = 0.$$

Comme ΔT vaut $T_2 - T_1$ où $T_1 = \text{const}$ et $T_2 = \text{const}$ sont des équations des surfaces équipotentielles voisines et, pour ΔT donné, la formule $\Delta n = \Delta s \cos \alpha$ est vérifiée (voir fig. 4), il s'ensuit que

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial n} \cos \alpha, \tag{3.1}$$

où $\partial T / \partial n$ est la dérivée suivant la normale $\boldsymbol{n}$ à la surface de niveau $T = \text{const}$, et α l'angle entre $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{s}$. La dérivée $\frac{\partial T}{\partial s}$ admet un maximum dans la direction de la normale $\boldsymbol{n}$ (pour $\alpha = 0$).

Vecteur gradient. Introduisons maintenant un vecteur dirigé suivant la normale $\boldsymbol{n}$ dans la direction des T croissants et qui a pour valeur $\frac{\partial T}{\partial n}$. Appelons-le vecteur gradient d'une fonction scalaire, de la température en l'occurrence, et désignons-le par grad T :

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial n} \boldsymbol{n}^0,$$

où $\boldsymbol{n}^0$ est le vecteur unitaire de la normale $\boldsymbol{n}$ dirigée dans le sens des T croissants. Il est bien clair que la valeur absolue du grad T est plus grande là où les surfaces isothermes T = const sont plus serrées.

Selon (3.1), la projection du vecteur gradient des températures sur une direction arbitraire $\boldsymbol{s}$ est bien la dérivée de la température suivant cette direction :

$$(\operatorname{grad} T)_s = \frac{\partial T}{\partial s}.$$

En particulier, les projections du vecteur gradient sur les axes de coordonnées x^1, x^2, x^3 sont égales à

$$(\operatorname{grad} T)_{x^i} = \frac{\partial T}{\partial x^i}.$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Notons que $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$, $\partial T/\partial z$ peuvent être envisagés comme des composantes d'un vecteur, car

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz$$

est l'invariant et dx, dy, dz sont les composantes du vecteur $d\boldsymbol{r}$.

Dérivée convective. Faisant appel aux notions de vecteur gradient des températures et de produit scalaire, on peut donner au terme $\sum_{i=1}^{3} v^i \frac{\partial T}{\partial x^i}$, que nous avons appelé dérivée convective, la forme suivante :

$$v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} = \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad} T.$$

On entend par dérivée la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de l'argument lorsque celui-ci tend vers zéro. De quel accroissement de la fonction s'agit-il lorsqu'on veut définir la dérivée convective? Ecrivons la dérivée convective de la température sous la forme

$$\frac{\boldsymbol{v}\,\Delta t\cdot\operatorname{grad} T}{\Delta t}.$$

Il est alors clair que $\boldsymbol{v}\Delta t$ est égal au déplacement $\Delta\boldsymbol{s}$ (voir fig. 5) et

$$v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{s}\cdot\operatorname{grad} T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\operatorname{grad} T)_s\,\Delta s}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\partial T}{\partial s}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t},$$

où ΔT est l'accroissement de la température dû uniquement au déplacement d'une particule du milieu continu dans le champ des températures de coordonnées variables d'un point à l'autre de l'espace avec la vitesse v pendant le temps Δt (du point A au point B sur la figure 5).

Dans le cas général, la dérivée convective diffère de zéro, car les valeurs des températures aux points A et B ne sont pas les mêmes. Elle peut être nulle en l'absence de mouvement ou quand le gradient de température est nul, c'est-à-dire lorsque, à l'instant donné, la température ne change pas d'un point de l'espace à un autre (un tel champ est dit uniforme), ou lorsque le mouvement s'effectue le long de la surface de niveau $T(x, y, z, t) = \text{const}$ pour $t = \text{const}$.

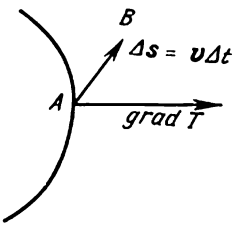


Fig. 5. Sur la notion de dérivée convective

Formules donnant les composantes de l'accélération dans le système de coordonnées cartésiennes. Les notions de dérivées particulaire, locale et convective par rapport au temps permettent d'établir les formules pour les composantes de l'accélération dans le cas où la vitesse est donnée d'après Euler. Supposons données, en repère cartésien, les composantes de la vitesse v^1, v^2, v^3 en fonction des variables d'Euler.

Comment trouve-t-on les composantes de l'accélération? Etant donné que celle-ci se détermine pour une particule du milieu continu, ses composantes se déduisent comme les dérivées particulaires par rapport au temps des composantes correspondantes de la vitesse, c'est-à-dire

$$a_x = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x^i} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$a_y = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{x^i} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$a_z = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{\xi^i} = \frac{dw}{dt} = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x^i} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ces formules, soulignons-le, ne sont valables que pour le système de coordonnées cartésiennes.

Mouvements stationnaires et non stationnaires. Différents processus et mouvements sont appelés permanents, ou stationnaires, si tous les paramètres qui les caractérisent et qui sont donnés selon Euler dépendent uniquement de x^1, x^2, x^3 et ne dépendent pas explicitement du temps t. Ainsi donc, pour les mouvements permanents,

les dérivées locales par rapport au temps de tous les paramètres caractéristiques sont nulles, c'est-à-dire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial v^1}{\partial t} = \frac{\partial v^2}{\partial t} = \frac{\partial v^3}{\partial t} = \ldots = 0.$$

En particulier, on dit que le champ des températures est stationnaire, lorsque $T = T(x^1, x^2, x^3)$; si on a $T = T(x^1, x^2, x^3, t)$, le champ est dit non stationnaire. Les températures T, les vitesses $\boldsymbol{v}$ et d'autres grandeurs réparties dans l'espace des x^1, x^2, x^3 sont identiques à différents instants lorsque le mouvement est stationnaire et distinctes pour le mouvement non stationnaire. La notion de mouvement stationnaire joue un rôle très important dans les applications. Premièrement, on rencontre souvent dans la pratique des écoulements stationnaires, ensuite, l'étude de tels mouvements du point de vue d'Euler est plus simple du fait que le nombre de variables indépendantes est réduit de l'unité (le temps en est éliminé).

Notons que le même mouvement peut être à la fois stationnaire ou non stationnaire. Ceci dépend du choix du repère par rapport auquel le mouvement est étudié. Ainsi, par exemple, le mouvement ondulatoire de l'eau engendré par un bateau qui se meut à vitesse constante paraît stationnaire à l'observateur mobile se trouvant sur le bateau et non stationnaire à l'observateur de la rive. La notion de mouvement stationnaire est donc relative.

Remarquons que les deux observateurs envisagent, dans leurs systèmes de coordonnées, un mouvement défini par rapport au même repère : soit le mouvement absolu par rapport aux rives, soit le mouvement relatif par rapport au bateau.

Lignes de vecteurs ; lignes de courant. Abordons maintenant la notion de lignes de vecteur que l'on peut introduire pour tout champ vectoriel, par exemple, pour le champ des vitesses $\boldsymbol{v}$, des accélérations $\boldsymbol{a}$, du gradient des températures grad T, etc. Dégageons le sens de cette notion sur l'exemple des lignes de vecteur du champ des vitesses que l'on appelle lignes de courant.

On sait que, pour donner le champ des $\boldsymbol{v}$, il faut en chaque point de l'espace x^1, x^2, x^3 et à chaque instant t donner le vecteur

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = v^1 \boldsymbol{e}_1 + v^2 \boldsymbol{e}_2 + v^3 \boldsymbol{e}_3,$$

où $v^i(x^1, x^2, x^3, t)$ sont les composantes de la vitesse dans la base $\boldsymbol{e}_i$. Cette exigence très forte peut être cependant quelque peu atténuée si l'on demande de donner $\boldsymbol{v}$ non pas à tous les instants t, mais à un instant t_0 fixé. Le pas suivant dans cette voie d'affaiblissement de l'exigence ci-dessus est de demander qu'en tout point de l'espace x^1, x^2, x^3 et à un instant t_0 fixe soient données uniquement les directions du vecteur vitesse, sans exiger la donnée de sa valeur. Il est

alors évident que la réponse à cette dernière exigence sera fournie par l'établissement d'une famille de lignes dont les tangentes en chaque point de l'espace coïncident, à l'instant donné t_0, avec la direction du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ en ce point. Ces lignes sont dites lignes de courant dans le cas du champ des vitesses ou lignes de vecteur pour le champ vectoriel arbitraire.

Pour tout champ des vitesses $\boldsymbol{v}$ il est possible de construire une famille de lignes de courant et, une fois celle-ci construite, on connaît la direction du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ en chaque point, au sens des lignes près. Dans la pratique il est souvent utile de connaître les lignes de courant. On le fait par des méthodes expérimentales, notamment par la méthode de visualisation des courants. Pour déterminer expérimentalement les lignes de courant, on emploie la photographie rapide de l'écoulement des fluides auxquels on ajoute des particules de poudres spéciales en suspension, ou en créant des bulles d'air dans la masse de fluide, etc. Les particules étrangères qui se meuvent avec le fluide laissent sur les photos de petites traces qui reconstituent, dans leur ensemble, l'image des lignes de courant. On observe sans peine les lignes de force d'un champ magnétique. Pour cela il suffit de répandre sur une feuille de papier de la limaille de fer et d'approcher par en bas un aimant. Les lignes de courant s'observent également lors de l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion : le procédé que l'on emploie à cet effet consiste à coller sur l'aile de brins de soie et à photographier ensuite l'écoulement d'air dans une soufflerie aérodynamique ou directement en vol.

Equations des lignes de courant. Comment déterminer analytiquement la famille de lignes de courant? Posons le problème mathématique dont la solution donnera les lignes de courant. Ecrivons la condition selon laquelle un élément

$$d\boldsymbol{r} = dx^i\,\boldsymbol{\partial}_i = dx^1\boldsymbol{\partial}_1 + dx^2\boldsymbol{\partial}_2 + dx^3\boldsymbol{\partial}_3,$$

pris le long d'une ligne de courant et le vecteur vitesse

$$\boldsymbol{v} = v^i\boldsymbol{\partial}_i = v^1\boldsymbol{\partial}_1 + v^2\boldsymbol{\partial}_2 + v^3\boldsymbol{\partial}_3$$

sont parallèles l'un à l'autre : $d\boldsymbol{r} = d\lambda\cdot\boldsymbol{v}$. Ici $d\lambda$ est un paramètre scalaire qui peut être envisagé sur chaque ligne de courant $\mathscr{L}$ comme la différentielle d'une fonction $\lambda\,(s, \mathscr{L})$, où s est la longueur d'arc suivant la ligne de courant. On obtient en composantes

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3} = d\lambda,$$

soit

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = v^i\,(x^1, x^2, x^3, t), \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3.2}$$

Ce sont les équations différentielles des lignes de courant. Elles diffèrent des équations différentielles donnant la loi du mouvement ou les trajectoires des particules du milieu continu qui ont la forme :

$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x^1, x^2, x^3, t). \tag{3.3}$$

Les deux membres de l'équation (3.3) contiennent le temps t, tandis que dans (3.2) les dérivées se calculent par rapport à λ et les deuxièmes membres sont les fonctions de t. En intégrant (3.2), on doit considérer t comme un paramètre constant, qui est au contraire une variable dans les équations (3.3).

En général, les lignes de courant et trajectoires ne se confondent pas. La famille de lignes de courant $x^i = x^i(c^1, c^2, c^3, \lambda, t)$ dépend du temps et elle n'est pas la même aux instants différents. Pourtant, le paramètre t n'entre dans les deuxièmes membres de (3.2) et (3.3) que lorsque le mouvement n'est pas stationnaire. Au cas d'un mouvement stationnaire, la différence entre les équations (3.2) et (3.3) disparaît, se réduisant à la seule notation du paramètre de différentiation, ce qui n'est d'ailleurs d'aucune importance. Ainsi, les lignes de courant et les trajectoires se confondent si le mouvement est stationnaire.

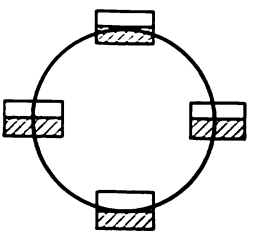


Fig. 6. Mouvement de translation d'un solide suivant une circonférence

Exemples des lignes de courant et des trajectoires. Envisageons quelques exemples. On appelle mouvement de translation d'un solide le mouvement pendant lequel un segment de droite quelconque du solide se déplace parallèlement à lui-même. Lors d'une translation tous les points du solide possèdent, à un instant donné, les mêmes vitesses, égales en grandeur et en direction. Par conséquent, les lignes de courant sont toujours droites dans ce cas. Et les trajectoires ? Le mouvement translatif d'un solide s'effectue suivant une trajectoire arbitraire, y compris la circonférence (fig. 6). C'est pourquoi en général les lignes de courant et les trajectoires ne s'identifient pas dans la translation.

Lors d'un mouvement arbitraire, les lignes de courant figurent les spirales, tandis que les trajectoires peuvent être quelconques.

Est-ce qu'il existe des mouvements non stationnaires au cours desquels les lignes de courant et les trajectoires se confondent ? Prenons en guise d'exemple le mouvement rectiligne d'un solide de vitesse variable. Les lignes de courant ainsi que les trajectoires sont droites en l'occurrence et le mouvement est sans nul doute du type non stationnaire. Il en va de même pour la rotation d'un solide avec une vitesse angulaire variable autour d'un axe fixe. En règle

générale, l'identité entre lignes de courant et trajectoires a lieu lors de mouvements non stationnaires, au cours desquels les vitesses au point donné changent avec le temps de valeur et non de direction.

Par conséquent, les lignes de courant et les trajectoires coïncident pour les champs $\boldsymbol{v}(x^1, x^2, x^3)$ et $\boldsymbol{v}_1 = f(x^1, x^2, x^3, t)\,\boldsymbol{v}(x^1, x^2, x^3)$, où $f(x^1, x^2, x^3, t)$ est la fonction scalaire de ses arguments.

Existence des lignes de courant. Les équations différentielles des lignes de courant (3.2) peuvent être récrites sous la forme

$$\frac{dx^2}{dx^1} = \frac{v^2}{v^1}, \quad \frac{dx^3}{dx^1} = \frac{v^3}{v^1}. \tag{3.4}$$

On peut poser le problème de Cauchy qui consiste à rechercher, pour une valeur donnée constante de t, des solutions $x^2(x^1)$, $x^3(x^1)$ qui, pour $x^1 = x_0^1$ fixe, prennent les valeurs données x_0^2 et x_0^3, autrement dit, il s'agit de mener par le point donné de coordonnées x_0^1, x_0^2, x_0^3 la courbe intégrale du système d'équations (3.4) (ligne de courant). On sait de la théorie générale des équations différentielles que, lorsque dans un volume quelconque V les deuxièmes membres des équations (3.4) sont des fonctions univoques et continues, admettant les dérivées premières continues par rapport aux variables x^1, x^2 et x^3, dans les points du volume V le problème de Cauchy admet une solution unique. (Ce théorème est également valable sous certaines conditions plus générales.) Ainsi donc, pour des restrictions assez générales on peut faire passer par tout point d'un volume donné du milieu continu mobile une ligne de courant et une seule.

Points singuliers et critiques. Les conditions assurant l'unicité de la solution du problème de Cauchy peuvent ne pas être remplies en certains points du champ des vitesses. En ces points particuliers l'unicité de la solution du problème de Cauchy se rompt et les lignes de courant s'y entrecroisent ou se ramifient. Notamment, aux points où toutes les composantes de la vitesse v^1, v^2, v^3 se réduisent à zéro ou à l'infini, les deuxièmes membres des équations (3.4) deviennent indéfinis et ces points sont donc les points singuliers des équations différentielles des lignes de courant ; l'unicité de la solution du problème de Cauchy peut y être rompue. Les points singuliers peuvent avoir la forme d'un centre, d'une selle, d'un foyer, d'un nœud ou être d'une forme encore plus complexe.

Les points singuliers des équations différentielles des lignes de courant (3.4) sont appelés points critiques. Citons l'exemple important des points ou des lignes critiques dans l'écoulement où la vitesse s'annule. La figure 7 schématise les lignes de courant dans la section méridionale d'un écoulement qui se forme par suite d'un choc de deux filets liquides axialement symétriques se mouvant l'un à l'en-

contre de l'autre. Au centre de la zone d'interaction des filets se forme un certain point critique A de vitesse nulle où il y a ramification des lignes de courant.

Surfaces de courant, surfaces de vecteur. Par chaque point d'une courbe arbitraire C on peut mener une ligne de courant. Si en outre C n'est pas la ligne de courant, une surface se forme en chaque point de laquelle la vitesse $\boldsymbol{v}$ repose dans le plan tangent à la surface. Une telle surface est dite surface de courant. Lorsqu'une surface analogue est construite pour un champ vectoriel arbitraire, elle s'appelle surface de vecteur. Comment trouver l'équation de la surface de courant $f(x^1, x^2, x^3) =$ const? On conçoit que grad f dirigé suivant la normale à la surface $f(x^1, x^2, x^3) =$ const est perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{v}$, d'où

$$\operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{v} = 0,$$

c'est-à-dire que

$$u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0 . \qquad (3.5)$$

Nous avons obtenu l'équation différentielle aux dérivées partielles pour la détermintaion de la fonction $f(x, y, z)$.

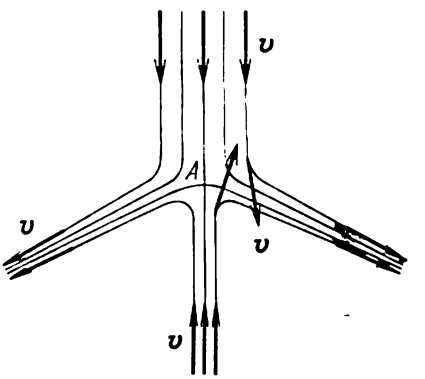


Fig. 7. Au point critique A la vitesse du fluide est nulle, les lignes de courant s'y ramifient

La méthode de construction des surfaces de courant décrite ci-dessus indique le moyen d'intégrer les équations aux dérivées partielles données sous la forme (3.5). L'intégration se ramène à la recherche d'une famille de lignes de courant traversant le contour C, c'est-à-dire à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires (les solutions de ces équations ordinaires sont appelées dans le cas général caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles (3.5)). Il est clair que la solution unique ne s'obtient que dans le cas où le contour C n'est pas lui-même la ligne de courant (cela revient à dire qu'il n'est pas une caractéristique).

Tubes de courant, tubes de vecteur. Lorsque la courbe C est fermée, l'ensemble des lignes de courant qui passent par ses points forme un tube de courant; celui-ci est appelé tube de vecteur dans le cas d'un champ vectoriel quelconque.

Champ de vecteurs potentiel, écoulements potentiels. Plus haut nous avons envisagé le vecteur gradient de la température T. Une

question se pose alors : est-il possible de représenter le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ comme le gradient d'une certaine fonction scalaire $\varphi(x, y, z, t)$? S'il existe une fonction $\varphi(x, y, z, t)$ telle que

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

le champ des vitesses $\boldsymbol{v}$ est dit potentiel et la fonction φ, potentiel des vitesses. De manière analogue, on appelle un champ vectoriel quelconque $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ potentiel s'il y a une fonction $\Phi(x, y, z, t)$ telle que

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} \Phi(x, y, z, t).$$

Suivant les propriétés du vecteur gradient, la vitesse $\boldsymbol{v}$ est orthogonale à la surface équipotentielle $\varphi = \text{const}$ dans le cas des écoulements potentiels et elle est plus grande là où les surfaces équipotentielles sont plus denses; la projection de $\boldsymbol{v}$ sur une direction quelconque s est la dérivée du potentiel φ suivant cette direction : $v_s = \partial\varphi/\partial s$. Composons l'expression

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz. \tag{3.6}$$

Condition nécessaire et suffisante de l'existence du potentiel. Lorsque l'écoulement est potentiel, (3.6) est une différentielle totale (en coordonnées x, y, z) de la fonction φ. En effet,

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi.$$

La réciproque est également vraie : lorsque (3.6) est une différentielle totale, l'écoulement s'avère être potentiel. Comme on sait, pour que (3.6) soit la différentielle totale, on doit avoir des égalités

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

qui représentent les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence du potentiel. On verra par la suite que les écoulements potentiels jouent un rôle important. Voyons maintenant quelques exemples.

Ecoulement de translation. Un exemple de l'écoulement potentiel est fourni par un écoulement de translation de vitesse constante suivant l'axe des x. Ici $u = u_0$, $v = w = 0$ et comme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

le potentiel φ est égal à $\varphi = u_0 x + \text{const}$. On en tirera sans peine deux conclusions évidentes. Premièrement, un potentiel se définit

d'après les coordonnées à une constante additive près; deuxièmement, tout écoulement de translation est constamment potentiel. En effet, dans le cas général d'une translation $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$ et $\varphi = u_0x + v_0y + w_0z + C$; en outre u_0, v_0, w_0 et C peuvent être des fonctions de t.

Notons qu'il est plus facile d'étudier les écoulements potentiels que les écoulements non potentiels, car les premiers se définissent

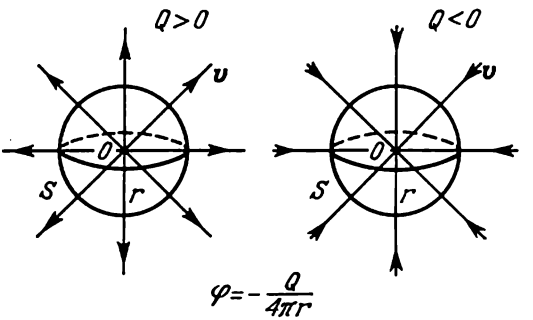


Fig. 8. Ecoulement d'une source et d'un puits ponctuels dans l'espace

par une seule fonction $\varphi(x, y, z, t)$, tandis que les mouvements de type général le sont par trois fonctions $v^1(x, y, z, t)$, $v^2(x, y, z, t)$, $v^3(x, y, z, t)$.

Source et puits dans l'espace. Envisageons encore un exemple de l'écoulement potentiel qui nous sera utile ultérieurement. Soit

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}, \tag{3.7}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et $Q = \text{const}$ ou $Q = Q(t)$. Il est alors évident que les surfaces équipotentielles $\varphi = \text{const}$ sont, dans ce cas, des surfaces $r = \text{const}$, c'est-à-dire des sphères concentriques de centre à l'origine des coordonnées. La vitesse $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$ est orthogonale à ces sphères, c'est-à-dire dirigée suivant les rayons. Les lignes de courant sont alors des rayons issus de l'origine des coordonnées. Soit $Q > 0$; grad φ étant alors dirigé dans le sens des φ croissants, la vitesse $\boldsymbol{v}$ suit $\boldsymbol{r}$. Lorsque $Q < 0$, $\boldsymbol{v}$ est dirigé suivant $-\boldsymbol{r}$ (fig. 8). La vitesse a pour valeur

$$|(\operatorname{grad}\varphi)_r| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right| = \frac{|Q|}{4\pi r^2}.$$

La vitesse tend vers zéro lorsque $r \to \infty$ et vers l'infini lorsque $r \to 0$. Les points « zéro » et « l'infini » sont critiques. Quand $Q > 0$, on verra le fluide s'écouler dans toutes les directions partant de l'origine des coordonnées : l'écoulement de ce type est appelé source

ponctuelle de l'espace. Pour $Q < 0$ le fluide coule vers l'origine des coordonnées, un tel écoulement est appelé puits ponctuel. Dans le premier cas, le point infiniment éloigné représente un puits, dans le second, une source.

Calculons le volume d'un fluide qui traverse en une unité de temps la surface sphérique S de rayon r centrée à l'origine des coordonnées. Un élément $d\sigma$ de la sphère est traversé en une unité de temps par un volume de fluide $v\,d\sigma$. Pour toute la sphère on a

$$\int_S v\,d\sigma = v \int_S d\sigma = 4\pi r^2 v = Q$$

(v est mis devant le signe somme puisque sur la surface de la sphère $v = \text{const}$). Notons que les deux premières égalités sont vraies chaque fois où $v = v(r)$ et $\boldsymbol{v}$ est orthogonale à la surface de la sphère S. Le volume calculé du fluide est indépendant de r. Ainsi donc, bien que les vitesses ne soient pas identiques sur les diverses sphères de rayons différents centrées à l'origine des coordonnées, la constante Q dans la formule (3.7) pour le potentiel φ est le volume du fluide traversant, en une unité de temps, chacune de ces sphères. Q est appelé débit ou intensité de la source (puits).

Lorsque $Q = \text{const}$, la source ou le puits sont d'une intensité constante; lorsque $Q = Q(t)$, l'intensité est variable. Si à un instant quelconque Q varie dans l'origine des coordonnées, le champ des vitesses varie instantanément dans tout l'espace. Les signaux de variation de Q se répandent immédiatement dans tout le champ des vitesses, ce qui dans la réalité n'est évidemment pas possible, les perturbations se propageant à une certaine vitesse finie. C'est pourquoi le champ des vitesses envisagé n'est qu'une abstraction qui ne reflète adéquatement la réalité que lorsque l'on a affaire à des écoulements des fluides où les perturbations se propagent à grande vitesse. L'eau dans laquelle la vitesse de propagation des perturbations faibles est de 1450 m/s est très souvent un tel fluide.

§ 4. Eléments du calcul tensoriel

Comme de nombreux paramètres du milieu continu sont de nature tensorielle il convient de donner ici quelques notions de calcul tensoriel. Notons en passant que le scalaire et le vecteur sont aussi des tenseurs quoique des plus simples. Les vecteurs et les scalaires seuls s'avèrent insuffisants pour décrire le mouvement d'un milieu continu.

Le système de coordonnées établit une correspondance entre les nombres et les points de l'espace. Par chaque point de l'espace passent trois courbes coordonnées. Ce peut être celles d'un système de coordonnées concomitant ξ^1, ξ^2, ξ^3, celles d'un système de l'ob-

servateur x^1, x^2, x^3 ou bien celles d'un système de coordonnées quelconques. C'est pourquoi pour désigner le système de coordonnées on se servira dans ce paragraphe des lettres ζ^1, ζ^2, ζ^3 ou des lettres η^1, η^2, η^3.

Le système de coordonnées est choisi par le chercheur, donc il est indépendant du phénomène étudié. Tout en comprenant des coordonnées, les lois du mouvement ne doivent pas dépendre du choix du système de coordonnées. Elles doivent être invariantes par rapport aux systèmes de coordonnées, ce qui implique certaines restrictions concernant l'expression mathématique de ces lois.

Transformation des coordonnées. Envisageons quelques notions indispensables de la théorie de la transformation des coordonnées. Soient deux systèmes de coordonnées ζ^1, ζ^2, ζ^3 et η^1, η^2, η^3 permettant chacun l'étude d'un mouvement. Soit la relation entre les deux systèmes

$$\zeta^i = \zeta^i(\eta^1, \eta^2, \eta^3) \tag{4.1}$$

dite transformation des coordonnées. Proposons-nous de considérer les transformations continues biunivoques. Ces transformations forment un groupe. Cherchons des relations invariantes par rapport au groupe des transformations continues biunivoques. On a d'après (4.1)

$$\left.\begin{aligned} d\zeta^1 &= \frac{\partial\zeta^1}{\partial\eta^1}\,d\eta^1 + \frac{\partial\zeta^1}{\partial\eta^2}\,d\eta^2 + \frac{\partial\zeta^1}{\partial\eta^3}\,d\eta^3, \\ d\zeta^2 &= \frac{\partial\zeta^2}{\partial\eta^1}\,d\eta^1 + \frac{\partial\zeta^2}{\partial\eta^2}\,d\eta^2 + \frac{\partial\zeta^2}{\partial\eta^3}\,d\eta^3, \\ d\zeta^3 &= \frac{\partial\zeta^3}{\partial\eta^1}\,d\eta^1 + \frac{\partial\zeta^3}{\partial\eta^2}\,d\eta^2 + \frac{\partial\zeta^3}{\partial\eta^3}\,d\eta^3 \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

ou

$$d\zeta^i = \frac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^j}\,d\eta^j, \tag{4.2'}$$

où la sommation sur j va de 1 à 3 et i parcourt les valeurs 1, 2, 3, ce qui sera implicite dans la suite.

Ainsi donc, à proximité d'un point donné, il existe une relation entre les accroissements des coordonnées $d\zeta^i$ et $d\eta^i$. Les dérivées $\partial\zeta^i/\partial\eta^j$ sont des fonctions du point mais elles sont constantes pour un point déterminé. Par conséquent l'expression (4.2) est la relation linéaire entre les accroissements des coordonnées $d\zeta^i$ et $d\eta^i$ au point donné. Introduisons les notations

$$\frac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^j} = a^{i\cdot}_{\cdot j}.$$

(Plus bas on verra que la disposition et l'ordre des indices en haut et en bas sont d'une importance capitale.) Les quantités $a^{i\cdot}_{\cdot j}$ for-

ment la matrice

$$\| a^{i\cdot}_{\cdot j} \| = \mathsf{A},$$

où le premier indice i désigne sa ligne et le deuxième j marque sa colonne. La biunivocité implique que le jacobien de la transformation, égal au déterminant de la matrice $\| a^{i\cdot}_{\cdot j} \|$, diffère de zéro, i.e. $\Delta = | a^{i\cdot}_{\cdot j} | \neq 0$. Comme $\Delta \neq 0$, il s'ensuit que les relations linéaires (4.2) sont résolubles par rapport à $d\eta^i$ et l'on peut écrire avec (4.2) les formules suivantes

$$d\eta^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^i} d\zeta^j. \tag{4.3}$$

Introduisons la matrice

$$\mathsf{B} = \| b^{i\cdot}_{\cdot j} \|,$$

où

$$b^{i\cdot}_{\cdot j} = \frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^j}.$$

Les matrices A et B sont introduites pour les transformations directe et inverse. Elles sont biréciproques, c'est-à-dire que leur produit est une matrice unité. En effet

$$\mathsf{A} \cdot \mathsf{B} = \| a^{i\cdot}_{\cdot j} \| \cdot \| b^{j\cdot}_{\cdot k} \| = \| a^{i\cdot}_{\cdot j} b^{j\cdot}_{\cdot k} \|,$$

or

$$a^{i\cdot}_{\cdot j} b^{j\cdot}_{\cdot k} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} \frac{\partial \eta^j}{\partial \zeta^k} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \zeta^k} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad i = k, \\ 0 & \text{pour} \quad i \neq k, \end{cases}$$

puisque ζ^1, ζ^2, ζ^3 tout comme η^1, η^2, η^3 sont des coordonnées indépendantes. Dans la suite on utilisera les symboles de Kronecker

$$\delta^{i\cdot}_{\cdot k} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad i = k, \\ 0 & \text{pour} \quad i \neq k. \end{cases}$$

On a

$$\mathsf{A} \cdot \mathsf{B} = \| \delta^{i\cdot}_{\cdot k} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \mathsf{E},$$

où E est une matrice unité. Il est clair que le déterminant de la matrice B

$$| b^{i\cdot}_{\cdot j} | = \frac{1}{\Delta}.$$

Les raisonnements ci-dessus concernaient l'espace tridimensionnel mais ils s'étendent à tout espace de n dimension, y compris les

espaces uni-, bi- et quadridimensionnels, en usage dans la mécanique des milieux continus.

Signalons qu'ici on n'a pas besoin de la métrique de l'espace. L'espace ζ^1, ζ^2, ζ^3 peut être non métrique ou muni d'une métrique très complexe.

Vecteurs de base. Reprenons la notion de vecteurs de base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ afin de compléter l'exposé et de mettre en relief les points de vue utilisés. Supposons donnés dans un repère ζ^1, ζ^2, ζ^3 le point M

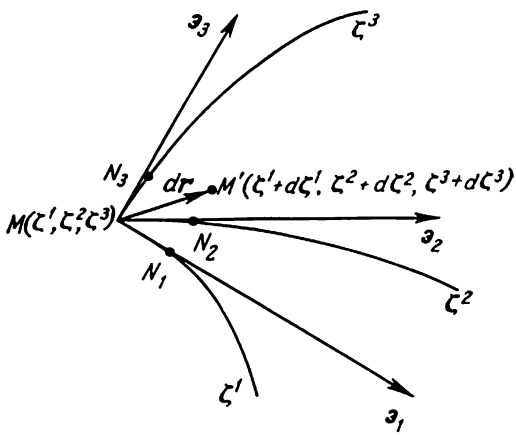


Fig. 9. Vecteurs de base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

de coordonnées ζ^1, ζ^2, ζ^3 et le point M' infiniment proche du premier avec les coordonnées $\zeta^1 + d\zeta^1$, $\zeta^2 + d\zeta^2$, $\zeta^3 + d\zeta^3$ (fig. 9). Introduisons

$$d\mathbf{r} = \overline{MM'},$$

c'est-à-dire un couple de points M et M' infiniment proches considérés dans l'ordre (un couple de points ordonné), et représentons-le sur le schéma par la flèche $\overline{MM'}$ entièrement définie par les coordonnées des points M et M'. Considérons également une autre quantité

$$k\, d\mathbf{r}, \tag{4.4}$$

où k est un nombre quelconque ; la quantité $k\, d\mathbf{r}$ est dirigée suivant $d\mathbf{r}$ si $k > 0$ et opposée à $d\mathbf{r}$ si $k < 0$. Menons à partir du point M trois courbes coordonnées sur lesquelles nous marquerons les points N_1, N_2, N_3 définis chacun par l'accroissement $d\zeta^1$, ou $d\zeta^2$, ou $d\zeta^3$ respectif. Introduisons de la même manière que $d\mathbf{r}$ les quantités $\overline{MN_1}$, $\overline{MN_2}$, $\overline{MN_3}$ ou, d'après (4.4), en posant $k_i = 1/d\zeta^i$, les

quantités

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta^i} = \boldsymbol{\vartheta}_i$$

que nous appellerons vecteurs de base; ils sont dirigés suivant les tangentes aux courbes coordonnées.

En cas général, $d\boldsymbol{r}$ est d'orientation arbitraire et l'on peut écrire par définition

$$d\boldsymbol{r} = d\zeta^1 \boldsymbol{\vartheta}_1 + d\zeta^2 \boldsymbol{\vartheta}_2 + d\zeta^3 \boldsymbol{\vartheta}_3,$$

$d\zeta^1$, $d\zeta^2$, $d\zeta^3$ étant appelés composantes de $d\boldsymbol{r}$. Il est clair que les vecteurs de base $\boldsymbol{\vartheta}_1$, $\boldsymbol{\vartheta}_2$, $\boldsymbol{\vartheta}_3$ du repère ζ^1, ζ^2, ζ^3 ont toujours les composantes (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) respectives. On peut introduire les vecteurs de base aussi bien dans le système ζ^1, ζ^2, ζ^3 que dans le système η^1, η^2, η^3. Ils seront différents pour un même point dans les différents systèmes de coordonnées. Désignons par $\boldsymbol{\vartheta}'_1$, $\boldsymbol{\vartheta}'_2$, $\boldsymbol{\vartheta}'_3$ les vecteurs de base du repère η^1, η^2, η^3, on aura

$$d\boldsymbol{r} = d\eta^j \boldsymbol{\vartheta}'_j.$$

On voit que les composantes de $d\boldsymbol{r}$ et les vecteurs de base $\boldsymbol{\vartheta}_i$ dépendent du choix du système de coordonnées.

Transformation des vecteurs de base et des composantes de $d\boldsymbol{r}$ lors du changement de système de coordonnées. Recherchons des formules qui permettraient d'exprimer les vecteurs de base $\boldsymbol{\vartheta}'_i$ dans le nouveau système de coordonnées η^1, η^2, η^3 au moyen des vecteurs de base $\boldsymbol{\vartheta}_i$ dans l'ancien système ζ^1, ζ^2, ζ^3. Il suffit pour cela de se servir de la définition des vecteurs de base $\boldsymbol{\vartheta}'_i$ et $\boldsymbol{\vartheta}_i$:

$$\boldsymbol{\vartheta}'_j = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \eta^j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta^i} \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} = \boldsymbol{\vartheta}_i a^{i\cdot}_{\cdot j}. \tag{4.5}$$

Les composantes de $d\boldsymbol{r}$ sont reliées d'après (4.3) par la formule

$$d\eta^i = b^{i\cdot}_{\cdot j} d\zeta^j. \tag{4.6}$$

Signalons que les vecteurs de base $\boldsymbol{\vartheta}_i$ se transforment selon (4.5) par la matrice A et les composantes de $d\boldsymbol{r}$, selon (4.6) par la matrice B inverse de A (on ne serait trop attirer l'attention sur la disposition des indices dans (4.5) et (4.6)).

L'invariance de $d\boldsymbol{r}$ par rapport à la transformation des coordonnées. La quantité $d\boldsymbol{r}$ est invariante par la transformation des coordonnées. En effet

$$d\boldsymbol{r} = d\eta^j \boldsymbol{\vartheta}'_j = b^{j\cdot}_{\cdot i} d\zeta^i a^{s\cdot}_{\cdot j} \boldsymbol{\vartheta}_s = d\zeta^i \boldsymbol{\vartheta}_i,$$

puisque

$$b^{j}_{\cdot i} a^{s}_{\cdot j} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & i = s \\ 0, & i \neq s \end{array} \right\} = \delta^{s}_{\cdot i}.$$

Il s'ensuit que l'expression de $d\boldsymbol{r}$ par les composantes et les vecteurs de base du système de coordonnées correspondant ne varie pas lors du changement de coordonnées, elle est invariante par les transformations des systèmes de coordonnées.

Grandeurs covariantes et contravariantes. Les grandeurs qui se prêtent à une transformation analogue à celle des vecteurs de base $\boldsymbol{a}_i$ selon (4.5) sont dites covariantes. Les grandeurs qui se transforment par analogie avec les composantes de $d\boldsymbol{r}$ d'après (4.6) sont appelées contravariantes. Notons que les transformations engendrant les grandeurs covariantes et contravariantes sont réciproques.

Définition du vecteur. Introduisons, d'après le modèle de $d\boldsymbol{r}$, une quantité $\boldsymbol{A}$ en la représentant au moyen de la base de la manière suivante :

$$\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{a}_i.$$

Ses composantes A^i se transforment lors du changement de coordonnées comme celles de $d\boldsymbol{r}$, soit :

$$A'^i = b^{i}_{\cdot j} A^j.$$

La quantité $\boldsymbol{A}$, invariante tout comme $d\boldsymbol{r}$ par la transformation

$$\boldsymbol{A} = A^j \boldsymbol{a}_j = A'^i \boldsymbol{a}'_i, \tag{4.7}$$

s'appelle vecteur.

L'invariance du vecteur $\boldsymbol{A}$ découle du caractère réciproque des transformations de ses composantes A^i et des vecteurs de base $\boldsymbol{a}_i$. Les vecteurs de base portent chaque vecteur, leurs coefficients dans (4.7) étant, en général, les fonctions numériques du point M.

Le vecteur $\boldsymbol{A}$ peut être d'une nature physique ou géométrique quelconque, mais il est toujours défini à l'aide des vecteurs de base par la décomposition (4.7), où les nombres (fonctions) A^i dépendent du système de coordonnées. Les vecteurs de base $\boldsymbol{a}_i$ définissent les nombres A^i, tout en créant une nouvelle grandeur, le vecteur $\boldsymbol{A}$.

Produits polyadiques des vecteurs de base. Une question se pose : est-il possible d'introduire des quantités de base autres que $\boldsymbol{a}_i$, qui, semblablement à $\boldsymbol{a}_i$, opérant sur les nombres, permettraient de définir des notions plus complexes que les vecteurs et de surcroît invariantes par la transformation des coordonnées? La réponse en est

affirmative. On peut notamment introduire les quantités suivantes:

$$E_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1, \quad E_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad E_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \quad E_4 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1,$$
$$E_5 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \quad E_6 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad E_7 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1, \quad E_8 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2, \quad E_9 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$$

et l'on peut considérer

$$T = T^i E_i, \tag{4.8}$$

où T^i sont des nombres dits composantes de T dans la base E_i ($i = 1, 2, \ldots, 9$).

Les quantités de base E_i sont appelées produits polyadiques des vecteurs de base $\mathbf{e}_i$ (dans notre cas ils sont dyadiques, car chaque produit se compose de deux vecteurs, mais on peut introduire le produit de plusieurs vecteurs du type $\mathscr{E}_s = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$; dans l'espace tridimensionnel $s = 1, 2, \ldots, 81$). Par définition, les produits polyadiques des vecteurs de base sont linéairement indépendants, ce qui signifie que $T = 0$ si seulement 9 nombres T^i sont nuls. Il est plus commode de se servir directement des notations $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ au lieu de nouvelles désignations E_k et d'écrire l'égalité (4.8) sous la forme

$$T = T^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j.$$

La multiplication polyadique des vecteurs constitue une certaine opération sur les vecteurs qui donne lieu à de nouvelles quantités (ni vecteurs ni scalaires). Afin de définir cette opération il suffit d'en indiquer les propriétés. En particulier, l'ordre des vecteurs multipliés ($\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$) est d'une importance fondamentale. La multiplication polyadique est par définition linéaire (elle est distributive, les multiplicateurs numériques peuvent être mis en facteur commun). Par exemple, l'égalité suivante

$$\mathbf{e}_i(a\mathbf{e}_j + b\mathbf{e}_k) = a\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + b\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k \tag{4.9}$$

est vraie, où a et b sont des nombres.

Le produit polyadique des vecteurs de base $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, tout comme ces derniers, dépend du système de coordonnées. Les formules pour les transformations des quantités $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ s'obtiennent en se référant à celles de $\mathbf{e}_i$ et en se servant de la linéarité du produit polyadique. Elles ont la forme suivante:

$$\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j = a^{p\cdot}_{\cdot i}a^{q\cdot}_{\cdot j}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q. \tag{4.10}$$

Les composantes des produits polyadiques (dyadiques) $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ dans le système de coordonnées correspondant s'écrivent sous forme de matrices composées d'une unité, le reste étant des zéros. Par exemple, les composantes de $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ forment la matrice

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Les produits polyadiques permettent d'introduire des quantités appelées tenseurs.

Exigeons que $T^{ij}\,\partial_i\partial_j$ soit invariant par le changement de coordonnées, c'est-à-dire que

$$T^{ij}\partial_i\partial_j = T'^{ij}\partial'_i\partial'_j, \tag{4.11}$$

où T^{ij} et T'^{ij} se rapportent aux systèmes de coordonnées différents. D'où et de la formule de transformation des produits polyadiques (4.10) il est immédiat que T^{ij} se transforment au changement de coordonnées selon les formules

$$T'^{ij} = b^{i\cdot}_{\cdot p} b^{j\cdot}_{\cdot q} T^{pq}. \tag{4.12}$$

Définition du tenseur. La quantité invariante $= T^{ij}\partial_i\partial_j$ est appelée tenseur du deuxième ordre. Le nombre des indices de ses composantes est l'ordre du tenseur. Bien évidemment, un vecteur est un tenseur du premier ordre.

Comme dans le cas du vecteur A, l'invariance du tenseur T est assurée par la réciprocité des transformations des produits polyadiques (4.10) et des composantes du tenseur (4.12).

On définit de même le tenseur de n'importe quel ordre. Voici en guise d'exemple celui du cinquième ordre

$$T = T^{ijklm}\partial_i\partial_j\partial_k\partial_l\partial_m = T'^{ijklm}\partial'_i\partial'_j\partial'_k\partial'_l\partial'_m, \tag{4.13}$$

où les quantités régissant les nombres T^{ijklm} sont maintenant les produits polyadiques $\partial_i\partial_j\partial_k\partial_l\partial_m$ qui se transforment selon (4.10), tandis que les composantes du tenseur le sont selon (4.12).

Soulignons que le vecteur et le tenseur se définissent comme des êtres indépendants des transformations des coordonnées et non pas comme un simple ensemble de composantes qui se transforment suivant une loi donnée *).

*) Nous avons défini les vecteurs et tenseurs comme des êtres invariants dont les bases et les composantes se transforment lors du changement de coordonnées $\eta^i = \eta^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ à l'aide des matrices réciproques $a^{i\cdot}_{\cdot j} = \partial\xi^i/\partial\eta^j$ et $b^{i\cdot}_{\cdot j} = \partial\eta^i/\partial\xi^j$. On peut introduire de manière analogue d'autres êtres de base e_i tels que leurs transformations soient définies par d'autres matrices A^j_i et B^j_i (liées d'une autre façon à la transformation des coordonnées) conduisant à des êtres invariants correspondants $Q = Q^i e_i = Q'^j e'_j$, $P = P^{ij} e_i e_j = P'^{kl} e'_k e'_l$, etc., de sorte que l'on aura

$$e'_j = A^i_j e_i, \quad Q'^j = B^j_i Q^i, \quad P'^{kl} = B^k_i B^l_j P^{ij}, \quad A^i_j B^j_k = \delta^i_k.$$

Par exemple, lorsqu'on étudie les transformations orthogonales, on introduit, outre les vecteurs et les tenseurs, les spinors et les spin-tenseurs dont les êtres de base et les composantes se transforment à l'aide de certaines matrices A^i_j et B^i_j qui sont d'autres (ne coïncidant pas avec $a^{i\cdot}_{\cdot j}$ et $b^{i\cdot}_{\cdot j}$) représentations matricielles du groupe des transformations orthogonales de l'espace.

Au même ensemble des composantes peuvent correspondre, mathématiquement et physiquement, des tenseurs différents lorsque les vecteurs de base, qui suivent la même transformation, sont différents.

Tenseurs symétriques et antisymétriques. Les composantes tensorielles T^{ij}, T^{ijklm} définies par (4.11) et (4.13) se transforment de façon contravariante et sont dites composantes contravariantes d'un tenseur.

En général toutes les composantes du tenseur T sont différentes. Si, pourtant, les valeurs des composantes du tenseur T se conservent lors de la permutation d'un couple d'indices, par exemple $T^{ijklm} = T^{jiklm}$, ce tenseur est appelé symétrique par rapport à ces indices. La règle de transformation des composantes du tenseur (4.12) fait voir que la symétrie d'un tenseur est invariante par transformations des coordonnées.

Si, lors de la permutation d'un couple d'indices, les composantes du tenseur T changent de signe, c'est-à-dire que $T^{ijklm} = -T^{jiklm}$, ce tenseur T est dit antisymétrique par rapport à ces indices. La propriété d'antisymétrie du tenseur est également invariante par transformations des coordonnées.

Si l'on considère un tenseur $T = T^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, l'être $T^* = T^{*ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, où $T^{*ij} = T^{ji}$, est également un tenseur, $T = T^*$ n'étant vrai que pour un tenseur symétrique.

Addition des tenseurs, multiplication d'un tenseur par un nombre. Composons à partir de deux tenseurs $A = A^{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ et $B = B^{ijk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ la combinaison $A + B = (A^{ijk} + B^{ijk})\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$ qui sera de toute évidence un tenseur. Ce nouveau tenseur $A + B$ est dit somme des tenseurs A et B. Ainsi donc, en s'appuyant sur la règle précédente, on peut former à partir de tenseurs donnés de nouveaux tenseurs qui sont leur somme ou leur différence. On ne peut additionner ou soustraire que les tenseurs du même ordre.

De même, si A est un tenseur, la quantité $C = k \cdot A$, où k est un nombre quelconque indépendant du système de coordonnées (scalaire), est également un tenseur.

Opérations de symétrisation et d'alternation. En se servant des règles d'addition des tenseurs et de multiplication d'un tenseur par un nombre on peut faire correspondre à tout tenseur du second ordre $T = T^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ un tenseur symétrique

$$T_0 = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$$

et un tenseur antisymétrique

$$T_1 = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji})\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j.$$

Les opérations conduisant à T_0 et T_1 sont appelées respectivement symétrisation et alternation. Si T est symétrique, $T_0 = T$ et $T_1 = 0$; si T est antisymétrique, $T_0 = 0$ et $T_1 = T$.

Notons que, par définition, un tenseur est nul si toutes ses composantes sont nulles.

Formules de transformation de vecteurs de base contravariants. Les vecteurs de base $\mathbf{a}_i$ se transformant selon (4.5) sont nommés vecteurs de base covariants. Soit un tenseur du second ordre $\varkappa = \varkappa^{ij}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$. Introduisons dans un système de coordonnées ζ^1, ζ^2, ζ^3

$$\mathbf{a}^i = \varkappa^{ij}\mathbf{a}_j, \tag{4.14}$$

où par exemple $\varkappa^{1j}\mathbf{a}_j = \varkappa^{11}\mathbf{a}_1 + \varkappa^{12}\mathbf{a}_2 + \varkappa^{13}\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}^1$ représente la somme de trois vecteurs de base $\mathbf{a}_i$ multipliés par les nombres $\varkappa^{1j}$. De façon analogue, définissons dans un autre système de coordonnées η^1, η^2, η^3

$$\mathbf{a}'^p = \varkappa'^{pq}\mathbf{a}'_q.$$

A partir des formules de transformation de $\varkappa^{pq}$ (4.12) et de $\mathbf{a}_{ij}$ (4.5) on obtient avec leur concours celles de $\mathbf{a}^i$:

$$\mathbf{a}'^p = \varkappa'^{pq}\mathbf{a}'_q = b^{p\cdot}_{\cdot i} b^{q\cdot}_{\cdot j}\varkappa^{ij} a^{k\cdot}_{\cdot q}\mathbf{a}_k = b^{p\cdot}_{\cdot i}\varkappa^{ij}\mathbf{a}_j = b^{p\cdot}_{\cdot i}\mathbf{a}^i, \tag{4.15}$$

car $b^{q\cdot}_{\cdot j} a^{k\cdot}_{\cdot q} = \delta^{k\cdot}_{\cdot j}$. On remarque que les $\mathbf{a}^i$ se transforment de façon contravariante; ils sont appelés vecteurs de base contravariants.

Ainsi à l'aide d'un tenseur quelconque du second ordre on peut introduire les vecteurs de base contravariants $\mathbf{a}^i$. Signalons que si les vecteurs de base covariants $\mathbf{a}_i$ ne dépendent que du système de coordonnées, les vecteurs contravariants dépendent aussi bien du système de coordonnées que du tenseur $\varkappa$ qui les a produits.

Composantes covariantes du tenseur $\varkappa$. Connaissant les vecteurs de base contravariants $\mathbf{a}^i$, on peut essayer de trouver les vecteurs de base covariants $\mathbf{a}_i$, c'est-à-dire de résoudre (4.14) par rapport à $\mathbf{a}_i$. Dans ce but il faut introduire la matrice $\| \varkappa_{ij} \|$ inverse de la matrice $\| \varkappa^{ij} \|$ en respectant la condition Det $\| \varkappa^{ij} \| \neq 0$.

On sait par l'algèbre que

$$\varkappa_{ij} = \frac{k_{ji}}{\Delta}, \tag{4.16}$$

où k_{ij} sont les cofacteurs des éléments de la matrice $\| \varkappa^{ij} \|$ et $\Delta =$ Det $\| \varkappa^{ij} \|$. Ainsi, connaissant la matrice $\| \varkappa^{ij} \|$ de déterminant non nul, il est possible, selon (4.16), de composer la matrice $\| \varkappa_{ij} \|$ et donc de résoudre (4.14) par rapport à $\mathbf{a}_i$. Dans un système de coordonnées quelconques ζ^1, ζ^2, ζ^3 on a

$$\mathbf{a}_j = \varkappa_{ji}\mathbf{a}^i. \tag{4.17}$$

Semblablement dans un autre système η^1, η^2, η^3

$$\mathbf{a}'_j = \varkappa'_{ji}\mathbf{a}'^i.$$

En partant des formules connues de transformation de $\mathfrak{e}_j$ (4.5) et de $\mathfrak{e}^i$ (4.15) on obtient celle des composantes $\varkappa_{ij}$. En effet,

$$\mathfrak{e}'_j = \varkappa'_{ji}\mathfrak{e}'^i = a^{i\cdot}_{\cdot j}\mathfrak{e}_i = a^{i\cdot}_{\cdot j}\varkappa_{ik}\mathfrak{e}^k = a^{i\cdot}_{\cdot j}a^{k\cdot}_{\cdot l}\varkappa_{ik}\mathfrak{e}'^l,$$

d'où

$$\varkappa'_{ji} = a^{p\cdot}_{\cdot j}a^{q\cdot}_{\cdot i}\varkappa_{pq}. \tag{4.18}$$

On voit que l'expression $\varkappa_{ij}\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j$, où $\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j$ sont des produits polyadiques des vecteurs de base contravariants $\mathfrak{e}^i$ se transformant selon les formules

$$\mathfrak{e}'^i\mathfrak{e}'^j = b^{i\cdot}_{\cdot k}b^{j\cdot}_{\cdot l}\mathfrak{e}^k\mathfrak{e}^l,$$

est un être indépendant du choix du système de coordonnées, puisque les $\varkappa_{ij}$ se transforment de façon covariante et les produits polyadiques $\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j$ de façon contravariante. En outre, d'après (4.14) et compte tenu de ce que la matrice $\varkappa_{ij}$ est l'inverse de la matrice $\varkappa^{ij}$, on a

$$\varkappa_{ij}\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^i = \varkappa^{ip}\varkappa^{jq}\varkappa_{ij}\mathfrak{e}_p\mathfrak{e}_q = \varkappa^{pq}\mathfrak{e}_p\mathfrak{e}_q.$$

Il s'ensuit que $\varkappa_{ij}$ peuvent s'appeler composantes covariantes dans la base contravariante $\mathfrak{e}^i$ du tenseur du second ordre $\varkappa$ considéré plus haut. Pour plus de simplicité nous admettrons dans la suite que $\varkappa$ est un tenseur symétrique, i.e. $\varkappa^{ij} = \varkappa^{ji}$ et, par conséquent, $\varkappa_{ij} = \varkappa_{ji}$.

Composantes covariantes d'un vecteur arbitraire. Pour tout vecteur $\boldsymbol{A}$ on peut écrire évidemment

$$\boldsymbol{A} = A^j\mathfrak{e}_j = A^j\varkappa_{ij}\mathfrak{e}^i = A_i\mathfrak{e}^i,$$

si l'on pose

$$A_i = \varkappa_{ij}A^j. \tag{4.19}$$

On voit que l'indice des composantes contravariantes A^j du vecteur $\boldsymbol{A}$, tout comme celui des vecteurs de base contravariants $\mathfrak{e}^i$, s'abaisse à l'aide des composantes contravariantes du tenseur $\varkappa$ (4.19) et (4.17). Par conséquent les A_i se transforment comme $\mathfrak{e}_i$, i.e. de façon covariante :

$$A'_i = a^{k\cdot}_{\cdot i}A_k.$$

On désigne par A_i les composantes covariantes du vecteur $\boldsymbol{A}$ dans la base contravariante $\mathfrak{e}^i$. Il s'ensuit que pour chaque vecteur $\boldsymbol{A}$ on peut introduire les composantes A^i, dites composantes contravariantes, transformables par la matrice $\mathbf{B}$, et les composantes A_i, dites composantes covariantes, transformables par la matrice $\mathbf{A}$. Dans le cas général les composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur sont distinctes, $A^j \neq A_j$.

Composantes covariantes et mixtes d'un tenseur. Les raisonnements que l'on a tenus pour un vecteur peuvent s'appliquer à un tenseur de n'importe quel ordre; on obtiendra par exemple, dans le cas du tenseur du quatrième ordre

$$T = T^{ijkl}\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}_j\mathfrak{e}_k\mathfrak{e}_l = T^{ijkl}\varkappa_{lp}\varkappa_{jq}\varkappa_{km}\varkappa_{ln}\mathfrak{e}^p\mathfrak{e}^q\mathfrak{e}^m\mathfrak{e}^n =$$
$$= T_{pqmn}\mathfrak{e}^p\mathfrak{e}^q\mathfrak{e}^m\mathfrak{e}^n = T^{ijkl}\varkappa_{jp}\varkappa_{kq}\mathfrak{e}\mathfrak{e}^p\mathfrak{e}^q\mathfrak{e}_l =$$
$$= T^{i\cdot\cdot l}_{\cdot pq\cdot}\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}^p\mathfrak{e}^q\mathfrak{e}_l. \quad (4.20)$$

Les composantes T_{pqmn} sont dites composantes covariantes et les composantes $T^{i\cdot\cdot l}_{\cdot pq\cdot}$ sont dites composantes mixtes (covariantes suivant les indices p, q et contravariantes suivant i, l) du tenseur T. Les formules de transformation des composantes mixtes sont de la forme suivante:

$$T'^{m\cdot\cdot s}_{\cdot nr\cdot} = T^{i\cdot\cdot l}_{\cdot pq\cdot}b^{m\cdot}_{\cdot i}a^{p\cdot}_{\cdot n}a^{q\cdot}_{\cdot r}b^{s\cdot}_{\cdot l},$$

c'est-à-dire que la transformation est covariante suivant les indices inférieurs n, r et contravariante suivant les indices supérieurs m, s.

Jonglerie avec les indices. Il découle de ce qui précède qu'au moyen du tenseur $\varkappa$ on parvient à abaisser ou élever les indices des composantes de n'importe quel tenseur. Cette opération est dite jonglerie avec les indices. En guise d'exemple considérons

$$T = T_{ij}\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j = T_{ij}\varkappa^{ik}\mathfrak{e}_k\mathfrak{e}^j = T^{k\cdot}_{\cdot j}\mathfrak{e}_k\mathfrak{e}^j, \quad (4.21)$$

où l'on remplace l'expression de T en composantes covariantes T_{ij} par celle en composantes mixtes $T^{k\cdot}_{\cdot j}$. L'abaissement des indices dans (4.20) est effectué à l'aide de $\varkappa_{ij}$, tandis que $\varkappa^{ij}$ les fait monter dans (4.21).

Remarquons qu'on ne peut additionner ou soustraire que les composantes ayant la même disposition d'indices. La symétrie ou l'antisymétrie des tenseurs étaient définies également par rapport aux indices disposés identiquement.

Longueur d'un vecteur. Tous les raisonnements ci-dessus se rapportent à un point de l'espace quelconque mais fixé. Introduisons maintenant la métrique des espaces, i.e. indiquons le moyen de définir les distances dans les espaces. Pour définir la longueur d'un vecteur il suffit de connaître les produits scalaires des vecteurs de base

$$\mathfrak{e}_i\cdot\mathfrak{e}_j = g_{ij}$$

qui en un point donné sont, en général, des nombres quelconques. Le carré de la longueur du vecteur $d\mathbf{r}$ est égal par définition à

$$|d\mathbf{r}|^2 = ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = d\zeta^i\,d\zeta^j\,\mathfrak{e}_i\cdot\mathfrak{e}_j = d\zeta^i\,d\zeta^j\,g_{ij}, \quad (4.22)$$

celui d'un vecteur quelconque est

$$|\boldsymbol{A}|^2 = A^i A^j g_{ij}.$$

La longueur de tout vecteur s'exprime au moyen de ses composantes et des produits scalaires des vecteurs de base g_{ij}.

La condition d'invariance de la longueur $|d\boldsymbol{r}|$ par rapport au choix du système de coordonnées se traduit par la formule

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = g'_{pq}\, d\eta^p\, d\eta^q = g_{ij}\, d\zeta^i\, d\zeta^j = g_{ij} a^{i\cdot}_{\cdot p} a^{j\cdot}_{\cdot q}\, d\eta^p\, d\eta^q.$$

Tenseur métrique fondamental. Ceci nous conduit aux formules tensorielles de transformation de g_{ij} : $g'_{pq} = a^{i\cdot}_{\cdot p} a^{j\cdot}_{\cdot q} g_{ij}$. Aussi, en vertu de l'invariance de la longueur $|d\boldsymbol{r}|$, les quantités g_{ij} sont-elles considérées en tant que composantes covariantes du tenseur $g = g_{ij}\partial^i\partial^j$, dit tenseur métrique fondamental.

Par définition du produit scalaire, le tenseur g est un tenseur symétrique :

$$g_{ij} = g_{ji}.$$

La forme (4.22), bilinéaire par rapport aux accroissements des coordonnées $d\zeta^i$, est appelée forme bilinéaire fondamentale ; elle donne la métrique, ou la distance, de deux points proches de l'espace.

On connaît de l'algèbre que toute forme bilinéaire à coefficients constants peut être ramenée à la forme canonique, c'est-à-dire qu'à chaque point donné on peut associer les coordonnées x^1, x^2, x^3 telles que la forme bilinéaire (4.22) se présente comme la somme des carrés

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \tag{4.23}$$

et la matrice du tenseur g sera de la forme

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Signalons qu'il est généralement impossible d'appliquer ce genre de transformation à tout l'espace, c'est-à-dire de trouver un système de coordonnées x^1, x^2, x^3 tel que (4.22) se ramène dans tout l'espace à l'expression (4.23). L'espace admettant un tel système de coordonnées est dit euclidien et dans le cas contraire il est dit non euclidien. Si dans un espace de dimension n on peut, par transformation réelle des coordonnées, ramener dans tout l'espace la forme (4.22) à la forme $ds^2 = \alpha_i\,(dx^i)^2$, où $\alpha_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, et que l'un des α_i au moins diffère des autres par le signe, cet espace est dit pseudo-euclidien.

Corrélation entre les bases covariante et contravariante quand on remplace le tenseur $\varkappa$ par g. Il est évident que pour le tenseur g on peut introduire, en même temps que les composantes covariantes g_{ij}, les composantes contravariantes g^{ij} en procédant comme pour le tenseur $\varkappa$. Pour cela il faut seulement que Det $\| g_{ij} \| \neq 0$. A l'aide des g^{ij} on peut définir les vecteurs de base contravariants $\mathbf{e}^j$:

$$\mathbf{e}^j = g^{ij}\mathbf{e}_i \tag{4.24}$$

et jongler avec les indices en appliquant le tenseur fondamental métrique g et non plus le tenseur quelconque $\varkappa$.

Etablissons les propriétés des produits scalaires $\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_p$.

Il découle de (4.24)

$$\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_p = g^{ij}\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_p = g^{ij}g_{ip} = \delta^j_p, \tag{4.25}$$

c'est-à-dire que $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$, $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, etc.

Il s'ensuit que le vecteur de base $\mathbf{e}^1$ est orthogonal à l'aire formée par $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, etc. On vérifie aisément que les vecteurs de base contravariants satisfont aux formules suivantes:

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}, \tag{4.26}$$

et les vecteurs de base covariants à celles-ci :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3}{\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1}{\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2}{\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)}, \tag{4.27}$$

où l'on désigne par le signe $\times$ les produits vectoriels. L'on dit que les vecteurs de base covariants et contravariants sont réciproques. Il est clair que dans un repère cartésien orthogonal $\mathbf{e}^j = \mathbf{e}_j$; par conséquent, il n'y a pas de différence entre les composantes covariantes et contravariantes des vecteurs et des tenseurs et il devient superflu d'écrire les indices en haut et en bas.

Composantes mixtes du tenseur métrique. D'après (4.25) il est évident que les composantes mixtes $g^{i\cdot}_{\cdot j}$ du tenseur fondamental g forment dans n'importe quel repère la matrice unité:

$$\| g^{i\cdot}_{\cdot j} \| = \begin{Vmatrix} g^{1\cdot}_{\cdot 1} & g^{1\cdot}_{\cdot 2} & g^{1\cdot}_{\cdot 3} \\ g^{2\cdot}_{\cdot 1} & g^{2\cdot}_{\cdot 2} & g^{2\cdot}_{\cdot 3} \\ g^{3\cdot}_{\cdot 1} & g^{3\cdot}_{\cdot 2} & g^{3\cdot}_{\cdot 3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \| \delta^{i\cdot}_{\cdot j} \|.$$

Produit indéterminé des tenseurs. Outre les opérations déjà introduites sur les tenseurs examinons maintenant leur produit. Soient le vecteur $A = A^i\mathbf{e}_i$ et le tenseur $T = T^{h\cdot}_{\cdot j}\mathbf{e}_h\mathbf{e}^j$.

Construisons formellement

$$B = A^i T^k_{\cdot j} \partial_i \partial_k \partial^j$$

et

$$B^* = A^i T^k_{\cdot j} \partial_k \partial^j \partial_i = T^{ik} A_j \partial_i \partial_k \partial^j.$$

Il est évident que B et B^* sont les tenseurs, mais $B \neq B^*$. L'opération par laquelle on obtient des tenseurs d'ordre plus élevé que des tenseurs initiaux s'appelle produit indéterminé des tenseurs. Son résultat dépend de l'ordre de multiplication. S'il est vrai que le produit indéterminé des vecteurs permet de former des tenseurs de tous ordres $A^i A^j A^k \ldots \partial_i \partial_j \partial_k \ldots$, un tenseur n'est pas obligatoirement un produit des vecteurs. On introduit à l'aide du produit indéterminé des tenseurs de la forme

$$\begin{aligned} \mathscr{T} &= g^{ij} g^{pq} g^{rs} \ldots \partial_i \partial_j \partial_p \partial_q \partial_r \partial_s \ldots = \\ &= g_{ij} g_{pq} g_{rs} \ldots \partial^i \partial^j \partial^p \partial^q \partial^r \partial^s \ldots = \\ &= \delta^i_{\cdot j} \delta^p_{\cdot q} \delta^r_{\cdot s} \ldots \partial_i \partial^j \partial_p \partial^q \partial_r \partial^s \ldots \end{aligned}$$

Il va sans dire que les composantes mixtes des tenseurs $\mathscr{T}$ s'exprimant au moyen des symboles de Kronecker sont les mêmes quel que soit le repère, c'est-à-dire qu'elles sont invariantes par transformations des coordonnées. Ces composantes sont nulles ou égales à l'unité.

Le nombre des composantes d'un tenseur. Un scalaire k peut être considéré comme tenseur d'ordre zéro, étant caractérisé par un seul nombre ($3^0 = 1$), un vecteur est un tenseur du premier ordre dans un espace tridimensionnel et possède trois composantes ($3^1 = 3$), un tenseur du second ordre a $3^2 = 9$ composantes, etc., un tenseur d'ordre p a dans un espace tridimensionnel 3^p composantes, un tenseur d'ordre r dans un espace n-dimensionnel a n^r composantes. Parfois, lorsqu'il y a symétrie, le nombre de composantes indépendantes peut se réduire. En particulier, un tenseur symétrique du second ordre ($T_{ij} = T_{ji}$) n'a que six composantes indépendantes, tandis qu'un tenseur antisymétrique ($T_{ij} = -T_{ji}$) n'en a que trois. La symétrie d'un tenseur traduit le fait que ses composantes sont invariantes par rapport à un certain groupe de transformations; par exemple, les composantes mixtes du tenseur $\mathscr{T}$ mentionnées plus haut le sont par rapport au groupe de toutes les transformations continues. Les composantes du tenseur $\mathscr{T}$ de structure quelconque des indices sont invariantes par rapport au groupe de transformations orthogonales défini à partir de la condition d'invariance des composantes g_{ij} du tenseur fondamental.

Les invariants scalaires d'un tenseur. En règle générale les composantes d'un tenseur dépendent du choix du système de coordonnées mais on peut demander de trouver des fonctions $\Phi(T^{i\cdot}_{\cdot j})$ des composantes du tenseur telles qu'elles soient invariantes par rapport au repère choisi, c'est-à-dire que

$$\Phi(T^{i\cdot}_{\cdot j}) = \Phi(T'^{i\cdot}_{\cdot j}).$$

Ces fonctions des composantes du tenseur sont dites invariants du tenseur. Elles sont soit des nombres soit des fonctions des points de l'espace. C'est précisément ces fonctions des composantes des tenseurs ou des vecteurs qui sont admises, au même titre que d'autres êtres invariants, dans les expressions mathématiques des lois physiques, ces expressions ne devant pas dépendre de la méthode de description ni, en particulier, du repère choisi. On peut définir de façon analogue les fonctions invariantes des composantes de plusieurs tenseurs. Ces fonctions s'appellent scalaires. Signalons quelques règles simples pour la construction des invariants d'un vecteur et d'un tenseur. Prenons un vecteur

$$A = A^i \mathfrak{e}_i = A_j \mathfrak{e}^j = A^i g_{ij} \mathfrak{e}^j$$

et composons le produit scalaire

$$A \cdot A = A^i A^j \mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_j = A^i A^j g_{ij} = A^i A_i.$$

L'expression obtenue est un invariant (carré de la longueur du vecteur A), puisque les transformations des composantes de noms différents sont réciproques. Le vecteur n'a qu'un seul invariant absolu qui est sa longueur, les autres invariants étant des fonctions de cette dernière.

Soit un tenseur quelconque du second ordre

$$T = T^{ij} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_j.$$

Transformons-le par contraction sur les deux indices avec le tenseur métrique $T^{ij} g_{ij}$ (rappelons que la contraction est une sommation sur les indices supérieur et inférieur); on obtient un nombre, indépendant du système de coordonnées, vu que les transformations des composantes d'indices supérieurs et inférieurs sont réciproques. On peut écrire

$$\left.\begin{aligned} &T^{ij} g_{ij} = T^{i\cdot}_{\cdot i} = T^{1\cdot}_{\cdot 1} + T^{2\cdot}_{\cdot 2} + T^{3\cdot}_{\cdot 3}. \\ \text{Les contractions} \quad &T^{i\cdot}_{\cdot j} T^{j\cdot}_{\cdot i}, \\ &T^{i\cdot}_{\cdot j} T^{j\cdot}_{\cdot p} T^{p\cdot}_{\cdot i} \end{aligned}\right\} \qquad (4.28)$$

sont également invariantes. Ainsi, pour un tenseur du second ordre on a obtenu trois invariants par rapport aux composantes : linéaire, quadratique et cubique. On verra plus loin que dans le cas du tenseur

symétrique du second ordre, le plus important pour nos applications, tous les autres invariants scalaires sont les fonctions de ces trois invariants.

Surface tensorielle. Soient un point arbitraire O et un autre point M proche du premier. Traçons, en O, trois courbes coordonnées ζ^1, ζ^2, ζ^3 et considérons le vecteur

$$\overline{OM} = d\boldsymbol{r} = d\zeta^i \boldsymbol{\partial}_i$$

et un tenseur symétrique

$$T = T^{ij} \boldsymbol{\partial}_i \boldsymbol{\partial}_j = T_{ij} \boldsymbol{\partial}^i \boldsymbol{\partial}^j.$$

Comme $T_{ij} d\zeta^i d\zeta^j$ est bien évidemment un invariant, on peut poser

$$T_{ij}\, d\zeta^i\, d\zeta^j = T'_{ij}\, d\eta^i\, d\eta^j = c, \tag{4.29}$$

où c est un certain nombre. Au voisinage immédiat du point O l'équation (4.29) définit, pour c fixe et les valeurs de T_{ij} en O, une surface du second degré dite surface tensorielle. Les différentielles $d\zeta^i$ ou $d\eta^i$ jouent le rôle de coordonnées des points de cette surface tensorielle. A tout tenseur symétrique T du second ordre on peut faire correspondre, en chaque point, une surface du second degré (4.29).

Axes principaux et composantes principales d'un tenseur. On sait que par transformation de coordonnées on peut ramener l'équation de cette surface du second degré à la forme canonique, c'est-à-dire que l'on peut associer au point O un repère x^1, x^2, x^3 tel que (4.29) se mette sous la forme

$$T_{11}(dx^1)^2 + T_{22}(dx^2)^2 + T_{33}(dx^3)^2 = c.$$

L'ensemble des systèmes de coordonnées x^1, x^2, x^3 au point O inclut le repère orthogonal. Il s'ensuit qu'en chaque point de l'espace on peut construire des axes de coordonnées orthogonaux tels que le tenseur symétrique du second ordre ne possède que trois composantes T_{11}, T_{22}, T_{33} non nulles en ce point. De tels axes sont appelés axes principaux du tenseur et le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires ($g_{ii} = 1$, $g_{ij} = 0$ pour $i \neq j$) dont les axes suivent les axes principaux s'appelle système principal de coordonnées du tenseur T au point O. On voit alors disparaître la distinction entre les composantes covariantes et contravariantes dans le repère principal :

$$T^{ii} = T_{ii} = T^i_i = T_i$$

(il n'y a pas de sommation sur i). Trois composantes généralement distinctes et non nulles du tenseur dans le repère principal sont dites ses composantes principales. On montre plus loin (voir § 4,

chap. III) comment trouver les axes principaux et les composantes principales d'un tenseur symétrique.

Il est maintenant facile de répondre à la question de savoir quel est le nombre de fonctions invariantes et indépendantes des composantes d'un tenseur symétrique du second ordre. Dans le repère principal, elles sont toutes les fonctions des trois composantes seulement, et, par suite, leur nombre ne dépasse pas trois, or de (4.28), noté dans le repère principal, il découle que tous les trois invariants obtenus précédemment sont indépendants.

Si besoin est, on donnera, dans la suite, d'autres notions sur les tenseurs.

§ 5. Théorie des déformations

Soit un solide parfait en mouvement par rapport au système de coordonnées de l'observateur x^1, x^2, x^3 (fig. 10). Fixons ses positions à l'instant initial t_0 et à l'instant arbitraire t.

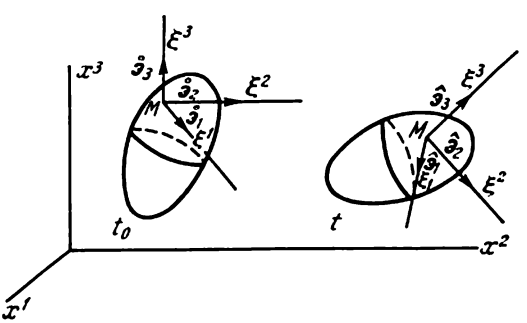


Fig. 10. Mouvement d'un solide parfait

Dépendance par rapport au temps des vecteurs de base du repère concomitant. A chaque point M du corps peut être associé un repère concomitant ξ^1, ξ^2, ξ^3. Comme celui-ci se déplace avec le corps, ses vecteurs de base seront différents aux instants t_0 et t. Désignons-les par $\mathring{\partial}_i$ et $\hat{\partial}_i$ aux instants t_0 et t respectivement. On comprend bien que les vecteurs de base du repère concomitant dépendent en général du point M du corps et varient avec le temps. Si le repère ξ^1, ξ^2, ξ^3 est figé dans le milieu qui se déplace comme un solide parfait, les trièdres $\hat{\partial}_i$ s'obtiennent à partir des trièdres $\mathring{\partial}_i$ par une translation et une rotation combinées :

$$|\mathring{\partial}_i| = |\hat{\partial}_i| \quad \text{et} \angle\, \mathring{\partial}_i \mathring{\partial}_j = \angle\, \hat{\partial}_i \hat{\partial}_j,$$

$$\text{i.e. } \mathring{\partial}_i \cdot \mathring{\partial}_j = \hat{\partial}_i \cdot \hat{\partial}_j.$$

Le problème se complique dans le cas du mouvement d'un corps déformable du fait que la distance des points M et M' varie. Les courbes coordonnées du repère concomitant se déforment en entraînant une variation avec le temps des modules des vecteurs de base $\hat{\mathfrak{e}}_i$ ainsi que des angles qu'ils forment.

La variation de la distance entre les points d'un milieu continu pendant le mouvement est d'une importance capitale. Il est à noter, en particulier, que les forces d'interaction entre les particules peuvent dépendre de leur distance.

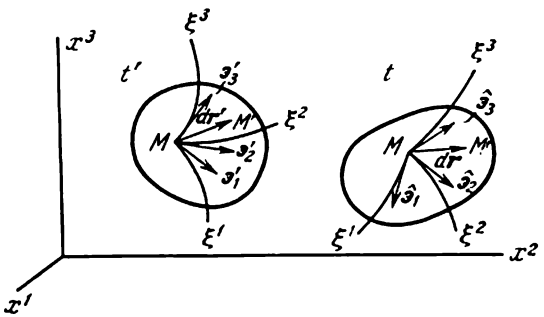


Fig. 11. Mouvement du milieu déformable

Considérons deux positions arbitraires d'un corps déformable et, en particulier, celles de deux points M et M' sur ce corps aux instants arbitraires t et t' (fig. 11). Désignons par $\mathfrak{e}_i'$ les vecteurs de base au point M à l'instant t' et par $\hat{\mathfrak{e}}_i$ les vecteurs de base à l'instant t. De toute évidence, on aura dans le repère concomitant

$$dr = d\xi^i \hat{\mathfrak{e}}_i$$

et

$$dr' = d\xi^i \mathfrak{e}_i'.$$

Nous voulons introduire les caractéristiques de la variation des distances, ce qui implique l'introduction des tenseurs métriques du repère concomitant aux instants t et t'.

Mais avant d'introduire la métrique, signalons que tout segment de droite infinitésimal issu du point M se transforme, lors du mouvement du milieu continu, en un segment de droite infinitésimal issu du point qui correspond à ce point M.

En effet, outre l'élément infinitésimal dr du milieu continu considéré à l'instant t auquel correspondait à l'instant t' l'élément dr', on peut introduire à l'instant t un élément $k\,dr$, où k est un nombre. Dans l'espace ξ^1, ξ^2, ξ^3, à l'instant t' à cet élément corres-

pondait l'élément $k\,d\boldsymbol{r}'$, puisque dans cet espace les variables de Lagrange de tous les points du milieu continu se conservent et par conséquent on doit y avoir la décomposition suivant les vecteurs de base $\mathbf{a}'_i$:

$$k\,d\xi^i \mathbf{a}'_i = k\,d\boldsymbol{r}'.$$

Pour k finis différents et $d\boldsymbol{r}$ donné, les éléments $k\,d\boldsymbol{r}$ définissent à l'instant t un segment de droite élémentaire issu du point M, segment à qui dans l'espace ξ^1, ξ^2, ξ^3 à l'instant t' correspondait un petit segment de droite $k\,d\boldsymbol{r}'$.

Introduisons maintenant les métriques des espaces des repères concomitants aux instants t et t'. Soient à l'instant t

$$\left.\begin{aligned} &|d\boldsymbol{r}| = ds, \quad ds^2 = \hat{g}_{ij}\,d\xi^i\,d\xi^j, \\ \text{où} \quad & \\ &\hat{g}_{ij} = \hat{\mathbf{a}}_i \cdot \hat{\mathbf{a}}_j, \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

et à l'instant t'

$$\left.\begin{aligned} &|d\boldsymbol{r}'| = ds', \quad ds'^2 = g'_{ij}\,d\xi^i\,d\xi^j, \\ \text{où} \quad & \\ &g'_{ij} = \mathbf{a}'_i \cdot \mathbf{a}'_j. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Soulignons que dans le repère concomitant les coordonnées des points M et M' aux instants t et t' sont les mêmes, tandis que les composantes $\hat{g}_{ij}$ et g'_{ij} diffèrent.

Coefficient d'allongement relatif. Appelons coefficient d'allongement relatif le rapport

$$l = \frac{ds - ds'}{ds'} = \frac{ds}{ds'} - 1, \tag{5.3}$$

où ds et ds' passent par les mêmes points individuels du milieu aux instants correspondants. Le coefficient l dépend du choix du point M et de l'orientation de l'élément pour lequel il est calculé et ne dépend pas de la longueur $d\boldsymbol{r}$. Si l est infiniment petit dans tous les points et dans toutes les directions, la déformation correspondante est dite infiniment petite. Si l a une valeur finie, la déformation est dite finie. Par définition, un solide parfait a tous les coefficients l identiquement nuls.

Remarquons qu'il est possible d'introduire les déformations et les coefficients d'allongement relatif en considérant deux positions tout à fait arbitraires d'un milieu continu et qu'on peut calculer l pour tout $d\boldsymbol{r}$ pourvu que l'on connaisse $\hat{g}_{ij}$, g'_{ij} et la direction de $d\boldsymbol{r}$.

Tenseurs des déformations. Introduisons la notation

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - g'_{ij}) ; \tag{5.4}$$

selon (5.1) et (5.2) on a

$$ds^2 - ds'^2 = 2\varepsilon_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j .$$

Conformément à (5.4), ε_{ij} sont les composantes covariantes d'un tenseur. Or on sait obtenir les composantes contravariantes d'un tenseur à partir de ses composantes covariantes au moyen d'un tenseur quelconque du second ordre $\varkappa$. Dans un espace métrique nous avons convenu de faire usage du tenseur fondamental g en tant que $\varkappa$. Dans le cas présent, pour élever les indices on se sert soit de g'^{ij}, soit de $\hat{g}^{ij}$, ce qui produit à partir des composantes covariantes ε_{ij} deux ensembles de composantes contravariantes : $\hat{\varepsilon}^{ij}$ (les indices sont élevés par $\hat{g}^{ij}$) et ε'^{ij} (les indices sont élevés par g'^{ij}). Si bien qu'on peut construire deux tenseurs différents

$$\hat{\mathscr{E}} = \varepsilon_{ij}\hat{\mathfrak{a}}^i\hat{\mathfrak{a}}^j \quad \text{et} \quad \mathscr{E}' = \varepsilon'_{ij}\mathfrak{a}'^i\mathfrak{a}'^j$$

ayant les mêmes composantes covariantes (5.4) mais rapportés aux bases différentes $\hat{\mathfrak{a}}^i$ et $\mathfrak{a}'^i$. Ces tenseurs sont dits tenseurs des déformations. Les composantes contravariantes et mixtes des tenseurs $\hat{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{E}'$ étant distinctes, on les désigne respectivement par $\hat{\varepsilon}^{ij}$, ε'^{ij} et $\hat{\varepsilon}^i_j$, ε'^i_j ; $\varepsilon'^i_j \neq \hat{\varepsilon}^i_j$ vu que $\varepsilon'^i_j = \varepsilon_{pj}g'^{pi}$, $\hat{\varepsilon}^i_j = \varepsilon_{pj}\hat{g}^{pi}$ et $g'^{pi} \neq \hat{g}^{pi}$.

Les déformations qui affectent les corps sont essentiellement décrites par les tenseurs des déformations. Les composantes de ces derniers figurent dans les équations fondamentales du mouvement du milieu continu.

Etat initial et état neutre. Il est clair que les valeurs des déformations à l'instant t dépendent non seulement de l'état considéré du corps mais aussi de l'état par rapport auquel on les calcule. Comment choisir alors ce dernier état si l'on veut obtenir les caractéristiques physiques déterminées d'une déformation? Il est évident que cet état ne peut pas être arbitraire, mais choisi à partir des considérations physiques concrètes. Notons qu'il peut être défini de plusieurs façons que nous n'allons pas préciser maintenant ; nous nous contenterons de nommer état initial un état choisi comme référentiel pour l'état considéré du milieu continu et soulignons une circonstance importante que l'on peut y rencontrer. Cet état initial ne doit pas obligatoirement avoir lieu dans la réalité. On pourrait, par exemple, imaginer un état tel que la structure de chaque élément du milieu continu est ordonnée et l'élément est abandonné à lui-même, c'est-à-dire qu'il n'est soumis à aucune force. Soient

$\overset{\circ}{g}_{ij}$ la métrique de cet état imaginé et $\overset{\circ}{\mathbf{a}}_i$ les vecteurs de base du repère concomitant à l'état initial. Il est clair que la métrique ainsi introduite n'est pas forcément euclidienne. En revanche, le mouvement réel du milieu continu a lieu dans un espace euclidien et, par conséquent, en général dans la réalité le passage de l'état initial à l'état actuel peut ne pas exister. L'état neutre abstrait, hypothétique, permet d'évaluer les modifications de la métrique et d'introduire le tenseur des déformations.

Envisageons un mouvement dans l'espace euclidien bidimensionnel (un plan). Soit une pellicule en mouvement dans un plan. Convenons d'appeler état initial l'état où la pellicule n'est soumise à aucune force. Admettons que la pellicule subit une tension appliquée à son pourtour, ce qui la rend plane. Si la tension se relâche, la pellicule se recroqueville, se ride et, tout en restant bidimensionnelle, cesse d'être plane. Il est possible d'établir une correspondance biunivoque à un instant donné entre les points de la pellicule plane et ceux de la pellicule recroquevillée, ridée (toutes tensions étant supprimées), mais pour ce faire il faut faire intervenir en général un espace tridimensionnel; établir cette correspondance s'avère impossible si l'on reste dans l'espace bidimensionnel en conservant la métrique euclidienne de l'espace. C'est pourquoi l'état détendu, recroquevillé de la pellicule ne peut être considéré, par rapport aux mouvements dans l'espace bidimensionnel euclidien, que comme état neutre. En résumé, si l'on introduit à partir des considérations physiques un certain état primitif réalisable, mentalement ou pratiquement, au moyen de quelques mouvements du milieu continu, cet état se définira comme initial. Au contraire, un état initial irréalisable par aucun mouvement continu du milieu dans le même espace peut être appelé état neutre.

Dans le cas général, les composantes $\overset{\circ}{g}_{ij}$ peuvent dépendre de ξ^1, ξ^2, ξ^3 et de t; si l'état neutre hypothétique est fixé, $\overset{\circ}{g}_{ij}$ peuvent ne dépendre que de ξ^1, ξ^2, ξ^3.

Signification géométrique des composantes covariantes des tenseurs des déformations. Quelle est donc la signification géométrique des composantes covariantes des tenseurs des déformations $\hat{\mathscr{E}}$ et $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$? Ecrivons les composantes des tenseurs métriques sous la forme suivante:

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\mathbf{a}}_i \cdot \hat{\mathbf{a}}_j = |\hat{\mathbf{a}}_i| \cdot |\hat{\mathbf{a}}_j| \cos \psi_{ij}, \tag{5.5}$$

où ψ_{ij} sont les angles entre les vecteurs $\hat{\mathbf{a}}_i$ et $\hat{\mathbf{a}}_j$, et

$$\overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{\mathbf{a}}_i \cdot \overset{\circ}{\mathbf{a}}_j = |\overset{\circ}{\mathbf{a}}_i| \cdot |\overset{\circ}{\mathbf{a}}_j| \cos \overset{\circ}{\psi}_{ij}, \tag{5.6}$$

où $\overset{\circ}{\psi}_{ij}$ sont les angles entre les vecteurs $\overset{\circ}{\partial}_i$ et $\overset{\circ}{\partial}_j$. Ecrivons le rapport

$$\frac{|\hat{\partial}_i|}{|\overset{\circ}{\partial}_i|}=\frac{\left|\frac{\partial r}{\partial \xi^i}\right|}{\left|\frac{\partial r_0}{\partial \xi^i}\right|}=\frac{|dr_i|}{|dr_{0i}|}=\frac{ds_i}{ds_{0i}}=l_i+1, \tag{5.7}$$

ds_i et ds_{0i} désignant les éléments d'arc des deux courbes coordonnées ξ^i et l_i les coefficients des allongements relatifs dans les directions ξ^i. En confrontant (5.7) et (5.5) on obtient

$$\hat{g}_{ij}=|\overset{\circ}{\partial}_i|\cdot|\overset{\circ}{\partial}_j|\,(1+l_i)\,(1+l_j)\cos\psi_{ij}, \tag{5.8}$$

alors que (5.6), (5.8) et (5.4), si l'on prend $\overset{\circ}{g}_{ij}$ pour état initial ou état neutre du milieu continu celui à l'instant t', donnent les formules suivantes :

$$2\varepsilon_{ij}=[(1+l_i)\,(1+l_j)\cos\psi_{ij}-\cos\overset{\circ}{\psi}_{ij}]\,|\overset{\circ}{\partial}_i|\cdot|\overset{\circ}{\partial}_j|, \tag{5.9}$$

qui facilitent l'interprétation géométrique des ε_{ij}.

Commençons par l'interprétation géométrique des ε_{ij} aux indices identiques. (5.9) nous conduit à

$$2\varepsilon_{ii}=[(1+l_i)^2-1]\,\overset{\circ}{g}_{ii}, \tag{5.10}$$

d'où

$$l_i=\sqrt{1+\frac{2\varepsilon_{ii}}{\overset{\circ}{g}_{ii}}}-1. \tag{5.11}$$

Si les déformations sont petites, ε_{ij} le sont également ; en développant (5.11) en série nous obtenons

$$l_i\approx\frac{\varepsilon_{ii}}{\overset{\circ}{g}_{ii}}. \tag{5.12}$$

De plus, si le repère concomitant est choisi cartésien à l'état initial, $\overset{\circ}{g}_{ii}=1$, si bien que

$$l_i\approx\varepsilon_{ii}, \tag{5.13}$$

c'est-à-dire que les composantes covariantes des tenseurs des déformations aux indices identiques, dans le cas de déformations infinitésimales, coïncident avec les coefficients d'allongement relatif le long des axes cartésiens de l'état initial.

Examinons maintenant le cas où les composantes ε_{ij} sont d'indices différents ($i\neq j$). Pour des raisons de commodité choisissons à l'état neutre, en un point donné, un système de coordonnées tel que $\overset{\circ}{\partial}_i$ y soient mutuellement orthogonaux, c'est-à-dire que $\overset{\circ}{\psi}_{ij}=\pi/2$.

Alors, en posant

$$\psi_{ij} = \frac{\pi}{2} - \chi_{ij},$$

on obtient en vertu de (5.5), (5.6) et (5.4)

$$2\varepsilon_{ij} = |\hat{\partial}_i| \cdot |\hat{\partial}_j| \sin \chi_{ij},$$

soit

$$\sin \chi_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{\hat{g}_{ii}}\sqrt{\hat{g}_{jj}}}, \tag{5.14}$$

d'où l'on voit qu'en général les angles droits à l'état neutre ne le sont plus après déformation, les composantes covariantes ε_{ij} aux indices distincts ($i \neq j$) caractérisant le glissement de l'angle des coordonnées, primitivement droit. Si les déformations sont infiniment petites et que le repère soit cartésien à l'état initial, alors $\overset{\circ}{g}_{ii} = 1$ et $\hat{g}_{ii} = 1 + O(\varepsilon)$ (ε étant infiniment petit). En développant en série nous obtiendrons aisément

$$\sin \chi_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}, \tag{5.15}$$

ou

$$\chi_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}. \tag{5.16}$$

Axes principaux des tenseurs des déformations. A tout tenseur symétrique, y compris les tenseurs des déformations, on peut associer la forme quadratique $\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j$. Comme on l'a déjà mentionné au § 4, il existe pour chaque point un repère orthogonal η^1, η^2, η^3 dans lequel la forme quadratique $\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j$ se ramène à la forme suivante :

$$\varepsilon_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j = \varepsilon'_{11}(d\eta^1)^2 + \varepsilon'_{22}(d\eta^2)^2 + \varepsilon'_{33}(d\eta^3)^2. \tag{5.17}$$

La transformation de ξ^i en η^i dépendant des composantes ε_{ij}, en principe, le trièdre orthogonal correspondant η^i sera, lors du mouvement, différent aux différents instants. Soit dans l'espace $\overset{\circ}{g}_{ij}$ le trièdre, η^1, η^2, η^3. Montrons que lors du mouvement il deviendra dans l'espace $\hat{g}_{ij}$ (repère concomitant) un trièdre η^1, η^2, η^3 pour lequel les $\hat{\partial}_i$ sont également orthogonaux. En effet, pour ces axes η^1, η^2, η^3 les composantes ε'_{ij} pour $i \neq j$ sont nulles, ce qui implique, selon (5.14), $\chi_{ij} = 0$, c'est-à-dire que les axes η^1, η^2, η^3 restent orthogonaux. Ainsi, pour les variables η^1, η^2, η^3 les trièdres de coordonnées dans les espaces $\hat{g}_{ij}$ et $\overset{\circ}{g}_{ij}$ coïncident avec les axes principaux $\hat{\mathscr{E}}$ et $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$. Les matrices suivantes s'y diagonalisent simultanément :

$$\|\overset{\circ}{g}_{ij}\|,\ \|\hat{g}_{ij}\|,\ \|\overset{\circ}{g}{}^{ij}\|,\ \|\hat{g}^{ij}\|,\ \|\varepsilon_{ij}\|,\ \|\hat{\varepsilon}^{i\cdot}_{\cdot j}\|,$$
$$\|\hat{\varepsilon}^{ij}\|,\ \|\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{i\cdot}_{\cdot j}\|,\ \|\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{ij}\|.$$

Le trièdre orthogonal formé à l'état initial d'axes principaux reste orthogonal lors du déplacement donné; les angles entre les axes principaux ne glissent pas mais le trièdre lui-même peut se déplacer comme un solide, autrement dit, il peut subir une translation et une rotation. Signalons que les éléments $d\boldsymbol{r}$ pris le long des axes principaux peuvent se contracter ou se détendre lors du mouvement. Notons bien qu'on a introduit la notion d'axes principaux du tenseur des déformations pour le cas des déformations finies arbitraires. Les axes principaux des tenseurs des déformations $\hat{\mathscr{E}}$ et $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ passent, dans les espaces correspondants, par les mêmes points individuels du milieu.

Composantes principales des tenseurs des déformations. Le long des axes principaux η^1, η^2, η^3 d'un tenseur des déformations à l'instant t on a

$$ds_i^2 = \hat{g}_{ii}\,(d\eta^i)^2 \tag{5.18}$$

(pas de sommation sur i), de sorte que dans les axes principaux le carré de la longueur d'un segment $d\boldsymbol{r}$ orienté arbitrairement se présente sous la forme

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2. \tag{5.19}$$

Par analogie, à l'état initial

$$ds_{0i}^2 = \overset{\circ}{g}_{ii}\,(d\eta^i)^2 \tag{5.20}$$

(pas de sommation sur i) et

$$ds_0^2 = ds_{01}^2 + ds_{02}^2 + ds_{03}^2. \tag{5.21}$$

Les segments élémentaires ainsi définis le long des axes principaux ds_i et ds_{0i} peuvent être considérés comme des coordonnées cartésiennes ordinaires au voisinage du point donné, respectivement à l'état donné et à l'état initial (les échelles des coordonnées ds_i aussi bien que celles des ds_{0i} le long des axes principaux distincts sont égales). En ce qui concerne l'espace de l'observateur, les systèmes ds_{01}, ds_{02}, ds_{03} et ds_1, ds_2, ds_3 ne coïncident pas en général.

Partant de (5.18) et (5.20) et compte tenu de la définition des composantes covariantes des tenseurs des déformations (5.4), on obtient sans peine

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\sum_i \frac{\varepsilon'_{ii}}{\hat{g}_{ii}}\,ds_i^2 = 2\sum_i \frac{\varepsilon'_{ii}}{\overset{\circ}{g}_{ii}}\,ds_{0i}^2, \tag{5.22}$$

où le prime de ε'_{ii} montre que les composantes covariantes du tenseur des déformations se rapportent aux axes principaux. Les matrices $\| \overset{\circ}{g}_{ij} \|$ et $\| \hat{g}_{ij} \|$ sont diagonales dans le système d'axes principaux;

sont également diagonales les matrices inverses $\| \overset{\circ}{g}^{ij} \|$ et $\| \hat{g}^{ij} \|$, aussi $\overset{\circ}{g}^{ii} = 1/\overset{\circ}{g}_{ii}$ et $\hat{g}^{ii} = 1/\hat{g}_{ii}$. C'est pourquoi les rapports $\varepsilon'_{ii}/\overset{\circ}{g}_{ii}$ et $\varepsilon'_{ii}/\hat{g}_{ii}$ entrant dans (5.22) sont respectivement $\varepsilon'_{ii}\overset{\circ}{g}^{ii} = \overset{\circ}{\varepsilon}{}^{i}_{i} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{i}$ et $\varepsilon'_{ii}\hat{g}^{ii} = \hat{\varepsilon}^{i}_{i} = \hat{\varepsilon}_{i}$ (pas de sommation sur i dans ces deux expressions) et représentent ainsi les composantes mixtes des tenseurs des déformations dans le système d'axes principaux correspondants. L'expression (5.22) prend maintenant la forme

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\,(\hat{\varepsilon}_1\, ds_1^2 + \hat{\varepsilon}_2\, ds_2^2 + \hat{\varepsilon}_3\, ds_3^2) = \\ = 2\,(\overset{\circ}{\varepsilon}_1\, ds_{01}^2 + \overset{\circ}{\varepsilon}_2\, ds_{02}^2 + \overset{\circ}{\varepsilon}_3\, ds_{03}^2). \tag{5.23}$$

Donc, à chaque point d'un milieu en mouvement s'associe un repère cartésien orthogonal ordinaire (s_{01}, s_{02}, s_{03}) orienté le long des axes principaux du tenseur des déformations qui lors du mouvement se transforme en un repère orthogonal ordinaire également cartésien (s_1, s_2, s_3). La disposition des indices (en bas ou en haut) est sans importance, les repères étant cartésiens orthogonaux. Les composantes correspondantes des tenseurs des déformations $\hat{\varepsilon}_i$ et $\overset{\circ}{\varepsilon}_i$ en constituent les composantes principales.

Relation entre les composantes principales des tenseurs des déformations $\hat{\mathscr{E}}$ et $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$. Les tenseurs des déformations $\hat{\mathscr{E}}$ et $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ ont des composantes principales distinctes, c'est-à-dire que $\hat{\varepsilon}_i \neq \overset{\circ}{\varepsilon}_i$, entre lesquelles existe pourtant une relation à établir. Partant de (5.22) appliquée à la direction $d\boldsymbol{r}_i$ choisie suivant le i-ième axe principal on obtient

$$ds_i^2 - ds_{0i}^2 = 2\hat{\varepsilon}_i\, ds_i^2, \tag{5.24}$$

d'où

$$2\hat{\varepsilon}_i = 1 - \frac{ds_{0i}^2}{ds_i^2}. \tag{5.25}$$

Par analogie

$$ds_i^2 - ds_{0i}^2 = 2\overset{\circ}{\varepsilon}_i\, ds_{0i}^2 \tag{5.26}$$

et

$$2\overset{\circ}{\varepsilon}_i = \frac{ds_i^2}{ds_{0i}^2} - 1. \tag{5.27}$$

Les relations (5.25) et (5.27) montrent, en particulier, que $\overset{\circ}{\varepsilon}_i \neq \hat{\varepsilon}_i$. Ces mêmes relations conduisent à

$$2\hat{\varepsilon}_i = 1 - \frac{1}{1+2\overset{\circ}{\varepsilon}_i} = \frac{2\overset{\circ}{\varepsilon}_i}{1+2\overset{\circ}{\varepsilon}_i}, \tag{5.28}$$

qui donne la relation recherchée entre les composantes principales des tenseurs $\hat{\mathscr{E}}$ et $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$. Relevons encore la liaison entre les coefficients d'allongement relatif le long des axes principaux $l_i = \frac{ds_i - ds_{0i}}{ds_{0i}}$ et les composantes principales des tenseurs des déformations. Il découle de (5.25) que

$$l_i = \sqrt{\frac{1}{1-2\hat{\varepsilon}_i}} - 1, \tag{5.29}$$

de même, (5.27) donne

$$l_i = \sqrt{1+2\overset{\circ}{\varepsilon}_i} - 1. \tag{5.30}$$

Les formules (5.29) et (5.30) sont valables pour les déformations finies. Si les déformations sont infinitésimales, alors les composantes des tenseurs des déformations $\hat{\mathscr{E}}$ et $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ le sont également et le développement en série de (5.29) et (5.30) donne

$$l_i = \hat{\varepsilon}_i = \overset{\circ}{\varepsilon}_i,$$

c'est-à-dire que dans le cas des déformations infinitésimales les coefficients d'allongement relatif le long des axes principaux coïncident aussi bien avec les composantes principales du tenseur des déformations $\hat{\mathscr{E}}$ dans l'espace actuel qu'avec celles de $\overset{\circ}{\mathscr{E}}$ dans l'espace initial.

Méthode de détermination des composantes principales du tenseur. Rappelons maintenant la méthode permettant de trouver les composantes principales des tenseurs des déformations. Pour simplifier, prenons une matrice

$$C = \| c^i_j \| = \| \lambda\delta^i_j - \varepsilon^i_j \|,$$

par laquelle nous figurerons aussi bien la matrice $\| \lambda\delta^i_j - \overset{\circ}{\varepsilon}{}^i_j \|$ que la matrice $\| \lambda\delta^i_j - \hat{\varepsilon}^i_j \|$, λ désigne un certain paramètre numérique. Dans les axes principaux la matrice C s'écrit

$$C^* = \begin{Vmatrix} \lambda-\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\varepsilon_3 \end{Vmatrix}.$$

En égalant Det C^* à zéro, on obtient évidemment une équation cubique par rapport à λ

$$\left.\begin{aligned} &(\lambda-\varepsilon_1)(\lambda-\varepsilon_2)(\lambda-\varepsilon_3) = 0 \\ &\text{qui s'écrit sous la forme dévéloppée} \\ &\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

Les racines λ_1, λ_2, λ_3 de cette équation représentent les composantes principales ε_1, ε_2, ε_3 du tenseur des déformations correspondant. Il en va ainsi pour peu que (5.31) se rapporte au repère principal η^1, η^2, η^3.

Soit un repère arbitraire, non principal, ξ^1, ξ^2, ξ^3 et composons la matrice C. Envisageons la transformation de η^1, η^2, η^3 en ξ^1, ξ^2, ξ^3. Les composantes de la matrice C, étant les différences des composantes de deux tenseurs, sont les composantes d'un tenseur et conformément aux formules de la transformation des composantes mixtes d'un tenseur on obtient

$$C' = \| c_q^p b_p^i a_j^q \| = \mathsf{B} C \mathsf{B}^{-1},$$

d'où l'on voit que Det C' = Det C et par suite l'équation (5.31) ou

$$| \lambda \delta_j^i - \varepsilon_j^i | = 0 \tag{5.32}$$

est invariante par rapport au choix du repère, ses racines déterminant toujours les composantes principales des tenseurs des déformations. Si dans (5.32) on substitue $\hat{\varepsilon}_j^i$ à ε_j^i, l'équation donne les racines $\hat{\varepsilon}_i$; si l'on remplace ε_j^i par $\mathring{\varepsilon}_j^i$ on a les racines $\mathring{\varepsilon}_i$. L'équation (5.32), dite caractéristique ou séculaire, possède toujours comme on le sait, trois racines réelles dans le cas d'un tenseur symétrique. Les coefficients de l'équation séculaire (5.31) sont invariants par transformation des coordonnées puisqu'ils sont entièrement définis par les racines, autrement dit, par les valeurs principales du tenseur des déformations. De (5.31) et (5.32) découlent les formules pour I_1, I_2, I_3 :

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_\alpha^\alpha, \\ I_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\,[(\varepsilon_\alpha^\alpha)^2 - \varepsilon_\beta^\alpha \varepsilon_\alpha^\beta], \\ I_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \mathrm{Det}\,\| \varepsilon_j^i \|. \end{aligned}\right\} \tag{5.33}$$

En résumé, pour déterminer les composantes principales des tenseurs des déformations il faut composer, dans le système de coordonnées donné ξ^1, ξ^2, ξ^3, l'équation séculaire (5.32) aux coefficients (5.33) et trouver ses racines.

Les invariants I_1, I_2, I_3 seront désignés par $\mathring{I}_1$, $\mathring{I}_2$, $\mathring{I}_3$ s'il s'agit du tenseur $\mathring{\mathscr{E}}$ et par $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$, $\hat{I}_3$ pour le cas du tenseur $\hat{\mathscr{E}}$; les premiers s'expriment évidemment au moyen de $\mathring{\varepsilon}_1$, $\mathring{\varepsilon}_2$, $\mathring{\varepsilon}_3$, tandis que les seconds au moyen de $\hat{\varepsilon}_1$, $\hat{\varepsilon}_2$, $\hat{\varepsilon}_3$; comme $\mathring{\varepsilon}_i \neq \hat{\varepsilon}_i$, on a $\mathring{I}_i \neq \hat{I}_i$. Les composantes principales $\mathring{\varepsilon}_i$ et $\hat{\varepsilon}_i$ étant liées entre elles, les invariants $\mathring{I}_i$ et $\hat{I}_i$ le sont également. Dans le cas de la déformation infinitésimale on a $\mathring{\varepsilon}_i = \hat{\varepsilon}_i$ et les invariants $\mathring{I}_i$ et $\hat{I}_i$ coïncident. Si la dé-

formation est finie, on trouve aisément à partir de (5.28) et (5.33) la relation suivante entre les invariants $\mathring{I}_i$ et $\hat{I}_i$:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{I}_1 &= \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3 = \frac{\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 12\mathring{I}_3}{1 + 2\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 8\mathring{I}_3}, \\
\hat{I}_2 &= \hat{\varepsilon}_1\hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_3 + \hat{\varepsilon}_3\hat{\varepsilon}_1 = \frac{\mathring{I}_2 + 6\mathring{I}_3}{1 + 2\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 8\mathring{I}_3}, \\
\hat{I}_3 &= \hat{\varepsilon}_1\hat{\varepsilon}_2\hat{\varepsilon}_3 = \frac{\mathring{I}_3}{1 + 2\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 8\mathring{I}_3}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

Coefficient de la dilatation cubique. La correspondance entre les éléments linéaires ds et ds_0 étant établie pour les états initial et actuel, cherchons maintenant à établir une correspondance entre les volumes élémentaires dans les mêmes états. Prenons dans le système des axes principaux d'un tenseur des déformations un parallélépipède rectangle élémentaire aux arêtes ds_{01}, ds_{02}, ds_{03} correspondant à l'état initial ; son volume dV_0 se définit par la formule $dV_0 = ds_{01}\, ds_{02}\, ds_{03}$. Pendant le mouvement, il lui correspond un parallélépipède rectangle d'arêtes ds_1, ds_2, ds_3 et de volume $dV = ds_1 ds_2 ds_3$. On appelle coefficient de la dilatation cubique θ la variation relative du volume, soit

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0}. \tag{5.35}$$

Compte tenu de (5.26), l'expression (5.35) se ramène à la forme

$$\theta = \sqrt{(1 + 2\mathring{\varepsilon}_1)(1 + 2\mathring{\varepsilon}_2)(1 + 2\mathring{\varepsilon}_3)} - 1, \tag{5.36}$$

tandis que (5.33) permet d'écrire

$$\theta = \sqrt{1 + 2\mathring{I}_1 + 4\mathring{I}_2 + 8\mathring{I}_3} - 1. \tag{5.37}$$

La quantité θ est définie comme une caractéristique géométrique invariante. L'expression (5.37) de θ est valable dans tout système de coordonnées.

De façon analogue, on introduit θ pour les parallélépipèdes élémentaires construits dans n'importe quel repère curviligne. Plus loin on démontrera que le coefficient de la dilatation cubique défini par (5.35) ne dépend pas de la forme du volume primitif dV_0. Il est égal à la variation relative de tout petit volume au voisinage du point donné dans le cas de déformations finies.

Dans le cas de déformations infinitésimales, (5.36) ou (5.37) conduisent à la formule

$$\theta \approx I_1 = \hat{\varepsilon}^i_i \approx \mathring{\varepsilon}^i_i.$$

Ainsi, le premier invariant d'un tenseur des déformations peut être considéré dans le cas de déformations infinitésimales en tant que coefficient de la dilatation cubique.

Calcul des composantes du tenseur des déformations à l'aide de la loi du mouvement. Comment trouver les composantes covariantes d'un tenseur des déformations sachant la loi du mouvement

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t), \quad \xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t), \tag{5.38}$$

$$x_0^i = x_0^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0), \quad \xi_0^i = \xi^i(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t_0) \tag{5.39}$$

et ayant la métrique g_{ij} de l'espace de l'observateur x^1, x^2, x^3? Soulignons que le temps t est considéré comme un paramètre lors du passage du repère concomitant au repère de l'observateur. Si pour l'état initial du milieu on prend celui à l'instant t_0, la transformation du système de coordonnées de l'observateur en celui de Lagrange pour l'état initial est définie par les formules (5.39). Les composantes covariantes du tenseur des déformations sont définies dans le repère concomitant par les relations

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}),$$

où $\hat{g}_{ij}$ est la métrique de l'espace actuel dans le repère concomitant. Comme

$$\hat{g}_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j = g_{pq}\, dx^p\, dx^q,$$

on a

$$\hat{g}_{ij} = g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^q}{\partial \xi^j},$$

si bien que dans le repère concomitant

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^q}{\partial \xi^j} - \overset{\circ}{g}_{ij}\right), \tag{5.40}$$

où les dérivées $\partial x^p/\partial \xi^i$ sont déterminées d'après (5.38). On ne peut rien dire, en général, sur la métrique $\overset{\circ}{g}_{ij}$ de l'espace en état neutre puisqu'elle est introduite à partir de diverses considérations physiques. Toutefois il est possible d'influencer les composantes du tenseur métrique par le choix du repère ξ^1, ξ^2, ξ^3 en état neutre.

Si le passage du système de l'observateur à l'état initial est défini selon (5.39), on aura dans le repère lagrangien de l'état initial

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\hat{g}_{ij} - g_{pq} \frac{\partial x_0^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_0^q}{\partial \xi^j}\right),$$

où $\partial x_0^m/\partial \xi^n$ se définissent par (5.39).

En vertu des formules de la transformation des composantes du tenseur $\hat{\mathscr{E}}$ lors du passage du repère concomitant à celui de l'obser-

vateur, pareillement aux formules (5.40) du repère concomitant, on aura dans le repère de l'observateur

$$\varepsilon_{ij}^{(x^i)} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{pq}\frac{\partial\xi^p}{\partial x^i}\frac{\partial\xi^q}{\partial x^j}\right),$$

où les dérivées $\partial\xi^m/\partial x^n$ se déterminent par (5.38).

Vecteur déplacement. Plaçons-nous dans le cas où l'état initial peut se réaliser et où sa métrique $\overset{\circ}{g}_{ij}$ de même que la métrique $\hat{g}_{ij}$

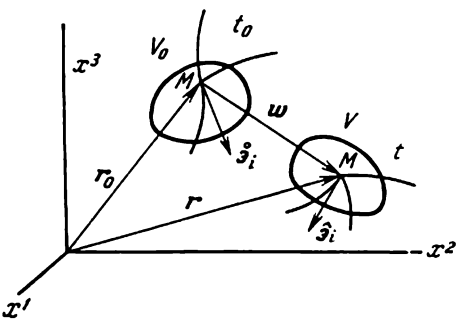


Fig. 12. Vecteur déplacement

est euclidienne. Cela permet d'introduire le vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$ (fig. 12) :

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{w}, \tag{5.41}$$

où $\boldsymbol{r}_0$ et $\boldsymbol{r}$ désignent les rayons vecteurs d'un même point M dans le repère x^1, x^2, x^3 au moment initial t_0 et au moment actuel t respectivement. A l'aide de (5.41) on établit aisément la relation entre les vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{\partial}}_i$ et $\overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_i$ en partant de laquelle on peut écrire les formules de composantes ε_{ij} du tenseur des déformations. La dérivation de (5.41) par rapport à ξ^i donne

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial\xi^i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\xi^i} - \frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial\xi^i} = \hat{\boldsymbol{\partial}}_i - \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_i,$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\partial}}_i &= \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_i + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial\xi^i}, \\ \text{ou encore} \qquad \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_i &= \hat{\boldsymbol{\partial}}_i - \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial\xi^i}, \end{aligned}\right\} \tag{5.42}$$

donc

$$\hat{g}_{ij} = \hat{\boldsymbol{\partial}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{\partial}}_j = \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_i\cdot\overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_j + \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial\xi^j} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_j\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial\xi^i} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial\xi^i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial\xi^j}$$

et

$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{\mathfrak{a}}_i \cdot \mathring{\mathfrak{a}}_j = \hat{\mathfrak{a}}_i \cdot \hat{\mathfrak{a}}_j - \hat{\mathfrak{a}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^j} - \hat{\mathfrak{a}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^j}.$$

Par conséquent

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \mathring{g}_{ij}) = \frac{1}{2}\left[\mathring{\mathfrak{a}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^j} + \mathring{\mathfrak{a}}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^j}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^i} \cdot \hat{\mathfrak{a}}_j + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^j} \cdot \hat{\mathfrak{a}}_i - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^j}\right]. \qquad (5.43)$$

Les formules (5.43) ont une portée générale quelles que soient les coordonnées curvilignes lagrangiennes ξ^1, ξ^2, ξ^3. Remarquons que l'expression (5.43) pour ε_{ij} ne contient que les dérivées premières du vecteur déplacement $\mathbf{w}$ par rapport aux coordonnées ξ^1, ξ^2, ξ^3 qui caractérisent les déplacements relatifs des points du milieu continu.

Sur la dérivation du vecteur et de ses composantes par rapport aux coordonnées. Nous avons obtenu ci-dessus les expressions des composantes ε_{ij} du tenseur des déformations au moyen du vecteur déplacement $\mathbf{w}$. Maintenant exprimons les composantes ε_{ij} du tenseur des déformations par les composantes du vecteur déplacement $\mathbf{w}$. Pour cela il y a lieu d'établir la relation entre la dérivée d'un vecteur et les dérivées de ses composantes.

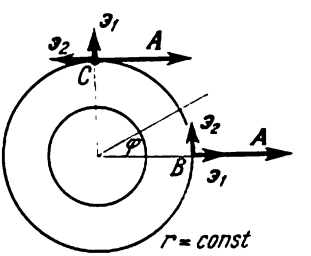


Fig. 13. Système de coordonnées polaires dans le plan

Les dérivées ordinaires des composantes ne définissent évidemment pas les variations du vecteur lui-même, vu que les vecteurs de base changent d'un point de l'espace à l'autre. En effet, soit, par exemple, un système de coordonnées polaires dans un plan où l'on considère le champ du vecteur $\mathbf{A}$ constant dans tous les points du plan en intensité aussi bien qu'en sens. Etant donné que le vecteur $\mathbf{A}$ ne varie pas d'un point du plan à l'autre, sa dérivée ne peut être que nulle. Les coordonnées ξ^1 et ξ^2 sont le rayon r et l'angle φ ; les vecteurs de base ont l'orientation suivante : $\mathfrak{a}_1$ est dirigé le long des rayons issus de l'origine du repère, $\mathfrak{a}_2$ est tangent aux circonférences $r =$ $=$ const. Aux différents points du plan les orientations des vecteurs $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ sont différentes et donc les projections du vecteur constant $\mathbf{A}$ sur les vecteurs de base $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ varient selon les points du plan (cf. par exemple (fig. 13), les points B et C) ; en d'autres termes, les dérivées des composantes d'un vecteur constant ne sont pas nulles.

Dans le système de coordonnées cartésiennes

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(w^k \boldsymbol{\vartheta}_k) = \frac{\partial w^k}{\partial x^i}\boldsymbol{\vartheta}^k,$$

puisque les vecteurs de base $\boldsymbol{\vartheta}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\vartheta}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{\vartheta}_3 = \boldsymbol{k}$ ne varient pas de point en point.

Dérivation covariante des composantes des tenseurs et des vecteurs ; ses propriétés. Les vecteurs de base $\boldsymbol{\vartheta}_i$ étant variables dans un système de coordonnées curvilignes arbitraire η^1, η^2, η^3, nous écrirons par suite

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}\boldsymbol{\vartheta}_k + w^k \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_k}{\partial \eta^i}. \tag{5.44}$$

Il est évident que par définition la dérivée $\partial \boldsymbol{\vartheta}_k/\partial \eta^i$ représente également un vecteur traduisant les propriétés du repère curviligne. Décomposons-le dans la base $\boldsymbol{\vartheta}_j$ en désignant ses composantes par les symboles Γ^j_{ki}:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_k}{\partial \eta^i} = \Gamma^j_{ki}\boldsymbol{\vartheta}_j. \tag{5.45}$$

Les quantités Γ^j_{ki} sont les fonctions des coordonnées *) η^1, η^2, η^3. Elles s'appellent symboles de Christoffel ou coefficients de corrélation. Plus loin on en fera une étude plus détaillée. Compte tenu de (5.45), l'égalité (5.44) prend la forme

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}\boldsymbol{\vartheta}_k + w^k\Gamma^j_{ki}\boldsymbol{\vartheta}_j.$$

Le second terme est une somme sur k et j. Invertissons ici les indices de sommation k et j. Il s'ensuit alors

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}\boldsymbol{\vartheta}_k + w^i\Gamma^k_{ji}\boldsymbol{\vartheta}_k = \left(\frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^j\Gamma^k_{ji}\right)\boldsymbol{\vartheta}_k. \tag{5.46}$$

Les coefficients de $\boldsymbol{\vartheta}_k$, c'est-à-dire $\frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^j\Gamma^k_{ji}$, à deux indices ont une notation spéciale $\nabla_i w^k$; ils sont dits dérivées covariantes des composantes contravariantes du vecteur $\boldsymbol{w}$:

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^j\Gamma^k_{ji}. \tag{5.47}$$

Etablissons les propriétés de $\nabla_i w^k$.

Dans un repère cartésien ($\eta^i = x^i$), étant donné que $\partial \boldsymbol{\vartheta}_k/\partial x^i = 0$, c'est-à-dire que $\Gamma^k_{ji} = 0$, nous avons

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial x^i},$$

*) Dans les espaces euclidien et riemannien elles le sont par définition.

ce qui traduit le fait que la dérivée covariante coïncide avec la dérivée ordinaire des composantes du vecteur par rapport à la coordonnée respective.

Les dérivées covariantes sont les composantes d'un tenseur. En effet, soient ζ^1, ζ^2, ζ^3 et η^1, η^2, η^3 le nouveau et l'ancien systèmes de coordonnées respectivement. Alors

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta^k} = \frac{\partial w}{\partial \eta^i} \frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^k},$$

c'où il s'ensuit que, w étant un invariant, les $\partial w/\partial \eta^i$ se transforment comme les composantes covariantes d'un vecteur. C'est pourquoi

$$T = \frac{\partial w}{\partial \eta^i} \mathbf{a}^i$$

est un invariant ; or, d'après (5.46) et (5.47), on a

$$T = \nabla_i w^k \mathbf{a}_k \mathbf{a}^i,$$

ce qui signifie que T n'est autre que le tenseur du second ordre dont les composantes mixtes sont les dérivées covariantes $\nabla_i w^k$.

Signalons que les dérivées $\partial w^k/\partial \eta^i$ ne sont pas les composantes d'un tenseur. En effet, si l'on remplace les w^k sous le signe de dérivée $\partial/\partial \eta^i$ par leurs expressions dans le nouveau système de coordonnées, soit

$$w^k = w'^j \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^j},$$

on sera obligé de dériver par rapport à η^i également les $\partial \eta^k/\partial \zeta^j$, ce qui ne donnera pas la règle de la transformation tensorielle pour $\partial w^k/\partial \eta^i$.

Il découle manifestement de la définition de la dérivée covariante que les dérivées du scalaire φ coïncident avec les dérivées ordinaires :

$$\nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta^i},$$

déterminant ainsi le vecteur gradient du champ scalaire φ. En tant que caractéristique du champ φ, ce vecteur a fait l'objet d'une analyse antérieure.

Trouvons maintenant la dérivée covariante des composantes contravariantes d'un tenseur. Prenons à titre d'exemple le tenseur du second ordre $H = H^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k$ et procédons aux calculs suivants :

$$\frac{\partial H}{\partial \eta^i} = \frac{\partial H^{jk}}{\partial \eta^i} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k + H^{jk} \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial \eta^i} \mathbf{a}_k + H^{jk} \mathbf{a}_j \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial \eta^i} =$$
$$= \frac{\partial H^{jk}}{\partial \eta^i} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k + H^{jk} \Gamma^l_{ji} \mathbf{a}_l \mathbf{a}_k + H^{ik} \mathbf{a}_j \Gamma^l_{ki} \mathbf{a}_l.$$

Dans la seconde somme permutons les indices de sommation l et j, et dans la troisième l et k, ce qui donne

$$\frac{\partial H}{\partial \eta^i} = \left(\frac{\partial H^{jk}}{\partial \eta^i} + H^{lk}\Gamma^j_{li} + H^{jl}\Gamma^k_{li}\right) \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k = \nabla_i H^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k,$$

où, par définition,

$$\nabla_i H^{jk} = \frac{\partial H^{jk}}{\partial \eta^i} + H^{lk}\Gamma^j_{li} + H^{jl}\Gamma^k_{li}$$

est appelée dérivée covariante des composantes contravariantes du tenseur du second ordre H. On voit sans peine que grâce au tenseur H on peut introduire les tenseurs du troisième ordre conformément aux formules

$$T_1 = \frac{\partial H}{\partial \eta^i} \mathbf{a}^i = \nabla_i H^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \mathbf{a}^i,$$

ou

$$T_2 = \nabla_i H^{jk} \mathbf{a}^i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k,$$

ou

$$T_3 = \nabla_i H^{jk} \mathbf{a}_j \mathbf{a}^i \mathbf{a}_k.$$

Il est évident que les tenseurs T_1, T_2, T_3 sont en général distincts.

En procédant de la même manière on peut construire une dérivée covariante des composantes contravariantes des tenseurs de l'ordre quelconque.

La dérivée covariante étant, par définition, linéaire en composantes du vecteur, la dérivée de la somme des composantes contravariantes est égale à la somme des dérivées covariantes :

$$\nabla_i (v^k + w^k) = \nabla_i v^k + \nabla_i w^k.$$

Montrons que la règle de dérivation d'un produit au sens des covariantes ne diffère en rien de la dérivation au sens ordinaire. Soit à calculer $\nabla_i (v^j w^k)$. Pour ce faire on devra recourir à la règle de la dérivation covariante des composantes contravariantes d'un tenseur, puisque, comme on le sait d'après ce qui précède (§ 4, ch. II), les produits $v^j w^k$ sont les composantes d'un tenseur du second ordre. Ainsi donc

$$\nabla_i (v^j w^k) = \frac{\partial (v^j w^k)}{\partial \eta^i} + v^l w^k \Gamma^j_{li} + v^j w^l \Gamma^k_{li} =$$

$$= \left(\frac{\partial v^j}{\partial \eta^i} + v^l \Gamma^j_{li}\right) w^k + v^j \left(\frac{\partial w^k}{\partial \eta^i} + w^l \Gamma^k_{li}\right) = w^k \nabla_i v^j + v^j \nabla_i w^k,$$

ce qu'il fallait démontrer. On étend de façon analogue la dérivation covariante aux produits d'un nombre arbitraire de facteurs.

Envisageons la dérivation covariante dans le cas où le vecteur est donné par les composantes covariantes et non contravariantes. Soit

$$\mathbf{w} = w_j \mathbf{a}^j$$

et l'on cherche $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i}$. On a

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} \mathbf{a}^j + w_j \frac{\partial \mathbf{a}^j}{\partial \eta^i}. \tag{5.48}$$

Il est évident que $\partial \mathbf{a}^j / \partial \eta^i$ aussi bien que $\partial \mathbf{a}_j / \partial \eta^i$ est un vecteur. Décomposons-le suivant $\mathbf{a}^k$. Pour l'espace euclidien et dans le cas plus général des espaces riemanniens on a la formule suivante:

$$\frac{\partial \mathbf{a}^j}{\partial \eta^i} = -\Gamma^j_{ki} \mathbf{a}^k, \tag{5.49}$$

où Γ^j_{ki} sont les symboles de Christoffel introduits précédemment. Démontrons la validité de (5.49) en considérant le produit scalaire

$$\mathbf{a}^j \cdot \mathbf{a}_k = \delta^j_k$$

vérifié en tous les points de l'espace que nous dérivons par rapport à la coordonnée η^i:

$$\frac{\partial \mathbf{a}^j}{\partial \eta^i} \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{a}^j \cdot (\Gamma^l_{ki} \mathbf{a}_l) = 0.$$

Dans la dernière somme seul le terme où $l = j$ diffère de zéro, donc

$$\frac{\partial \mathbf{a}^j}{\partial \eta^i} \cdot \mathbf{a}_k = -\Gamma^j_{ki}.$$

Cette formule est équivalente à (5.49). L'expression (5.48) compte tenu de (5.49) devient

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} \mathbf{a}^j - w_j \Gamma^j_{ki} \mathbf{a}^k.$$

Après permutation, dans la dernière somme, des indices j et k on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \eta^i} = \left(\frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} - w_k \Gamma^k_{ji} \right) \mathbf{a}^j = \nabla_i w_j \mathbf{a}^j.$$

L'expression $\frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} - w_k \Gamma^k_{ji}$ définit la dérivée covariante des composantes covariantes d'un vecteur:

$$\nabla_i w_j = \frac{\partial w_j}{\partial \eta^i} - w_k \Gamma^k_{ji}.$$

De manière analogue on peut introduire la dérivée covariante des composantes covariantes de n'importe quel tenseur.

Notons que $\nabla_i w_j$ sont les composantes covariantes et $\nabla_i w^j$ les composantes mixtes d'un même tenseur du second ordre

$$T = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \eta^i} \boldsymbol{\vartheta}^i = \nabla_i w_j \boldsymbol{\vartheta}^j \boldsymbol{\vartheta}^i = \nabla_i w^j \boldsymbol{\vartheta}_j \boldsymbol{\vartheta}^i.$$

Il s'ensuit que les composantes du tenseur métrique g_{ij} et g^{ij}, tout en dépendant de η^1, η^2, η^3, doivent se comporter comme constantes lors de la dérivation covariante. Autrement dit, on peut les mettre en facteur ou les placer sous le signe ∇_i sans que le résultat soit modifié. En effet, entre $\nabla_i w^j$ et $\nabla_i w_k$, différentes composantes d'un même tenseur, il existe la relation

$$\nabla_i w^j = g^{jk} \nabla_i w_k, \tag{5.50}$$

mais

$$w^j = g^{jk} w_k, \tag{5.51}$$

par conséquent,

$$\nabla_i (g^{jk} w_k) = g^{jk} \nabla_i w_k,$$

d'où

$$\nabla_i g^{jk} = 0.$$

De même,

$$\nabla_i g_{jk} = 0,$$

si au lieu de (5.50) on prend $\nabla_i w_k = g_{kj} \nabla_i w^j$, et au lieu de (5.51) on écrit $w_k = g_{kj} w^j$.

Propriétés des symboles de Christoffel. Examinons maintenant le problème de calcul des symboles de Christoffel dans l'espace métrique euclidien et étudions leurs propriétés. Remarquons qu'il existe des espaces plus compliqués que les espaces euclidiens et riemanniens où les symboles de Christoffel ne sont pas calculés mais donnés, leur donnée faisant partie de la définition de l'espace.

Les symboles de Christoffel ne sont pas les composantes d'un tenseur quelconque. On s'en aperçoit, par exemple, au fait que dans un même espace ils sont nuls dans un repère cartésien et non nuls dans des repères curvilignes. Il est clair que les composantes d'un tenseur ne possèdent pas une telle propriété.

Dans un espace euclidien les symboles de Christoffel sont symétriques par rapport aux indices inférieurs:

$$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}.$$

Démontrons-le. Dans un espace euclidien il existe toujours un rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ (η^1, η^2, η^3) et $\boldsymbol{\vartheta}_j = \partial \boldsymbol{r} / \partial \eta^j$, de plus

$$\frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_j}{\partial \eta^k} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial \eta^k \partial \eta^j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial \eta^j \partial \eta^k} = \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}_k}{\partial \eta^j}, \tag{5.52}$$

d'où

$$\Gamma^i_{jk}\mathbf{a}_i = \Gamma^i_{kj}\mathbf{a}_i.$$

Etablissons les formules pour calculer les symboles de Christoffel d'après les composantes du tenseur métrique g.

Soit la relation

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} = \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial \eta^k}\cdot \mathbf{a}_s + \frac{\partial \mathbf{a}_s}{\partial \eta^k}\cdot \mathbf{a}_j,$$

on en déduit

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} - \frac{\partial \mathbf{a}_s}{\partial \eta^k}\cdot \mathbf{a}_j = \Gamma^l_{jk}\mathbf{a}_l\cdot \mathbf{a}_s = \Gamma^l_{jk}g_{ls},$$

de même

$$\frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial \mathbf{a}_s}{\partial \eta^j}\cdot \mathbf{a}_k = \Gamma^l_{kj}\mathbf{a}_l\cdot \mathbf{a}_s = \Gamma^l_{kj}g_{ls}.$$

En additionnant ces deux expressions et utilisant la symétrie des symboles de Christoffel en indices inférieurs, l'égalité (5.52) ainsi que le fait que

$$\frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial \eta^s}\cdot \mathbf{a}_j + \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial \eta^s}\cdot \mathbf{a}_k = \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s},$$

on obtiendra

$$\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s} = 2\Gamma^l_{jk}g_{ls}.$$

En contractant la dernière relation avec $\frac{1}{2}g^{si}$, on trouve les formules recherchées

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s}\right). \tag{5.53}$$

Expression du tenseur des déformations en composantes du vecteur déplacement. Revenons maintenant à la formule (5.43) et proposons-nous d'exprimer les composantes du tenseur des déformations en fonctions des composantes du vecteur déplacement. Celui-ci se décompose aussi bien dans la base actuelle $\hat{\mathbf{a}}_i$ que dans la base initiale $\overset{\circ}{\mathbf{a}}_i$, ce qui permet d'introduire deux types de composantes d'un même vecteur $\mathbf{w}$, soit $\hat{w}^k$ et $\overset{\circ}{w}{}^k$:

$$\mathbf{w} = \overset{\circ}{w}{}^k\overset{\circ}{\mathbf{a}}_k = \hat{w}^k\hat{\mathbf{a}}_k.$$

De même on construit deux types de dérivées covariantes:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi^i} = \overset{\circ}{\nabla}_i\overset{\circ}{w}{}^k\overset{\circ}{\mathbf{a}}_k \tag{5.54}$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial \xi^i} = \hat{\nabla}_i \hat{w}^k \hat{\mathbf{a}}_k. \tag{5.55}$$

La première dérivée covariante est calculée dans l'espace initial et les symboles de Christoffel s'obtiennent ici d'après $\overset{\circ}{g}_{ij}$, la deuxième dérivée appartient à l'espace actuel, les symboles de Christoffel y étant calculés à partir de $\hat{g}_{ij}$. En portant (5.54) dans la première égalité de (5.43) on aura

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left[(\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{w}^k)\overset{\circ}{g}_{kj} + (\overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{w}^k)\overset{\circ}{g}_{ki} + (\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{w}^k \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{w}^l)\overset{\circ}{g}_{kl}\right].$$

Etant donné qu'on peut placer les composantes du tenseur métrique sous le signe de la dérivée covariante sans en changer le résultat, on a

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left[\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{w}_j + \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{w}_i + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{w}_k \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{w}^k\right]. \tag{5.56}$$

On obtient de façon analogue en partant de (5.55) et de la seconde égalité de (5.43)

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left[\hat{\nabla}_i \hat{w}_j + \hat{\nabla}_j \hat{w}_i - \hat{\nabla}_i \hat{w}_k \hat{\nabla}_j \hat{w}^k\right]. \tag{5.57}$$

En cas de déformations infinitésimales on est conduit, aux termes quadratiques en $|\boldsymbol{w}|$ près, à

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{w}_j + \overset{\circ}{\nabla}_j \overset{\circ}{w}_i) = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}_i \hat{w}_j + \hat{\nabla}_j \hat{w}_i). \tag{5.58}$$

Les ε_{ij} coïncident manifestement avec les composantes du tenseur symétrisé $\nabla_i w_j \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j$. Dans un repère cartésien

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_j}{\partial x^i} + \frac{\partial w_i}{\partial x^j}\right). \tag{5.59}$$

Soulignons que les formules (5.43) et (5.56) des composantes du tenseur des déformations ne sont vérifiées que si, et seulement si, l'on peut définir un vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$ pour tous les points du milieu mobile, tandis que le tenseur des déformations et ses composantes se déterminent d'après les métriques ds^2 et ds_0^2 au moyen des formules (5.4) ou (5.40), que le vecteur déplacement existe ou non.

Sur l'existence des équations de compatibilité. Le tenseur des déformations a neuf composantes dont six seulement sont distinctes en raison de la symétrie des ε_{ij}. Si les déplacements $\boldsymbol{w}$ ont lieu, ces six composantes ε_{ij} s'expriment selon (5.56), en chaque point donné, au moyen de neuf dérivées $\partial w_i/\partial \xi^j$ et, par conséquent, peuvent être, dans un point donné de l'espace, des nombres arbitraires. Toutefois les ε_{ij} ne sauraient être les fonctions arbitraires des points de l'espace ξ^1, ξ^2, ξ^3, car ces mêmes six fonctions ε_{ij} de ξ^1, ξ^2, ξ^3 s'expriment au

moyen des dérivées de trois fonctions w_i de ξ^1, ξ^2, ξ^3 seulement. On voit donc que les ε_{ij} doivent satisfaire à certaines équations dites équations de compatibilité des déformations.

Celles-ci n'existent que s'il existe le vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$, c'est-à-dire quand les deux espaces, actuel et initial, sont euclidiens. Examinons d'abord à quelles conditions un espace est euclidien.

Formules de transformation des symboles de Christoffel. On sait que les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k ne sont les composantes d'aucun tenseur. Ils forment une étendue de 27 grandeurs dans un espace tridimensionnel. Les symboles de Christoffel sont liés aux composantes du tenseur métrique par les formules

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right), \tag{5.53a}$$

qui ont été obtenues précédemment pour l'espace euclidien et sont valables, par définition, dans l'espace riemannien.

Trouvons les formules de transformation des symboles de Christoffel lors du changement de repère. Désignons par $\Gamma_{ij}^{\prime k}$ le symbole de Christoffel dans le repère η^i et par Γ_{ij}^k celui dans le repère ξ^i. On a de toute évidence

$$\mathfrak{e}_i' = \mathfrak{e}_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i};$$

en dérivant cette égalité par rapport à η^j et compte tenu de ce que

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_i'}{\partial \eta^j} = \Gamma_{ij}^{\prime\alpha} \mathfrak{e}_\alpha', \qquad \frac{\partial \mathfrak{e}_\alpha}{\partial \xi^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\omega \mathfrak{e}_\omega = \Gamma_{\alpha\beta}^\omega \frac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\omega} \mathfrak{e}_\gamma',$$

puisque $\mathfrak{e}_\omega = \dfrac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\omega} \mathfrak{e}_\gamma'$, on aura

$$\Gamma_{ij}^{\prime\alpha} \mathfrak{e}_\alpha' = \left[\Gamma_{\alpha\beta}^\omega \frac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\omega} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^2 \xi^\omega}{\partial \eta^i \partial \eta^j} \frac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\omega} \right] \mathfrak{e}_\gamma'.$$

En faisant le produit scalaire des deux membres de cette égalité par $\mathfrak{e}'^\gamma$, on obtient les formules recherchées *)

$$\Gamma_{ij}^{\prime\gamma} = \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\omega \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^2 \xi^\omega}{\partial \eta^i \partial \eta^j} \right) \frac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\omega}.$$

Les équations qui définissent le système de coordonnées où $\Gamma_{ij}^k = 0$. Peut-on trouver un système de coordonnées η^i tel que tous les $\Gamma_{ij}^{\prime\gamma}$

*) Les formules de transformation trouvées ainsi que les conditions (5.60) sont indépendantes des définitions (5.53a), n'étant conséquence que des formules (4.5) et (5.45) écrites dans les systèmes de coordonnées initial et nouvel.

se réduisent à zéro? L'espace euclidien permet d'introduire un repère cartésien unique pour tout l'espace où les g_{lk} = const, donc, tous les $\Gamma'^{\gamma}_{ij} = 0$ en tout point de l'espace. Il n'en est pas ainsi pour l'espace riemannien. Ecrivons les équations donnant un système de coordonnées où tous les symboles de Christoffel sont nuls. Vu que Det $\left\| \frac{\partial \eta^{\gamma}}{\partial \xi^{\omega}} \right\| \neq$ $\neq 0$, tous les Γ'^{γ}_{ij} ne se réduisent à zéro que si, et seulement si, les égalités suivantes sont vérifiées:

$$\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^{i}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^{j}} + \frac{\partial^2 \xi^{\omega}}{\partial \eta^{i} \partial \eta^{j}} = 0 \qquad (\omega,\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3). \quad (5.60)$$

Dans un espace riemannien ces égalités peuvent être satisfaites en un point donné, c'est-à-dire qu'on peut toujours introduire les coordonnées nouvelles η^i telles qu'en un point donné η^i_0, homologue à ξ^i_0, tous les $\Gamma'^{\gamma}_{ij} = 0$. Pour cela il suffit évidemment de poser

$$\xi^{\omega} - \xi^{\omega}_0 = \delta^{\omega}_s (\eta^s - \eta^s_0) - \frac{1}{2} \Gamma^{\omega}_{0\alpha\beta} (\eta^{\alpha} - \eta^{\alpha}_0)(\eta^{\beta} - \eta^{\beta}_0) + \ldots$$

Condition pour qu'un espace soit euclidien. Si l'on exige que toutes les égalités (5.60) soient remplies dans tout l'espace, c'est-à-dire que l'espace soit euclidien, ces égalités formeront un système d'équations différentielles définissant la transformation du repère ξ^i en repère cartésien η^i dans tout l'espace. Ce système n'est pas intégrable dans le cas général. La condition stipulant le caractère euclidien de l'espace coïncide avec la condition d'intégrabilité du système d'équations différentielles (5.60). Ecrivons ces conditions. Dans ce but dérivons (5.60) par rapport à η^k et éliminons les dérivées secondes de l'égalité obtenue à l'aide de (5.60). On a

$$\left(\frac{\partial \Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}}{\partial \xi^{s}} - \Gamma^{\omega}_{\lambda\beta} \Gamma^{\lambda}_{\alpha s} - \Gamma^{\omega}_{\alpha\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\beta s} \right) \frac{\partial \xi^{s}}{\partial \eta^{k}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^{i}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^{j}} + \frac{\partial^3 \xi^{\omega}}{\partial \eta^{i} \partial \eta^{j} \partial \eta^{k}} = 0.$$

En permutant les indices de sommation s et β ainsi que k et j, compte tenu de la symétrie des symboles de Christoffel en indices inférieurs, on obtient d'autres égalités analogues

$$\left(\frac{\partial \Gamma^{\omega}_{\alpha s}}{\partial \xi^{\beta}} - \Gamma^{\omega}_{\lambda s} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\omega}_{\alpha\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\beta s} \right) \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \eta^{j}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \eta^{i}} \frac{\partial \xi^{s}}{\partial \eta^{k}} + \frac{\partial^3 \xi^{\omega}}{\partial \eta^{i} \partial \eta^{k} \partial \eta^{j}} = 0.$$

Eliminons par soustraction des égalités correspondantes les dérivées troisièmes. Compte tenu encore de ce que le déterminant de la transformation de ξ^i en η^i doit différer de zéro nous obtenons les

conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité du système (5.60) sous la forme suivante *) :

$$R_{\beta\varepsilon\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\omega} = \frac{\partial\Gamma^{\omega}_{\alpha\beta}}{\partial\xi^{\varepsilon}} - \frac{\partial\Gamma^{\omega}_{\alpha\varepsilon}}{\partial\xi^{\beta}} + \Gamma^{\omega}_{\lambda\varepsilon}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\omega}_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\varepsilon} = 0. \tag{5.61}$$

Dans un espace euclidien ces égalités sont vérifiées quel que soit le repère. Si l'espace n'est pas euclidien les égalités (5.61) ne sont pas satisfaites.

Construction des coordonnées pour lesquelles $\Gamma'^{\gamma}_{ij} = 0$ en tous les points d'une courbe donnée. Pour démontrer cette proposition intéressante et très utile il suffit d'indiquer la méthode de construction d'un système de coordonnées ζ^i pour lequel en tous les points d'une courbe donnée arbitraire C se vérifient des égalités

$$\Gamma'^{\gamma}_{ij} = 0. \tag{A}$$

Si l'espace est euclidien, on obtient, en introduisant le système de coordonnées cartésiennes, que les égalités (A) sont vérifiées non seulement sur la courbe C mais en tous les points de l'espace.

Par conséquent, la vérification des égalités (A) le long de C doit être démontrée seulement dans le cas d'un espace riemannien, où les composantes du tenseur $R_{\beta\varepsilon\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\omega}$ ne sont pas toutes nulles (voir la définition (5.61)).

Dans l'espace riemannien n-dimensionnel il est impossible de satisfaire aux égalités (A) exactes en tous les points d'un volume infinitésimal ou sur les éléments arbitraires d'une surface de dimension supérieure à l'unité.

On pose que les équations de la courbe C dans le système de coordonnées initial x^i ont la forme

$$x^{\alpha} = \varphi^{\alpha}(x^1), \qquad \alpha = 2, 3, \ldots, n,$$
$$\xi^1 = x^1,$$

et l'on admet que les fonctions $\varphi^{\alpha}(x^1)$ sont définies pour tous les x^1 dans les intervalles convenables. En transformant les coordonnées

$$\xi^2 = x^2 - \varphi^2(x^1),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi^n = x^n - \varphi^n(x^1)$$

*) La structure indicielle correspond aux signes des composantes $R_{\beta\varepsilon\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\omega}$ utilisés par H. Weyl dans son livre *Space-Time-Matter*, 1922, repris ensuite par un grand nombre d'auteurs dans les manuels et les ouvrages scientifiques.

on obtient que l'équation de la courbe C dans le système de coordonnées ξ^i s'écrit

$$\xi^2 = \xi^3 = \ldots = \xi^n = 0, \quad \text{où} \quad \xi^1 \quad \text{est variable.}$$

On voit que dans le système ξ^i la courbe C se confond avec la courbe coordonnée ξ^1.

La transformation des symboles de Christoffel peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^\gamma} \Gamma'^{\gamma}_{ij} = \Gamma^k_{pq} \frac{\partial \xi^p}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^q}{\partial \eta^j} + \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial \eta^i \partial \eta^j}.$$

On déduit de $\left|\frac{\partial \xi^k}{\partial \eta^\gamma}\right| \neq 0$ que, si pour tous les $k = 1, 2, \ldots, n$ et pour les indices fixés i et j est vraie l'égalité (5.60), il est également vrai que

$$\Gamma'^k_{ij} = 0 \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Envisageons d'abord la transformation des ξ^i en η^i qui conduit aux égalités $\Gamma'^k_{ij} = 0$ vraies pour tous les k et tous les i, j, sauf pour $i = j = 1$. Vérifions que

$$\xi^1 = \eta^1 + b^1_\alpha \eta^\alpha - \frac{1}{2} [b^\nu_\varkappa b^\mu_\chi \Gamma^1_{\nu\mu} + (b^1_\varkappa b^\mu_\chi + b^1_\chi b^\mu_\varkappa) \Gamma^1_{\mu 1} + \\ + b^1_\varkappa b^1_\chi \Gamma^1_{11}] \eta^\varkappa \eta^\chi + F^1, \tag{B}$$

$$\xi^\alpha = b^\alpha_\varkappa \eta^\varkappa - \frac{1}{2} [b^\nu_\varkappa b^\mu_\chi \Gamma^\alpha_{\nu\mu} + (b^1_\varkappa b^\mu_\chi + b^1_\chi b^\mu_\varkappa) \Gamma^\alpha_{\mu 1} + b^1_\varkappa b^1_\chi \Gamma^\alpha_{11}] \eta^\varkappa \eta^\chi + F^\alpha.$$

$\varkappa$, χ, ν, μ et α y prennent les valeurs $2, 3, \ldots, n$; $b^1_\beta(\eta^1)$ et $b^\alpha_\beta(\eta^1)$ (det $| b^\alpha_\beta | \neq 0$) sont fonctions de η^1; de plus F^1 et F^α sont des fonctions quelconques de η^1 et de η^α tendant vers zéro comme des infiniment petits de l'ordre supérieur à deux en η^α lorsque η^α tend vers zéro. Il est évident que sur la courbe C sont vraies les égalités

$$\eta^2 = \eta^3 = \ldots = \eta^n = 0, \qquad \xi^1 = \eta^1.$$

Dans les formules (B) les grandeurs $\Gamma^k_{ij}(\xi^i)$ peuvent être identifiées à leurs valeurs $\Gamma^k_{ij}(\eta^1)$ sur la courbe C. En substituant $\xi^i(\eta^k)$ de (B) dans les conditions (5.60) on obtient les équations pour les fonctions $b^1_\beta(\eta^1)$ et $b^\alpha_\beta(\eta^1)$.

Récrivons d'abord les conditions (5.60) sous la forme

$$\frac{\partial^2 \xi^k}{\partial \eta^i \partial \eta^j} = -\Gamma^k_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \eta^i} - \Gamma^k_{1\mu} \frac{\partial \xi^1}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \eta^j} - \\ - \Gamma^k_{\mu 1} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^1}{\partial \eta^j} - \Gamma^k_{11} \frac{\partial \xi^1}{\partial \eta^i} \frac{\partial \xi^1}{\partial \eta^j}.$$

Il découle des formules (B) que sur la courbe C ont lieu les égalités suivantes :

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial \eta^1} = 1\,; \quad \frac{\partial \xi^1}{\partial \eta^\varkappa} = b^1_\varkappa\,; \quad \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial \eta^{12}} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial \eta^1 \partial \eta^\varkappa} = \frac{db^1_\varkappa}{d\eta^1}\,;$$

$$\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial \eta^\varkappa \partial \eta^\chi} = -[b^\nu_\varkappa b^\mu_\chi \Gamma^1_{\nu\mu} + (b^1_\varkappa b^\mu_\chi + b^1_\chi b^\mu_\varkappa)\,\Gamma^1_{\mu 1} + b^1_\varkappa b^1_\chi \Gamma^1_{11}]\,;$$

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^1} = 0\,; \quad \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^\varkappa} = b^\alpha_\varkappa\,; \quad \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \eta^{12}} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \eta^\varkappa \partial \eta^1} = \frac{db^\alpha_\varkappa}{d\eta^1}\,;$$

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \eta^\varkappa \partial \eta^\chi} = -[b^\nu_\varkappa b^\mu_\chi \Gamma^\alpha_{\nu\mu} + (b^1_\varkappa b^\mu_\chi + b^1_\chi b^\mu_\varkappa)\,\Gamma^\alpha_{\mu 1} + b^1_\varkappa b^1_\chi \Gamma^\alpha_{11}].$$

En mettant ces valeurs des dérivées sur C dans (5.60) on parvient au résultat suivant : pour $k = \alpha$, $i = \varkappa$, $j = \chi$ les relations (5.60) sont identiquement satisfaites. Pour $k = i = 1$ et $j = \varkappa$ ou $k = j = 1$ et $i = \varkappa$ on a

$$\frac{db^1_\varkappa}{d\eta^1} = -\Gamma^1_{1\mu} b^\mu_\varkappa.$$

Pour $k = \alpha$, $i = 1$, $j = \varkappa$ ou $k = \alpha$, $i = \varkappa$, $j = 1$ on obtient

$$\frac{db^\alpha_\varkappa}{d\eta^1} = -\Gamma^\alpha_{1\mu} b^\mu_\varkappa.$$

Ayant défini $b^1_\varkappa$ et $b^\alpha_\varkappa$ par intégration des équations différentielles obtenues, on aboutit moyennant les formules (B) à une grande variété de transformations réduisant à zéro dans les variables η^i tous les symboles Γ'^k_{ij} sur la courbe C, à l'exception peut-être des symboles Γ'^k_{11}, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Pour une transformation du système η^i en système ζ^k dans lequel tous les symboles $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ sur la courbe C se réduisent à zéro, les équations (5.60) sur la courbe C ont maintenant la forme

$$\Gamma'^k_{11} \frac{\partial \eta^1}{\partial \zeta^i} \frac{\partial \eta^1}{\partial \zeta^j} + \frac{\partial^2 \eta^k}{\partial \zeta^i \partial \zeta^j} = 0. \tag{5.60'}$$

Pour obtenir les transformations satisfaisant à (5.60'), on pose

$$\eta^1 = f(\zeta^1),$$
$$\eta^\alpha = g^\alpha(\zeta^1) + \zeta^\alpha.$$

Pour $i \neq 1$ ou $j \neq 1$ les équations (5.60') sont identiquement satisfaites. Pour $i = j = 1$ on a

$$\Gamma'^1_{11} f'^2 + f'' = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma'^\alpha_{11} f'^2 + g''^\alpha = 0.$$

En remplaçant dans $\Gamma'^k_{11}(\eta^1)$ l'argument η^1 par $f(\zeta^1)$ on obtient par intégration de ces équations la transformation définitive qui résout le problème. La transformation générale de x^i en ζ^i s'obtient par combinaisons successives des transformations particulières indiquées plus haut.

Notons que le résultat obtenu n'est pas lié aux formules (5.53a) ni, partant, à la métrique de l'espace; n'y sont essentielles que la symétrie $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ et les formules de transformation des symboles Γ^k_{ij}.

Dans le système de coordonnées ζ^i, pour tout tenseur sur la courbe C toutes les dérivées covariantes premières se confondent, évidemment, avec les dérivées ordinaires.

Les conditions de la constance d'un tenseur le long de la courbe C se ramènent à la constance de ses composantes dans le système de coordonnées ζ^i.

Si la courbe C est fermée ou possède des points crunodaux, les valeurs des coordonnées ζ^k et les vecteurs de base $\mathbf{a}_k(\zeta^i)$ après le parcours de C et le retour au point de départ ou au point d'intersection seront, en général, différents. Il est évident que dans ce cas les vecteurs et tenseurs constants, ayant les mêmes composantes dans le système ζ^k sur la courbe fermée C, ne seront plus égaux, après le retour, aux vecteurs et tenseurs primitifs correspondants. Il en découle également que deux tenseurs égaux en un point M ne le seront pas, en général, en un autre point N, atteint suivant les courbes différentes. On peut montrer que ces résultats sont essentiellement liés aux propriétés non euclidiennes de l'espace.

Dans un espace riemannien, pour un tenseur métrique on a toujours l'égalité $\nabla_k g_{ij} = 0$. Dans le système de coordonnées ζ^k le long de C on a $\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial \zeta^k} = 0$ et, donc, sur C, en coordonnées ζ^k, on a $g_{ij}(\zeta^k) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \text{const}$, d'où il découle que les vecteurs de base $\mathbf{a}_i(\zeta^k)$ et $\mathbf{a}^i(\zeta^k)$ aux points de C forment un système invariable qui, lors du déplacement le long de C, ne peut que tourner, tel un corps rigide.

En partant des transformations générales des symboles $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ il est aisé de voir que toute transformation linéaire

$$\zeta'^i = a^i_k \zeta^k,$$

où a^i_k sont des coefficients constants, annule également les symboles $\tilde{\tilde{\Gamma}}^k_{ij}$ sur la courbe C en coordonnées ζ'^i. Par un choix convenable des coefficients réels a^i_k on peut vérifier sur la courbe C dans le système ζ'^i les égalités suivantes : $g_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $g_{ii} = \pm 1$ (les signes sont définis par la signature de la métrique). L'orientation du système correspondant de vecteurs de base ne peut être donnée arbitrairement, en général, que dans un point quelconque donné de la courbe C.

Tenseur de Riemann-Christoffel. Dans le cas général d'un espace riemannien les quantités $R^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\beta\gamma\mu\cdot}$ ainsi définies peuvent être considérées comme les composantes d'un tenseur du quatrième ordre. Pour le démontrer prenons un vecteur dérivable $\mathbf{a}$ et considérons les

deux tenseurs suivants:

$$T = \nabla_j \nabla_i a^\alpha \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^j \quad \text{et} \quad T^* = \nabla_i \nabla_j a^\alpha \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^j.$$

Il est manifeste qu'en général $T \neq T^*$. Le calcul direct de la différence $T - T^*$ donne

$$T - T^* = R_{ij\mu\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} a^\mu \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^j.$$

Vu que $T - T^*$ est un tenseur et a un vecteur quelconque, les quantités $R_{ij\mu\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}$ doivent se transformer comme les composantes d'un tenseur du quatrième ordre. Ce tenseur est appelé tenseur de Riemann-Christoffel.

Pour l'espace euclidien le tenseur de Riemann-Christoffel est identiquement nul et le *résultat d'une dérivation covariante répétée dans l'espace euclidien ne dépend pas de l'ordre de l'opération* *).

Expression des composantes du tenseur de Riemann-Christoffel en composantes d'un tenseur métrique. Les composantes purement covariantes du tenseur de Riemann-Christoffel sont de la forme

$$R_{ij\mu\nu} = g_{\alpha\nu} R_{ij\mu\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu i}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu j}}{\partial \xi^i} + g^{\alpha\omega} [\Gamma_{\omega\mu j} \Gamma_{\alpha\nu i} - \Gamma_{\omega\mu i} \Gamma_{\alpha\nu j}], \tag{5.61'}$$

où, conformément à (5.53a),

$$\Gamma_{\nu\alpha j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{j\nu}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial \xi^\nu} \right].$$

En tout point donné, on peut trouver un repère x^i tel que $\Gamma_{\nu\alpha j} = 0$. Cependant les dérivées de $\Gamma_{\nu\alpha j}$ diffèrent de zéro dans un espace non euclidien, ce qui permet toujours d'écrire pour les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel dans ce repère x^i la formule suivante:

$$R_{ij\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\nu i}}{\partial x^j \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu j}}{\partial x^i \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu i}}{\partial x^j \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu j}}{\partial x^i \partial x^\mu} \right].$$

Symétrie des composantes du tenseur de Riemann-Christoffel. A l'aide de la formule précédente on énonce les propriétés suivantes de la symétrie qui sont vérifiées dans tout repère et en tout point de l'espace d'après les propriétés des transformations tensorielles

$$R_{ij\mu\nu} = -R_{ji\mu\nu}, \qquad R_{ii\mu\nu} = 0, \qquad R_{ij\mu\nu} = -R_{ij\nu\mu}, \qquad R_{ij\nu\nu} = 0,$$
$$R_{ij\mu\nu} = R_{\mu\nu ij}, \qquad R_{ij\mu\nu} + R_{\mu ij\nu} + R_{j\mu i\nu} = 0.$$

Remarquons que les propriétés de symétrie indiquées ici ne sont pas toutes indépendantes entre elles.

*) Pour éclaircir la situation il serait utile de considérer les égalités

$$T = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial a}{\partial x^i} \mathfrak{e}^i \right) \mathfrak{e}^j = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial a}{\partial x^j} \mathfrak{e}^j \right) \mathfrak{e}^i = \nabla_j \nabla_i a^\alpha \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^j,$$

pourtant, pour des espaces riemanniens on a

$$T \neq T^* = \nabla_j \nabla_i a^\alpha \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{e}^j \mathfrak{e}^i = \nabla_i \nabla_j a^\alpha \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^j.$$

Le nombre des composantes indépendantes du tenseur de Riemann-Christoffel pour $n = 3$. Dans un espace tridimensionnel ($n = 3$) le tenseur de Riemann-Christoffel n'a que six composantes indépendantes qui peuvent être non nulles dans le cas général d'un espace riemannien. Ce sont, notamment, les composantes suivantes:

$$R_{1212},\quad R_{1313},\quad R_{2323},$$
$$R_{1213},\quad R_{2123},\quad R_{3132}. \tag{5.62}$$

Pour écrire ces composantes on s'est guidé des considérations suivantes. Conformément aux propriétés de symétrie ci-dessus, $R_{iiii} = 0$. Si parmi les indices il n'y a que deux distincts, alors pour deux indices fixés toutes les composantes s'expriment au moyen d'une seule. Ainsi, pour $n = 3$ et deux indices distincts il n'y a que trois composantes indépendantes, par exemple, celles de la première ligne de (5.62). Si trois indices sont distincts, pour $n = 3$ parmi les quatre indices des composantes deux sont toujours identiques. Ces indices égaux pour les composantes non nulles doivent appartenir à des couples différents. On peut les supposer disposés à la première et la troisième place. Pour des indices égaux fixés on n'a qu'une seule composante R_{ijik} indépendante. Il y en a en tout trois. Elles sont toutes écrites dans la deuxième ligne de (5.62).

L'espace est euclidien pourvu que le tenseur de Riemann-Christoffel soit égal à zéro. La condition d'annulation du tenseur de Riemann-Christoffel qui est en même temps celle du caractère euclidien de l'espace est traduite par six équations qui s'obtiennent en égalant à zéro six composantes, par exemple (5.62).

Equations de compatibilité des déformations. Les composantes du tenseur des déformations se déterminent par les relations

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}.$$

Si le vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$ existe, les deux formes quadratiques

$$ds^2 = \hat{g}_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta \quad \text{et} \quad ds_0^2 = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta$$

donnent le carré de l'élément de longueur dans un espace euclidien. C'est pourquoi les tenseurs de Riemann-Christoffel dans le cas des tenseurs fondamentaux $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ et $\hat{g}_{\alpha\beta}$ doivent se réduire à zéro. Ce qui conduit aux équations

$$\overset{\circ}{R}_{ij\mu\nu} = 0 \quad \text{et} \quad \hat{R}_{ij\mu\nu} = 0. \tag{5.63}$$

L'une des bases de coordonnées $\overset{\circ}{\mathbf{a}}_i$ ou $\hat{\mathbf{a}}_i$ peut être choisie arbitrairement, l'autre se déterminant ensuite complètement par les déplacements. Par conséquent, parmi les équations (5.63) les unes sont satisfaites automatiquement par le choix de la base de coordonnées dans un espace euclidien, les autres peuvent être considérées comme

équations pour les composantes du tenseur des déformations. Ces dernières s'appellent équations de compatibilité des déformations. Leur forme développée s'écrit sans peine à l'aide des formules (5.61'). En particulier, si l'on se donne à l'état actuel déformé un repère cartésien rectiligne (non orthogonal, en général), on a $\partial \hat{g}_{\alpha\beta}/\partial \xi^j = 0$ si bien que les équations de compatibilité $\mathring{R}_{ij\mu\nu} = 0$ se mettent sous la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} + \\ &\quad + \mathring{g}^{\alpha\omega} [G_{\omega\mu j} G_{\alpha\nu i} - G_{\omega\mu i} G_{\alpha\nu j}] = 0, \\ \text{où} \quad &G_{\nu\alpha j} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\nu}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial \varepsilon_{j\nu}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial \varepsilon_{\alpha j}}{\partial \xi^\nu}, \end{aligned}\right\} \tag{5.63a}$$

et $\mathring{g}^{\alpha\omega}$ se déterminent comme composantes de la matrice inverse de la matrice de composantes $\hat{g}_{\alpha\omega} - 2\varepsilon_{\alpha\omega}$:

$$\| \mathring{g}^{\alpha\omega} \| = \| \hat{g}_{\alpha\omega} - 2\varepsilon_{\alpha\omega} \|^{-1}.$$

Les équations de compatibilité $\hat{R}_{ij\mu\nu} = 0$ s'écrivent de la même façon si, à l'état initial, le repère lagrangien est rectiligne et $\mathring{g}_{\alpha\beta} = \text{const}$.

Les équations (5.63a) représentent pour six fonctions $\varepsilon_{\alpha\beta}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ des équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre, linéaires en dérivées secondes et non linéaires en dérivées premières.

Pour toutes les valeurs des indices i, j, μ, ν de l'ensemble 1, 2, 3 le système (5.63a) ne contient que six équations indépendantes. Il est clair que les formules (5.57) donnant ε_{ij} à l'aide de w_α sont l'intégrale générale du système des équations de compatibilité (5.63a).

Equations de compatibilité dans le cas où les déformations sont infinitésimales. Dans le cas où les déformations sont infiniment petites, les équations de compatibilité (5.63a) acquièrent la forme suivante:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0 \tag{5.63b}$$

et s'appellent équations de compatibilité de Saint-Venant. Par substitution d ireccte des formules (5.58) dans les équations (5.63b) on peut vérifier que les premières sont l'intégrale générale des secondes pour trois fonctions arbitraires w_α.

Les équations de compatibilité (5.63b) représentent en cas des déformations infinitésimales six équations différentielles linéaires indépendantes aux dérivées partielles secondes en ε_{ij}.

En résumé, dans le cas où l'on peut relier l'état initial avec l'état actuel par un vecteur déplacement w, les équations de compatibilité doivent être satisfaites, de plus les expressions de ε_{ij} en fonction des composantes de w peuvent être considérées comme solutions générales de ces équations.

Analysons maintenant plus en détail la géométrie de la déformation d'un milieu continu lors du déplacement.

Transformation lors du déplacement d'un solide parfait. Commençons par l'étude du déplacement d'un solide parfait. Soient (fig. 14) I et II deux positions quelconques et soient M et M' deux positions

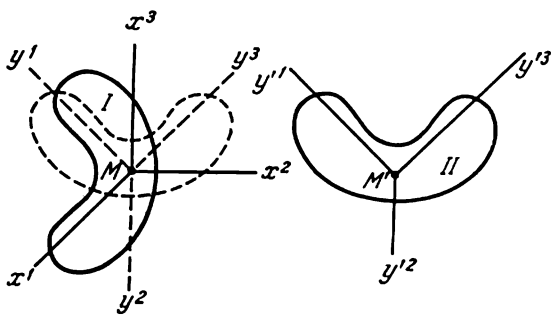


Fig. 14. Transformation lors du déplacement d'un solide parfait

d'un même point du solide. On peut amener M' en M par translation. Comme on sait, le déplacement au cours duquel un point M du solide est immobile est une simple rotation autour d'un axe passant par ce point M.

Prenons dans la position I un système d'axes x^1, x^2, x^3 figés dans le corps d'origine en M qui devient dans la position II le système y'^1, y'^2, y'^3 d'origine en M' (fig. 14). Désignons par y^1, y^2, y^3 la position des axes après la translation de M' en M. La rotation amenant x^i en y^i peut être écrite sous la forme $y^i = c^i_j x^j$, où $\|c^i_j\|$ est une matrice, la même pour tous les points M du solide. Ainsi, à un déplacement arbitraire d'un solide parfait correspond (au déplacement de translation près) une certaine transformation orthogonale.

Supposons maintenant que le corps se déforme. La transformation qui s'opère a la forme la plus générale ; on se bornera à supposer qu'elle est biunivoque, continue et dérivable par rapport aux coordonnées.

Transformation lors du déplacement d'un élément infinitésimal du milieu continu. Dans une région infinitésimale entourant le point M, on peut considérer cette transformation comme affine aux

termes du premier ordre près. Démontrons-le. Désignons par $\overset{\circ}{\partial}_i$ les vecteurs de base du repère lagrangien au point M à l'instant t_0. La position de tout point au voisinage du point M est entièrement déterminée par $d\boldsymbol{r}_0$ et

$$d\boldsymbol{r}_0 = d\xi^i \overset{\circ}{\partial}_i.$$

La position de tous les points de la région entourant le point M' en lequel le point M sera amené à l'instant t est définie par le vecteur $d\boldsymbol{r}$ dont les composantes, dans la base $\hat{\partial}_i$, sont également $d\xi^i$:

$$d\boldsymbol{r} = d\xi^i \hat{\partial}_i.$$

En faisant coïncider les points M et M' et en décomposant $d\boldsymbol{r}$ suivant les vecteurs de base $\overset{\circ}{\partial}_i$, on obtient les composantes $d\eta^i$ qui diffèrent de $d\xi^i$:

$$d\boldsymbol{r} = d\eta^i \overset{\circ}{\partial}_i.$$

La relation entre $d\eta^i$ et $d\xi^i$ définit la transformation d'un élément du milieu continu *). Elle est donnée par l'expression suivante:

$$d\boldsymbol{r} = d\xi^i \hat{\partial}_i = d\eta^i \overset{\circ}{\partial}_i. \tag{5.64}$$

Compte tenu de la relation (5.42) entre $\hat{\partial}_i$, $\overset{\circ}{\partial}_i$ et $\boldsymbol{w}$

$$\hat{\partial}_i = \overset{\circ}{\partial}_i + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \xi^i} = \overset{\circ}{\partial}_i + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{w}{}^k \overset{\circ}{\partial}_k = (\delta_i^k + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{w}{}^k) \overset{\circ}{\partial}_k = c_i^k \overset{\circ}{\partial}_k,$$

où

$$c_i^k = \delta_i^k + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{w}{}^k, \tag{5.65}$$

on écrira

$$d\boldsymbol{r} = d\xi^i \hat{\partial}_i = d\xi^i c_i^k \overset{\circ}{\partial}_k = d\eta^k \overset{\circ}{\partial}_k,$$

d'où

$$d\eta^k = c_i^k \, d\xi^i. \tag{5.66}$$

La transformation de $d\xi^i$ en $d\eta^i$ est homogène, linéaire, de matrice $\| c_i^k \|$ indépendante des différentielles $d\xi^i$, c'est-à-dire des coordonnées approchées des points voisins; c_i^k ne peuvent dépendre que des coordonnées du point M. Il s'ensuit que les coefficients c_i^k sont constants dans le cas d'un élément infinitésimal et la transformation (5.66) est affine.

*) En cas d'un élément infinitésimal, les $d\eta^i$ et $d\xi^i$ peuvent être considérés comme coordonnées cartésiennes dans un même repère obliquangle de base $\overset{\circ}{\partial}_i$.

Propriétés des transformations affines. Signalons maintenant les propriétés des transformations affines qui sont une conséquence directe de la linéarité des expressions (5.66).

Dans une transformation affine les droites se transforment en droites, les plans en plans, de plus les droites et les plans parallèles restent parallèles après transformation. En particulier, un parallélogramme se transforme en un parallélogramme. On en déduit que tous les segments égaux et identiquement orientés se détendent (ou se contractent) identiquement.

Le rapport entre les longueurs d'un segment quelconque avant et après la transformation ne dépend pas de la longueur primitive du segment (car c'est un rapport entre les fonctions homogènes du premier degré), n'étant fonction que de l'orientation de ce dernier. Par suite, le coefficient de l'allongement relatif de tout segment ne dépend pas non plus de sa longueur, mais uniquement de son orientation.

Un segment se transforme toujours en un segment, un point divisant un segment dans un rapport invariable.

Une courbe ou une surface algébrique se transforme en une courbe ou une surface algébrique du même degré. Par exemple, une surface du second degré se transforme en une surface également du second degré : une sphère devient un ellipsoïde ou une sphère, les diamètres conjugués de la sphère se transformant en diamètres conjugués de l'ellipsoïde. Tous les diamètres conjugués de la sphère sont orthogonaux ; dans un ellipsoïde il existe, en général, un triplet unique de diamètres conjugués orthogonaux et, donc, il existe toujours au moins un trièdre orthogonal qui se transforme en un trièdre orthogonal, autrement dit, il y a des directions principales.

Les volumes subissent en général des modifications lors d'une transformation affine, mais la variation relative du volume $\theta = (V - V_0)/V_0$ ne dépend ni de la forme primitive ni des dimensions du volume.

C'est bien pour cette raison que le coefficient de la dilatation cubique, que nous avons exprimé à l'aide des composantes du tenseur des déformations et calculé pour un parallélépipède élémentaire, est valable quel que soit le petit volume.

Interprétation géométrique de la transformation d'une petite particule du milieu continu. Toute sphère infinitésimale découpée dans le milieu continu se transforme, lors d'une déformation, en un ellipsoïde. Si la déformation laisse inchangées les directions principales, elle est dite déformation pure et se ramène alors à un ensemble de trois dilatations ou contractions effectuées suivant trois axes rectangulaires principaux.

Si la sphère se transforme en un ellipsoïde de façon que les directions principales soient affectées, on parle d'un cas général de la

transformation affine représentant une déformation pure (dilatation le long des axes principaux) suivie d'une rotation dans l'espace. Il est à noter qu'en cas d'une déformation pure, tout segment tracé dans la particule élémentaire du milieu dans une direction différente de celles des axes principaux change, en général, son orientation dans l'espace.

Si la particule se comporte comme solide parfait, alors une sphère se transforme en une sphère du même rayon, et en outre tous les trièdres mutuellement orthogonaux, qui peuvent alors être considérés comme principaux, tournent autour du même axe et d'un même angle. Il s'agit dans ce cas d'une rotation pure.

La matrice de la transformation affine $\| c_i^k \|$ est définie, selon (5.66), par neuf dérivées des composantes du vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$ par rapport aux coordonnées ξ^1, ξ^2, ξ^3 ; en général elle est définie en un point donné par neuf nombres quelconques. Une déformation pure est caractérisée par trois composantes principales du tenseur des déformations et par trois paramètres fixant l'orientation des axes principaux dans l'espace (ou par six composantes du tenseur des déformations), la rotation des axes principaux étant définie par les trois paramètres restants. Dans le cas d'une rotation pure la matrice est orthogonale et ne dépend que de trois paramètres indépendants (direction de l'axe de rotation et de l'angle de rotation).

En résumé, un déplacement quelconque d'une portion infinitésimale du milieu continu se ramène à une translation dans l'espace et une rotation suivies d'une déformation pure (contractions ou dilatations le long des axes trirectangles principaux).

Les caractéristiques géométriques des déformations revêtent de l'importance surtout dans le cas des solides. En ce qui concerne les liquides et les gaz leur rôle est beaucoup plus modeste. En effet, un liquide versé d'un récipient dans un autre reste (s'il est homogène) toujours le même, bien que lors du transvasement il ait pu être sujet à des déformations aussi grandes et aussi compliquées que l'on veut. Dans les fluides, les propriétés des déformations ne se manifestent essentiellement que par les variations de volume. Les fluides résistent à la compression ; à l'état comprimé ils se distinguent des fluides non comprimés.

Le tenseur des déformations joue un rôle capital dans la théorie des déformations des solides. La théorie du mouvement des fluides qui porte le nom d'hydrodynamique (ainsi que la théorie des déformations de certains solides) recourt plus souvent à une autre caractéristique, le tenseur des taux de déformation en l'occurrence. Il y a des cas où les déformations elles-mêmes sont de peu d'importance, en revanche c'est la vitesse avec laquelle elles s'opèrent qui compte.

§ 6. Tenseur des taux de déformation

Définition du tenseur des taux de déformation. On introduit le tenseur des déformations

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}) \tag{6.1}$$

relativement à deux états du milieu continu : actuel $\hat{g}_{ij}$, et d'une façon générale, neutre $\overset{\circ}{g}_{ij}$. Si l'état initial $\overset{\circ}{g}_{ij}$ est réalisable, il existe alors un vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$ de tous les points du milieu continu mû de l'état initial atteint à l'instant t_0 à l'état actuel considéré à l'instant t, ce qui permet d'écrire pour le tenseur des déformations les formules (5.56) et (5.57). Outre ces deux états du milieu continu nous considérons un autre état à l'instant $t + \Delta t$ qui est proche de l'état actuel $\hat{g}_{ij}$. Désignons par $\hat{g}'_{ij}$ les composantes du tenseur métrique à l'instant $t + \Delta t$. Il est évident qu'on peut introduire les composantes du tenseur des déformations relativement aux états du milieu continu aux instants t et $t + \Delta t$. En les désignant par $\Delta\varepsilon_{ij}$ on aura

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}'_{ij} - \hat{g}_{ij}) = \frac{1}{2}(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w^p \nabla_j w_p), \tag{6.2}$$

notant que $\boldsymbol{w} = w_i \hat{\boldsymbol{a}}^i$ et que les dérivées covariantes sont calculées en l'occurrence dans l'espace initial $\hat{g}_{ij}$. La formule (6.2) est pertinente, car le déplacement $\boldsymbol{w}$ de l'état à l'instant t à l'état observé à l'instant $t + \Delta t$ existe. Il est évident que

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}\Delta t = v_i \hat{\boldsymbol{a}}^i \Delta t,$$

c'est-à-dire que $w_i = v_i \Delta t$ est du même ordre que Δt et devient un déplacement infinitésimal si Δt est petit. C'est pourquoi

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) = e_{ij}. \tag{6.3}$$

Les quantités e_{ij} sont les composantes d'un tenseur symétrique dit tenseur des taux de déformation. Si l'on connaît le champ des vitesses $\boldsymbol{v}$, les composantes e_{ij} se calculent selon (6.3). Les formules $e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$ conservent leur forme quel que soit le repère mobile curviligne, à condition que le vecteur $\boldsymbol{v}$ soit défini à l'aide du repère de l'observateur et du repère concomitant, ces derniers étant à la base de toute étude du mouvement d'un continuum.

Relation entre les composantes du tenseur des déformations et celles du tenseur des taux de déformation. De (6.2) découle directement que les composantes du tenseur des taux de déformation satis-

font à la formule

$$\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{d\hat{g}_{ij}}{dt}, \tag{6.4}$$

valable dans le repère concomitant.

Si l'état neutre $\overset{\circ}{g}_{ij}$ ne dépend pas du temps t, on obtient facilement de (6.3), à l'aide de (5.4), les formules qui relient, dans un repère concomitant, les composantes des tenseurs des déformations et des taux de déformation :

$$\hat{e}_{ij} = \frac{d\hat{\varepsilon}_{ij}}{dt}. \tag{6.5}$$

Soulignons une fois de plus que la formule (6.5) n'est valable que si, et seulement si, $\overset{\circ}{g}_{ij}$ = const par rapport au temps, tandis que (6.4) est toujours vérifiée.

Le tenseur des déformations diffère du tenseur des taux de déformation mais les $e_{ij}\Delta t$ sont les composantes du tenseur des déformations infinitésimales se rapportant au déplacement effectué pendant l'intervalle Δt, c'est-à-dire

$$e_{ij}\Delta t = \varepsilon_{ij}. \tag{6.6}$$

Notons que le tenseur des déformations $\mathscr{E}$ apparaît par suite de la comparaison de deux états du milieu continu, tandis que le tenseur des taux de déformation est une caractéristique d'un état donné à un instant donné.

Conditions de compatibilité pour les composantes du tenseur des taux de déformation. Il est clair que les composantes du tenseur des déformations (6.6) satisfont aux conditions de compatibilité. En portant (6.6) dans (5.63a) et passant à la limite lorsque $\Delta t \to 0$, on obtient pour les composantes du tenseur des taux de déformation les conditions de compatibilité suivantes :

$$\frac{\partial^2 e_{\nu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 e_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 e_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 e_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0. \tag{6.7}$$

Le système d'équations (6.7) tout comme (5.63b) comprend six équations indépendantes linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Les équations indépendantes correspondantes s'obtiennent pour les combinaisons d'indices figurant dans (5.62). Pour trois fonctions arbitraires v_i les formules (6.3) donnent l'intégrale générale du système (6.7).

Par analogie avec le tenseur des taux de déformation on peut en introduire d'autres dont les composantes sont les dérivées de ε_{ij} par rapport à t d'ordre plus élevé. Il est également possible de considérer des tenseurs dont les composantes sont les dérivées de ε_{ij} par rapport aux coordonnées spatiales, par exemple, le tenseur $\nabla_k \varepsilon_{ij} \mathbf{a}^k \mathbf{a}^j \mathbf{a}^i$.

§ 7. Distribution des vitesses dans un élément infinitésimal du milieu continu

Transformation affine infiniment petite d'un élément infinitésimal du milieu continu au cours du temps Δt. Soit un élément infinitésimal du milieu où l'on veut étudier la distribution des vitesses. Par élément infinitésimal on entend un ensemble de points du milieu de coordonnées $\xi^i + d\xi^i = \xi^i + \rho^i$, disposés à des distances ρ infiniment petites du point donné O de coordonnées ξ^1, ξ^2, ξ^3, centre de l'élément. Le champ des vitesses v est supposé continu et ayant au moins les dérivées premières.

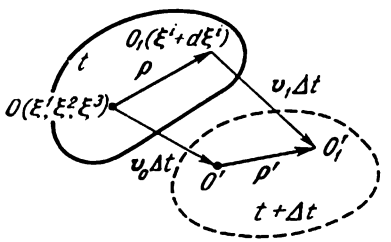


Fig. 15. Déplacement d'une particule infinitésimale du milieu continu au bout du temps Δt

Soient v_0 la vitesse du point O et v_1 celle d'un point quelconque O_1 de l'élément du milieu. Au bout de l'intervalle de temps infiniment petit Δt le vecteur $\overline{OO_1} = \rho$ composé, à tous les instants, de mêmes points du milieu se transforme en vecteur $\overline{O'O_1'} = \rho'$ et, manifestement (fig. 15),

$$\rho' = \rho + (v_1 - v_0)\,\Delta t. \tag{7.1}$$

En développant v en série au voisinage du point O aux infiniment petits du premier ordre en ρ près, on obtient

$$v_1 = v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi^i}\right)_0 \rho^i + \rho O(\rho) \quad \text{pour} \quad \lim_{\rho\to 0} O(\rho) = 0. \tag{7.2}$$

En portant (7.2) dans (7.1) on a

$$\rho' = \rho + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi^i}\right) \rho^i \Delta t + \rho O(\rho)\,\Delta t. \tag{7.3}$$

Il s'ensuit qu'un élément infinitésimal subit, au bout de l'intervalle de temps infinitésimal Δt, une transformation affine infiniment petite, à $\rho O(\rho)\,\Delta t$ près (les valeurs des dérivées de v par rapport à ξ^i sont prises au centre de l'élément O).

Distribution des vitesses dans un élément infinitésimal du milieu continu déformable. Récrivons la relation (7.2) qui exprime la vitesse v_1 d'un point arbitraire O_1 d'un élément infinitésimal en fonction de la vitesse v_0 du centre de ce dernier, des dérivées de v, prises au centre par rapport aux coordonnées, et des coordonnées

du point considéré, sous la forme suivante:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \nabla_i v_k \rho^i \boldsymbol{\vartheta}^k + \rho \boldsymbol{O}(\rho) =$$
$$= \boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}(\nabla_i v_k + \nabla_k v_i)\rho^i \boldsymbol{\vartheta}^k + \frac{1}{2}(\nabla_i v_k - \nabla_k v_i)\rho^i \boldsymbol{\vartheta}^k + \rho \boldsymbol{O}(\rho) =$$
$$= \boldsymbol{v}_0 + e_{ki}\rho^i \boldsymbol{\vartheta}^k + \omega_{ki}\rho^i \boldsymbol{\vartheta}^k + \rho \boldsymbol{O}(\rho). \qquad (7.4)$$

Dans la dernière égalité de (7.4) on a groupé les termes contenant le tenseur symétrique e_{ki} et ceux contenant le tenseur antisymétrique ω_{ki}:

$$\omega_{ki} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_k - \nabla_k v_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial \xi^i} - \frac{\partial v_i}{\partial \xi^k}\right). \qquad (7.5)$$

Donnons maintenant l'interprétation cinématique de chaque terme de l'expression (7.4) pour les vitesses des points de l'élément infinitésimal du milieu continu. Pour plus de clarté, représentons (7.4) en projections sur les axes cartésiens, en admettant que

$$\rho = x^1 \boldsymbol{i} + x^2 \boldsymbol{j} + x^3 \boldsymbol{k} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Il vient

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_0 + e_{1i}x^i + \omega_{1i}x^i, \\ v_1 &= v_0 + e_{2i}x^i + \omega_{2i}x^i, \\ w_1 &= w_0 + e_{3i}x^i + \omega_{3i}x^i. \end{aligned}\right\} \qquad (7.6)$$

Ici les composantes e_{ji} et ω_{ji} ne dépendent pas des x^i et l'on a négligé les termes en x^i d'ordre supérieur au premier. Introduisons la forme quadratique

$$\Phi = \frac{1}{2} e_{pq} x^p x^q; \qquad (7.7)$$

on a évidemment

$$e_{ki}x^i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}. \qquad (7.8)$$

Les formules (7.6) se mettent sous la forme

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} + \omega_{1i}x^i, \\ v_1 &= v_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} + \omega_{2i}x^i, \\ w_1 &= w_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} + \omega_{3i}x^i. \end{aligned}\right\} \qquad (7.9)$$

Ainsi, la vitesse des points d'un élément infinitésimal du milieu se décompose en trois composantes dont la première $\boldsymbol{v}_0$ (u_0, v_0, w_0) est indépendante des coordonnées x^1, x^2, x^3 et, par conséquent, représente celle du mouvement de translation de l'élément dans son en-

semble (elle coïncide avec la vitesse du centre de l'élément), tandis que la seconde composante ($\partial\Phi/\partial x^1$, $\partial\Phi/\partial x^2$, $\partial\Phi/\partial x^3$) dérive du potentiel Φ. Pour une analyse plus détaillée de la troisième composante ($\omega_{1i}x^i$, $\omega_{2i}x^i$, $\omega_{3i}x^i$) il nous faudra introduire une matrice antisymétrique que nous écrirons dans un système d'axes cartésiens

$$\|\omega_{ji}\| = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

c'est-à-dire introduisons les notations

$$\omega_1 = \omega_{32}, \quad \omega_2 = \omega_{13}, \quad \omega_3 = \omega_{21}. \tag{7.10}$$

En vertu des (7.5) et (7.10) on a dans le repère cartésien

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

On peut directement vérifier que les formules (7.11) se déduisent sans peine de la représentation symbolique suivante:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{i} + \omega_2\boldsymbol{j} + \omega_3\boldsymbol{k} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}. \tag{7.12}$$

Avec les notations ω_1, ω_2, ω_3 introduites selon (7.10) les formules (7.9) deviennent

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \omega_2 z - \omega_3 y, \\ v_1 &= v_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \omega_3 x - \omega_1 z, \\ w_1 &= w_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \omega_1 y - \omega_2 x, \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

soit, conformément à (7.12)

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial x} + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})_x, \\ v_1 &= v_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial y} + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})_y, \\ w_1 &= w_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial z} + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})_z. \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

La formule définitive que nous écrirons sous forme vectorielle

$$v_1 = v_0 + \operatorname{grad} \Phi + \omega \times \rho + \rho O(\rho) \tag{7.15}$$

remplace les expressions (7.4) et (7.14).

Comparaison de (7.15) avec la formule d'Euler donnant la distribution des vitesses dans un solide parfait. Comme on sait, la distribution des vitesses dans un solide parfait est régie par la formule d'Euler

$$v_1 = v_0 + \Omega \times \rho,$$

où v_0 est la vitesse d'un certain point déterminé O du solide parfait, v_1 la vitesse d'un point quelconque O_1 du corps, Ω le vecteur vitesse angulaire instantanée du solide, ρ le rayon vecteur $\overline{OO_1}$. La formule (7.15) pour les vitesses des points d'un élément infinitésimal du milieu continu se distingue de celle d'Euler par la présence des termes grad Φ et $\rho O(\rho)$, ce dernier, étant infiniment petit par rapport à ρ, peut être négligé dans une première approximation.

Taux d'allongement unitaire. Eclaircissons le rôle du terme grad Φ. Lors du déplacement du milieu continu le vecteur ρ se transforme en ρ'. La variation du vecteur ρ, c'est-à-dire $\rho' - \rho = \Delta\rho$, est due uniquement au fait que les points de l'élément infinitésimal se déplacent à des vitesses différentes; en effet, en passant à la limite dans (7.1) lorsque $\Delta t \to 0$ on écrit

$$\frac{d\rho}{dt} = v_1 - v_0. \tag{7.16}$$

Calculons pour un corps déformable une quantité non nulle appelée taux d'allongement unitaire d'un segment du milieu dans la direction ρ:

$$e_\rho = \frac{1}{|\rho|}\frac{d|\rho|}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{d(\rho\cdot\rho)}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\cdot\frac{d\rho}{dt}\right).$$

A partir des égalités (7.16) et (7.15) et compte tenu de ce que $\rho\cdot(\omega \times \rho) = 0$, on a

$$e_\rho = \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\cdot\frac{d\rho}{dt}\right) = \frac{1}{\rho^2}(\rho\cdot\operatorname{grad}\Phi) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}z\right) =$$

$$= \frac{2\Phi}{\rho^2} = e_{ij}\frac{x^i}{\rho}\frac{x^j}{\rho} = e_{ij}\alpha^i\alpha^j, \tag{7.17}$$

où $\alpha^i = \dfrac{x^i}{\rho} = \cos(\rho, x^i)$.

En résumé, si l'on connaît les composantes du tenseur des taux de déformation e_{ij} et la direction ρ, il est possible de calculer le taux d'allongement unitaire e_ρ dans cette direction.

Interprétation cinématique des composantes du tenseur des taux de déformation. La relation (7.17) permet une interprétation cinématique directe des composantes du tenseur des taux de déformation aux indices identiques. Supposons ρ dirigé le long de l'axe x^i, ce qui annule tous les termes du second membre de (7.17), sauf un seul, si bien que

$$e_{x^i} = e_{ii}.$$

Ainsi donc,

$$e_x = e_{11}, \quad e_y = e_{22}, \quad e_z = e_{33},$$

c'est-à-dire les composantes du tenseur des taux de déformation aux indices identiques sont les taux d'allongement unitaire des segments du milieu dirigés initialement parallèlement aux axes cartésiens orthogonaux correspondants. Un autre raisonnement conduit à la même conclusion. Au bout du temps Δt une particule infiniment petite du milieu subit une déformation infiniment petite par rapport à l'état du milieu continu à l'instant t. Il est possible alors d'introduire un tenseur des déformations $\mathscr{E}$ relativement aux états du milieu aux instants t et $t + \Delta t$, ce qui nous conduira à

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij}\Delta t.$$

D'où découle l'interprétation cinématique des composantes e_{ij} qui coïncident, au facteur Δt près, avec les composantes ε_{ij} du tenseur des déformations infinitésimales. Les quantités ε_{ij} pour $i \neq j$ caractérisent le glissement des angles droits entre les segments du milieu continu disposés initialement le long des axes de coordonnées x, y, z. Les composantes e_{ij}, lorsque $i \neq j$, sont égales à la moitié du taux du glissement des angles primitivement droits et formés par des segments du milieu qui sont, à l'instant donné, parallèles aux axes de coordonnées correspondants. Il découle de (7.17) que le terme grad Φ dans la formule (7.15) donnant la vitesse des points d'un élément infiniment petit du milieu est responsable de la déformation de ce dernier. Introduisons la notation

$$\boldsymbol{v}^* = \operatorname{grad} \Phi \tag{7.18}$$

que nous appellerons vitesse de déformation pure. Si $\boldsymbol{v}^* = 0$, tous les $e_\rho = 0$, ce qui montre que la déformation est absente, donc des longueurs des segments ρ d'orientation arbitraire restent inchangées. Inversement, si la déformation n'a pas lieu, tous les $e_\rho = 0$ et selon (7.17)

$$\operatorname{grad} \Phi = \boldsymbol{v}^* = 0.$$

Axes principaux et composantes principales du tenseur des taux de déformation. On peut associer des axes principaux au tenseur des taux de déformation comme, d'ailleurs, à tout tenseur symétrique

du second ordre. Dans le repère cartésien orienté suivant les axes principaux la matrice des composantes e_{ij} du tenseur des taux de déformation se présente sous la forme

$$\begin{Vmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{Vmatrix}.$$

Les axes principaux du tenseur des taux de déformation sont définis à tout instant donné t et en tout point O du milieu. Les quantités e_1, e_2, e_3 sont dites taux principaux d'allongement unitaire. Il est clair que, si $e_i > 0$, il s'agit d'une dilatation, tandis que, si $e_i < 0$, il y a contraction le long du i-ième axe.

On peut associer une quadrique au tenseur des taux de déformation comme, d'ailleurs, à tout tenseur symétrique du second ordre. Celle-ci est un ellipsoïde si tous les e_i sont de même signe, un hyperboloïde si les e_i sont de signes différents. En général, les axes principaux du tenseur des déformations ne coïncident pas avec ceux du tenseur des taux de déformation.

Vecteur ω ; relation des tenseurs antisymétriques avec les vecteurs dans un espace tridimensionnel. Analysons le troisième terme de la formule (7.15), c'est-à-dire $\omega \times \rho$. Montrons avant tout que la quantité ω, définie plus haut dans le repère cartésien, est un vecteur. En effet, l'expression (7.15) étant une égalité vectorielle, $\omega \times \rho$ est un vecteur et le produit scalaire $(\omega \times \rho)\cdot c$, où c est un vecteur quelconque, est un invariant. Or, dans l'expression d'un invariant $(\omega \times \rho)\cdot c$ on peut permuter les facteurs pour arriver à $\omega\cdot(\rho \times c) = \omega\cdot b$, où ρ, c et $\rho \times c = b$ sont des vecteurs arbitraires. Comme le produit scalaire de ω par un vecteur quelconque b est un invariant, ω est un vecteur ; utilisant alors (7.11) et appliquant les règles générales de transformation des composantes d'un vecteur on peut trouver les ω_i dans tout système de coordonnées.

Les raisonnements qui précèdent montrent qu'au champ des vitesses v on peut toujours faire correspondre le tenseur $e_{ij}\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j$ et le vecteur ω.

La méthode d'introduction de ω inspire une conclusion générale selon laquelle dans un espace tridimensionnel on peut toujours faire correspondre à tout tenseur antisymétrique du second ordre

$$\Omega = \omega_{ik}\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^k$$

un vecteur *) ω tel que dans un repère cartésien les composantes de Ω et de ω soient reliées par les formules (7.10).

*) Notons que ω (tout comme b, égal au produit vectoriel des vecteurs polaires) ne se comporte pas comme un vecteur polaire dans toutes les transformations des coordonnées. Voir pages 186 à 189.

Sur la commutativité des transformations affines infiniment petites. Comme on l'a montré précédemment, un élément infinitésimal du milieu, animé d'un mouvement continu, subit, pendant l'intervalle de temps infinitésimal dt, une transformation affine infiniment petite que l'on peut écrire maintenant sous la forme

$$\rho' = \rho + \operatorname{grad} \Phi \, dt + (\omega \times \rho) \, dt + \rho O(\rho) \, dt, \tag{7.19}$$

où le second et le troisième termes sont des infiniment petits de l'ordre de $\rho \, dt$. On peut récrire (7.19) de la façon suivante :

$$x'^i = (\delta^i_{\cdot j} + c^i_{\cdot j}) \, x^j = x^i + c^i_{\cdot j} x^j, \tag{7.20}$$

où x'^i et x^i sont les composantes de ρ' et ρ respectivement et les coefficients $c^i_{\cdot j}$ sont de l'ordre dt.

Rappelons qu'au cas des déformations finies un élément infinitésimal est sujet à la transformation affine, finie cette fois, ayant la matrice (5.65). Soient deux transformations affines successives :

$$x'^i = (\delta^i_{\cdot j} + a^i_{\cdot j}) \, x^{*j} \tag{a}$$

et

$$x^{*j} = (\delta^j_{\cdot p} + b^j_{\cdot p}) \, x^p. \tag{b}$$

Ecrivons la transformation

$$x'^i = (\delta^i_{\cdot p} + a^i_{\cdot p} + b^i_{\cdot p} + a^i_{\cdot j} b^j_{\cdot p}) \, x^p \tag{7.21}$$

qui est le résultat de l'application de l'opération (b) d'abord et de l'opération (a) ensuite. Si l'opération (b) vient après l'opération (a), on obtient

$$x'^i = (\delta^i_p + b^i_p + a^i_p + b^i_j a^j_p) \, x^p.$$

Comme en général $a^i_j b^j_p \neq b^i_j a^j_p$, on dira que le plus souvent les transformations affines ne sont pas commutatives. Si toutefois les transformations affines sont infiniment petites, les composantes des matrices $\| a^i_j b^j_p \|$, $\| b^i_j a^j_p \|$ sont des éléments infinitésimaux du second ordre ; les transformations affines infinitésimales sont commutatives à ces termes infinitésimaux près.

Décomposition de la transformation d'un élément infinitésimal du milieu au cours du temps dt en une somme des transformations simples. Revenons maintenant à la formule (7.19) décrivant la transformation d'un élément infiniment petit du milieu. Décomposons-la en deux transformations, sans nous soucier de l'ordre de leur exécution dont la première est définie par le tenseur des taux de déformation

$$\rho^* = \rho + \operatorname{grad} \Phi \, dt, \tag{7.22}$$

et la seconde, par le vecteur ω

$$\rho' = \rho^* + (\omega \times \rho^*)\, dt. \tag{7.23}$$

La forme quadratique $\Phi = \frac{1}{2} e_{ij} x^i x^j$ se met aisément sous la forme canonique

$$\Phi = \frac{1}{2}(e_1 x^2 + e_2 y^2 + e_3 z^2),$$

ce qui conduit à écrire (7.22), dans le système d'axes principaux, de la façon suivante:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= (1 + e_1\, dt)\, x, \\ y^* &= (1 + e_2\, dt)\, y, \\ z^* &= (1 + e_3\, dt)\, z, \end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

où

$$e_1 \approx \frac{x^* - x}{x\, dt}, \quad e_2 \approx \frac{y^* - y}{y\, dt}, \quad e_3 \approx \frac{z^* - z}{z\, dt}$$

sont les taux principaux d'allongement ($e_i > 0$) ou de contraction ($e_i < 0$). La transformation (7.22) peut être, évidemment, remplacée par les trois transformations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} x^{**} &= (1 + e_1\, dt)\, x, \\ y^{**} &= y, \\ z^{**} &= z, \end{aligned}\right\} \tag{7.25}$$

dont chacune représente une dilatation (contraction) pure le long d'un des axes principaux.

Ainsi donc, toute transformation infiniment petite d'un élément infinitésimal du milieu peut être décomposée en quatre transformations dont l'une, (7.23), est définie par le vecteur ω et les trois autres, (7.25), représentent les allongements purs le long des axes principaux trirectangles. A la différence du cas des déformations finies d'un élément infinitésimal, l'ordre des transformations y est sans importance.

Signalons que tous les raisonnements ci-dessus supposent que le vecteur ρ soit issu du centre O de l'élément. Or, d'après les propriétés des transformations affines, il vient que la variation de la longueur est la même pour tous les segments parallèles, ce qui implique qu'un segment élémentaire quelconque (non issu du point O) subit les mêmes transformations. Tous les vecteurs parallèles à l'axe des x s'allongent de $e_1\, dt$, les vecteurs parallèles à y s'allongent de $e_2\, dt$, ceux parallèles à z, de $e_3\, dt$, de même que toute longueur unitaire d'un vecteur quelconque ρ s'allonge de $e_\rho\, dt$.

La rotation et son interprétation cinématique. Donnons une interprétation cinématique du vecteur ω. Ecrivons la variation du vecteur ρ^* que lui fait subir la transformation (7.23) conditionnée par le vecteur ω:

$$\rho' - \rho^* = d\rho^*.$$

Le produit scalaire $\rho^* \cdot d\rho^*$ est nul en vertu de (7.23), ce qui signifie que la variation du vecteur ρ^* est orthogonale au vecteur ρ^* lui-même. Par conséquent, tous les $e_{\rho^*} = 0$. Ainsi, l'élément infinitésimal se comporte, lors de la transformation (7.23), comme un solide parfait, ce qui nous conduit à interpréter $(\omega \times \rho^*)\, dt$ comme un déplacement dû à une rotation à la vitesse angulaire instantanée ω d'un élément infinitésimal du milieu instantanément solidifié avant ou après la déformation subie. Donc, le vecteur ω doit être envisagé comme vitesse angulaire instantanée d'un corps lié à un élément infinitésimal du milieu et qui reste rigide pendant l'intervalle dt, autrement dit, du trièdre des axes principaux du tenseur des taux de déformation. Pour conclure nous dirons que le vecteur ω, nommé rotation ou tourbillon, est la vitesse angulaire instantanée de rotation des axes principaux du tenseur des taux de déformation.

Dans le cas d'une déformation finie d'un élément infinitésimal du milieu, la déformation se ramène également à une rotation suivie d'une déformation pure. La recherche du vecteur rotation à partir des composantes connues de la matrice de la transformation affine $\| c_j^i \|$ est un problème assez compliqué. S'il s'agit du mouvement de l'élément infinitésimal du milieu pendant l'intervalle dt qui est décrit par la transformation affine infiniment petite, ce vecteur rotation est $\omega\, dt$.

Théorème de Cauchy-Helmholtz sur la décomposition de la vitesse d'un point d'un élément infinitésimal du milieu. Réunissons maintenant les résultats des analyses précédentes. Formulons le théorème de Cauchy-Helmholtz sur la décomposition de la vitesse d'un point d'un élément infinitésimal du milieu. La vitesse v_1 de tout point O_1 (7.15) d'un élément infinitésimal du milieu continu de centre O est égale à

$$v_1 = v_0 + \omega \times \rho + \operatorname{grad} \Phi, \tag{7.26}$$

où v_0 est la vitesse de la translation, $\omega \times \rho$ la vitesse linéaire de la rotation, toutes deux caractérisant le mouvement de l'élément comme celui d'un solide parfait, et $v^* = \operatorname{grad} \Phi$ est la vitesse de la déformation pure. Cela dit, on peut écrire

$$v_1 = v_0 + v_{\text{rot}} + v^*. \tag{7.27}$$

Sur la divergence de la vitesse. Introduisons le concept de divergence du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$. Soit, à l'instant t, une sphère infinitésimale

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

composée de points du milieu.

Dans l'intervalle de temps Δt elle se transformera en un ellipsoïde dont l'équation, rapportée aux axes principaux, est de la forme

$$\frac{x^{*2}}{(1+e_1\Delta t)^2} + \frac{y^{*2}}{(1+e_2\Delta t)^2} + \frac{z^{*2}}{(1+e_3\Delta t)^2} = R^2$$

(soulignons que la sphère se transforme nécessairement en un ellipsoïde ou, dans le cas particulier, en une sphère, vu que $e_i\, dt$ sont petits devant 1).

Considérons la variation du volume de cette sphère infinitésimale au bout du temps dt. Son volume, à l'instant t, est évidemment $V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3$. Les mêmes particules du milieu occupent, à l'instant $t + \Delta t$, le volume de l'ellipsoïde

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 (1+e_1\Delta t)(1+e_2\Delta t)(1+e_3\Delta t).$$

Ecrivons le taux de dilatation cubique et passons à la limite lorsque $\Delta t \to 0$ et $V_0 \to 0$. Il vient

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ V_0 \to 0}} \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t} = e_1 + e_2 + e_3. \tag{7.28}$$

La somme $e_1 + e_2 + e_3$ n'est autre que le premier invariant du tenseur des taux de déformation. Comme on sait, dans un repère arbitraire, cet invariant peut être exprimé, comme suit, en fonction des composantes du tenseur des taux de déformation:

$$e_1 + e_2 + e_3 = e^\alpha_\alpha = g^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}.$$

De la définition de e_{ij} (6.3) on voit que

$$e^\alpha_\alpha = \nabla_\alpha v^\alpha.$$

Invariante par définition, la quantité $\nabla_\alpha v^\alpha$ est appelée divergence du vecteur vitesse. Elle est désignée par div $\boldsymbol{v}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla_\alpha v^\alpha. \tag{7.29}$$

Dans un repère cartésien on a

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

L'égalité (7.28) est établie pour le cas de la variation relative du volume V_0 d'une sphère infiniment petite. Les propriétés générales des transformations affines citées précédemment conduisent à la conclusion que cette variation ne dépend pas de la forme du volume V_0 de l'élément infinitésimal.

§ 8. Théorèmes de Stokes et de Gauss-Ostrogradsky. Certaines propriétés des champs de vecteurs qui s'y rapportent

Rotation et divergence d'un vecteur. Soit un champ continu du vecteur $\boldsymbol{A}$, ce dernier ayant les dérivées premières par rapport aux coordonnées. Tous les raisonnements concernant le champ des $\boldsymbol{v}$ sont également applicables au champ de $\boldsymbol{A}$. On peut alors écrire

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \Psi + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho} + \rho \boldsymbol{O}(\rho),$$

où

$$\Psi = \frac{1}{2} a_{ij} x^i x^j, \quad a_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i A_j + \nabla_j A_i)$$

et dans un repère cartésien

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}. \tag{8.1}$$

Ce déterminant symbolique peut être composé même au cas où, au lieu des composantes vectorielles A_1, A_2, A_3, on prend trois fonctions quelconques dérivables P, Q, R de x, y, z (dans un système de coordonnées fixe trois nombres quelconques peuvent être considérés comme composantes d'un vecteur).

Si $\boldsymbol{A}$ est un vecteur, le vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ introduit par définition conformément à (8.1) est appelé rotation (ou tourbillon) du vecteur $\boldsymbol{A}$, ce que l'on note

$$\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}.$$

Par analogie avec (7.29), la divergence du vecteur $\boldsymbol{A}$ se définit comme

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla_\alpha A^\alpha$$

ou dans un repère cartésien

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}.$$

On obtient donc

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v},$$

c'est-à-dire que le vecteur rotation est égal à la moitié de la rotation du vecteur vitesse.

Circulation d'un vecteur. Prenons dans le domaine de définition du champ du vecteur $\boldsymbol{A}$ un contour $\mathscr{L}$ ouvert ou un contour C fermé (fig. 16). Composons un produit scalaire $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}$, où $d\boldsymbol{s}$ est un élément orienté du contour $\mathscr{L}$ ou C. Ce produit scalaire est évidemment un invariant. Formons une intégrale

$$\int_{AB} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \Gamma.$$

Le scalaire Γ ainsi défini est dit circulation du vecteur $\boldsymbol{A}$ le long du contour $\mathscr{L}$. Le sens du parcours doit être indiqué. La

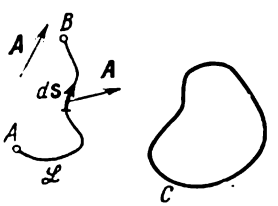


Fig. 16. Sur la définition de la circulation

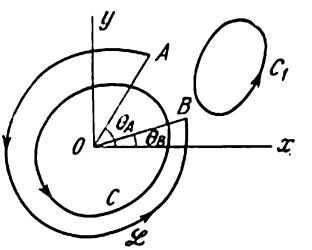


Fig. 17. Circulation dans le cas (8.2): $\Gamma_C = 2\pi k$, $\Gamma_{C_1} = 0$; $\Gamma_C = 2\pi kn$ lorsque le point O est contourné n fois

circulation Γ dépend, dans le cas général, du contour $\mathscr{L}$ le long duquel elle est prise. Il est évident que

$$\Gamma_{AB} = -\Gamma_{BA}.$$

Si le vecteur $\boldsymbol{A}$ représente la vitesse $\boldsymbol{v}$ des points du milieu continu, alors

$$\Gamma = \int_{AB} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{AB} u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

s'appelle circulation de la vitesse.

Supposons que le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ ait un potentiel, c'est-à-dire que

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

alors

$$\Gamma = \int_{AB} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{AB} \frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds = \varphi_B - \varphi_A.$$

Il en découle qu'au cas des mouvements potentiels la circulation de la vitesse dépend des coordonnées des points A et B; la valeur de Γ est indépendante de la forme du contour $\mathscr{L}$ si le potentiel φ est une fonction univoque de coordonnées. Par exemple, si $\varphi = \frac{Q}{4\pi r}$ où $Q = \text{const}$, Γ ne dépend pas de $\mathscr{L}$ et il s'ensuit que la circulation le

long du contour fermé C est nulle, $\Gamma_C = 0$. Si, par exemple,

$$\varphi = k\theta = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \tag{8.2}$$

(k étant une constante), on a

$$\varphi_B - \varphi_A = k(\theta_B - \theta_A),$$

d'où il découle que dans ce cas il existe des contours fermés entourant l'origine du repère tels que la circulation ne soit pas nulle (fig. 17).

Théorème de Stokes. La vitesse $\boldsymbol{v}$ n'est plus potentielle. Considérons un contour fermé C et supposons qu'on peut tendre sur ce contour une surface lisse Σ où le champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ est continu et dérivable, autrement dit, nous admettons que l'on peut réduire à un point le contour C tout en restant dans le domaine de continuité et de dérivabilité de $\boldsymbol{v}$. En sectionnant par les contours C la surface Σ comme le montre la figure 18, nous avons

$$\Gamma = \int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = \sum_k \int_{C_k} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{8.3}$$

Cette égalité est évidente, car les intégrales étendues aux portions communes des contours C_k donnent une somme nulle vu le sens opposé des circulations (fig. 18).

Les contours C_k peuvent être aussi petits que l'on veut et l'on admet que lors du calcul de $\Gamma_{C_k} = \int_{C_k} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}$ la vitesse $\boldsymbol{v}$ le long du contour C_k satisfait au théorème de Cauchy-Helmholtz sur la dé-

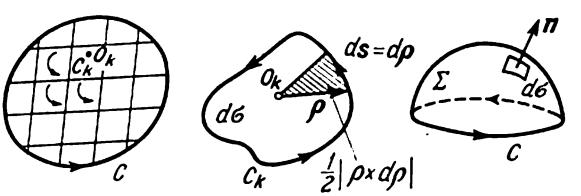


Fig. 18. Sur la déduction du théorème de Stokes

composition de la vitesse des points d'un élément infinitésimal continu ayant pour centre un certain point O_k situé sur la surface Σ à l'intérieur du contour C_k, soit

$$\boldsymbol{v}_{C_k} = \boldsymbol{v}_{O_k} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \operatorname{grad} \Phi + \rho O(\rho). \tag{8.4}$$

Dans la formule pour calculer Γ_{C_k} les termes comprenant $\boldsymbol{v}_{O_k}$ et grad Φ se réduisent à zéro, puisque ce sont des vecteurs potentiels et que leurs potentiels sont univoques ; l'apport du terme $\rho O(\rho)$ est une quantité infiniment petite d'ordre supérieur par rapport au terme $\int_{C_k} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot d\boldsymbol{s}$.

Il est aisé de voir (fig. 18) que

$$\int_{C_k} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{C_k} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) \cdot d\boldsymbol{\rho} = \int_{C_k} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\rho} \times d\boldsymbol{\rho}) =$$

$$= \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{C_k} \boldsymbol{\rho} \times d\boldsymbol{\rho} = 2\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = 2\omega_n\, d\sigma, \tag{8.5}$$

puisque à l'intérieur du contour élémentaire C_k le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est constant (il ne dépend que de O_k) ; $\int_{C_k} \boldsymbol{\rho} \times d\boldsymbol{\rho}$ vaut $2d\sigma$ et est dirigée suivant la normale $\boldsymbol{n}$ à $d\sigma$ dans le sens tel que la rotation de $\boldsymbol{\rho}$ vers $d\boldsymbol{\rho}$ apparaît comme effectuée dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre, enfin l'élément superficiel de Σ tendu sur le contour infiniment petit C_k peut être considéré plan ($\boldsymbol{n}$ étant la normale unitaire).

Maintenant, en passant à la limite dans (8.4) et (8.5) lorsque $k \to \infty$ et C_k se réduisent à un point, on obtient la formule dite théorème de Stokes

$$\int_C v_s\, ds = 2 \int_\Sigma \omega_n\, d\sigma, \tag{8.6}$$

c'est-à-dire que la circulation de la vitesse suivant un contour fermé C est égale au flux double du vecteur rotation à travers la surface Σ tendue sur ce contour. Soulignons que dans (8.6) le sens de la normale $\boldsymbol{n}$ est choisi de façon à ce que de son extrémité on voie le contour parcouru dans le sens antihoraire.

Il est évident que le théorème de Stokes est valable non seulement pour le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ du milieu continu mais aussi pour tout autre vecteur $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{\partial}^i$ satisfaisant aux conditions nécessaires de continuité et de dérivabilité. Voici le théorème de Stokes, écrit sous différentes formes, pour un vecteur $\boldsymbol{A}$:

$$\int_C A_s\, ds = \int_C A_i\, dx^i = \int_\Sigma (\operatorname{rot} A)_n\, d\sigma = \int_\Sigma \Big[\Big(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \Big) \cos(\boldsymbol{n}, x) +$$

$$+ \Big(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \Big) \cos(\boldsymbol{n}, y) + \Big(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \Big) \cos(\boldsymbol{n}, z) \Big]\, d\sigma.$$

Mouvements potentiel et irrotationnel. Le mouvement d'un milieu continu est dit irrotationnel dans un certain domaine si $\boldsymbol{\omega} = 0$ en tous les points du domaine, et rotationnel si $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ dans tout le domaine ou dans une partie de ce domaine. Dans le cas d'un mouvement irrotationnel les fibres orientées le long des axes principaux du tenseur des taux de déformation conservent leur orientation dans l'espace pendant un intervalle de temps infiniment petit.

Il est aisé de vérifier formellement que si $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$, alors $\boldsymbol{\omega} = 0$ et, par conséquent, la circulation suivant un contour quelconque fermé et qui satisfait aux conditions du théorème de Stokes est nulle. Ainsi donc un mouvement potentiel est également irrotationnel.

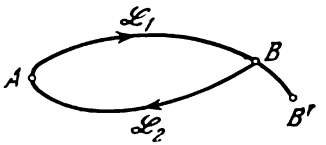


Fig. 19. Sur l'équivalence des écoulements irrotationnels et potentiels

Démontrons la réciproque, c'est-à-dire que si un mouvement est irrotationnel, $\boldsymbol{\omega} = 0$, il est aussi potentiel, autrement dit, qu'il existe une fonction φ telle que $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$.

A cet effet relions les points A et B par deux contours $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ (fig. 19) pouvant se transformer mutuellement par déformation dans le domaine d'un mouvement continu irrotationnel. Conformément au théorème de Stokes

$$\int\limits_{\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2} u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0,$$

si bien que

$$\Gamma_{AB} = \int\limits_{\mathscr{L}_1} u\,dx + v\,dy + w\,dz = \int\limits_{-\mathscr{L}_2} u\,dx + v\,dy + w\,dz.$$

Comme les contours $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont arbitraires, il s'ensuit que

$$\int\limits_{AB} u\,dx + v\,dy + w\,dz = \varphi(x, y, z),$$

c'est-à-dire que la circulation entre les points A et B ne dépend pas de la courbe d'intégration elle-même, mais dépend uniquement des coordonnées du point terminal B, le point initial A étant fixe. L'accroissement de Γ sur tout parcours infiniment petit BB' est évidemment égal à

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi,$$

et, en vertu du caractère arbitraire de dx, dy, dz, on a

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Ainsi donc, les notions de mouvement potentiel et irrotationnel sont équivalentes.

Multivalence d'un potentiel et connexité multiple du domaine de l'écoulement. On sait qu'un domaine est dit simplement connexe si tout contour fermé pris dans ce domaine peut être réduit à un point sans sortir du domaine; dans le cas contraire le domaine est multiplement connexe. Il est évident que si le domaine d'un écoule-

ment potentiel continu est simplement connexe, le potentiel φ est une fonction univoque des coordonnées; si le domaine est multiplement connexe, φ peut être une fonction non univoque des coordonnées. Dans un domaine multiplement connexe la circulation Γ le long des contours qui ne se réduisent pas à un point peut différer de zéro, étant la même suivant les contours qui peuvent se transformer mutuellement sans quitter le domaine. La formule (8.2) fournit l'exemple d'un domaine multiplement connexe d'un écoulement potentiel continu $\varphi = k\theta$, l'axe z est une ligne singulière.

Champs solénoïdaux et leurs propriétés. Le champ du vecteur $\boldsymbol{B}$ est dit solénoïdal si l'équation invariante suivante a lieu:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \nabla_\alpha B^\alpha = 0.$$

En s'appuyant sur les définitions de div $\boldsymbol{B}$ et de rot $\boldsymbol{A}$, on établit immédiatement que le champ rotationnel d'un vecteur $\boldsymbol{A}$ quelconque est solénoïdal, c'est-à-dire que si

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

alors

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0.$$

En particulier, on a

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v};$$

et, donc, dans le cas du mouvement d'un milieu continu quelconque, pour le champ rotationnel on a l'égalité suivante:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0$$

soit, en coordonnées cartésiennes,

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0.$$

Ainsi donc, le champ d'un vecteur rotation (champ rotationnel) est toujours solénoïdal.

Si le milieu est incompressible, c'est-à-dire qu'aucun volume individuel ne varie en grandeur pendant le mouvement, on a, conformément à (7.28),

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0,$$

en d'autres termes, le champ des vitesses d'un milieu incompressible est solénoïdal.

En physique, le champ du vecteur champ magnétique $\boldsymbol{H}$ est toujours solénoïdal:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0.$$

Tout vecteur solénoïdal $\boldsymbol{B}$ peut être représenté ainsi :

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \tag{8.7}$$

En effet, on peut construire une représentation particulière du vecteur $\boldsymbol{B}$ d'après la formule (8.7) au moyen du vecteur $\boldsymbol{A}_1$ de la manière suivante. Prenons un système de coordonnées cartésiennes et posons $A_{1z} = 0$. L'égalité $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1$ conduit alors au système d'équations suivant pour A_{1x} et A_{1y} :

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{\partial A_{1y}}{\partial z} &= B_x, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial A_{1x}}{\partial z} &= B_y, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{1x}}{\partial y}\right) &= B_z. \end{aligned}\right\} \tag{8.7'}$$

Ce système sera satisfait pour $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ si l'on pose

$$A_{1y} = -2\int_{z_0}^{z} B_x\,dz + 2\int_{x_0}^{x} B_z(x,\ y,\ z_0)\,dx,$$

$$A_{1x} = 2\int_{z_0}^{z} B_y\,dz.$$

On voit immédiatement qu'à ces conditions, les deux premières équations (8.7′) sont satisfaites. La troisième équation (8.7′) est également satisfaite vu que l'égalité

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

conduit à ceci

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{1x}}{\partial y}\right) = -\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right)dz + B_z(x,\ y,\ z_0) =$$

$$= \int_{z_0}^{z}\frac{\partial B_z}{\partial z}\,dz + B_z(x,\ y,\ z_0) = B_z(x,\ y,\ z).$$

Tous les vecteurs $\boldsymbol{A}$ satisfaisant à (8.7) peuvent être évidemment présentés sous la forme

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \operatorname{grad} \Psi,$$

où Ψ est une fonction scalaire arbitraire. En effet, pour la différence $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_1$ doit être remplie l'égalité suivante:

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_1) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} - \operatorname{rot} \boldsymbol{A}_1 = 0,$$

c'est-à-dire que cette différence doit se mettre sous la forme du gradient d'une certaine fonction Ψ.

Nous étudierons les propriétés générales des champs solénoïdaux sur l'exemple du champ du vecteur rotation ω.

Comme pour tout champ vectoriel, on peut introduire (voir § 3, ch. II) dans le cas du champ du vecteur rotation les notions de ligne, de surface et de tubes de vecteur, c'est-à-dire les notions de ligne de rotation, de surface de rotation et de tube de rotation. On

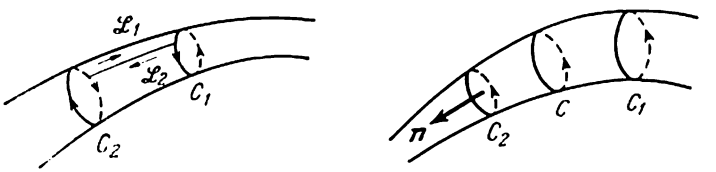


Fig. 20. Sur les propriétés des tubes de rotation

appelle ligne de rotation toute ligne dont la tangente en chacun de ses points se confond avec le vecteur ω. Les équations différentielles de lignes de rotation ont la forme suivante:

$$\frac{dx}{\omega_1}=\frac{dy}{\omega_2}=\frac{dz}{\omega_3}. \tag{8.8}$$

La surface de rotation $f(x, y, z) = \text{const}$ est toute en lignes de rotation et son équation s'écrit ainsi

$$\omega_1\frac{\partial f}{\partial x}+\omega_2\frac{\partial f}{\partial y}+\omega_3\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{8.9}$$

Le tube de rotation se forme si l'on mène les lignes de rotation par tous les points d'un contour fermé C, qui n'est pas, lui, une ligne de rotation. La surface latérale d'un tube de rotation est une surface de rotation où $\omega_n = 0$.

Etudions les propriétés des tubes de rotation. Considérons (fig. 20) deux contours C_1 et C_2 sur la surface latérale d'un tube de rotation. Relions ces deux contours par une coupure $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$. Appliquons le théorème de Stokes à la surface Σ ainsi obtenue entièrement située sur la surface latérale du tube de rotation, on a

$$\int\limits_{\substack{\text{le long de la}\\ \text{frontière de } \Sigma}} v\cdot ds=0.$$

Le sens de parcours de la frontière de la surface Σ est indiqué sur la figure 20. Les bords $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ étant parcourus dans des sens opposés, les intégrales correspondantes se détruisent mutuellement. Les contours C_1 et C_2 sont également parcourus dans des sens oppo-

sés, ce qui permet d'obtenir, en inversant le sens de parcours d'un des contours,

$$\int_{C_1} v \cdot ds = \int_{C_2} v \cdot ds,$$

soit

$$\Gamma_{C_1} = \Gamma_{C_2}.$$

Il est évident que les contours C_1 et C_2 peuvent être des contours quelconques entourant une fois le tube de rotation donné. Par conséquent,

$$\Gamma_C = \text{const},$$

où C est un contour quelconque entourant une fois le tube de rotation donné.

La circulation

$$\Gamma_C = \int_C v \cdot ds$$

ou bien la quantité

$$2 \int_\Sigma \omega_n \, d\sigma,$$

qui lui est égale d'après le théorème de Stokes, où Σ est une surface tendue sur C, les sens de parcours de C et de la normale n à Σ étant choisis comme lors de la démonstration du théorème de Stokes, est appelée intensité du tube de rotation.

Théorèmes cinématiques de Helmholtz sur les rotations. L'intensité du tube de rotation est constante le long du tube et représente une caractéristique du tube donné. Cette affirmation porte le nom du premier théorème cinématique de Helmholtz sur les rotations.

Le deuxième théorème cinématique affirme que les tubes de rotation ne peuvent ni prendre origine ni se terminer au sein d'un milieu. Ceci découle immédiatement de la condition de continuité du champ de ω et de la condition de conservation de l'intensité des tubes de rotation. Ainsi donc, les tubes de rotation peuvent soit être fermés, soit commencer et se terminer aux frontières du milieu en mouvement, soit, si le milieu est illimité, être infinis.

Exemples des mouvements rotationnels. On croit intuitivement que le mouvement d'un liquide est toujours rotationnel ($\omega \neq 0$) s'il y a, dans un écoulement, des lignes de courant fermées. En effet, si la distribution des vitesses dans un écoulement est analogue à celle de la figure 21,*a*, la circulation le long de la ligne de courant diffère du zéro,

$$\Gamma_C = \int_C v_s \, ds \neq 0,$$

puisque l'expression sous le signe somme ne change pas de signe dans tout l'intervalle d'intégration; selon le théorème de Stokes il doit exister sur la surface tendue sur le contour C les points où $\omega_n \neq 0$, donc, l'écoulement est rotationnel. Mais cette conclusion n'est valable que dans le cas où le théorème de Stokes est vérifié; c'est-à-dire, dans le cas où l'on peut tendre sur le contour C une surface Σ telle que le champ de v y soit continu avec toutes ses dérivées partielles.

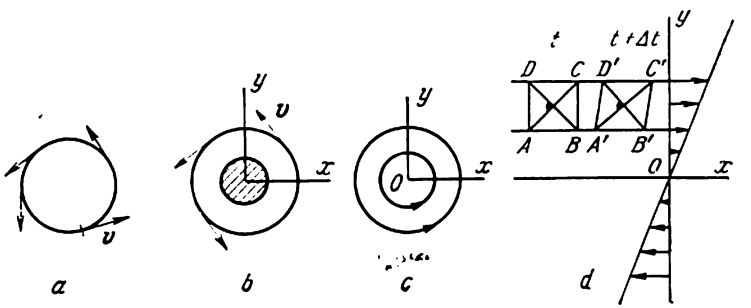


Fig. 21. Exemples d'écoulements rotationnels

Par exemple, dans le cas de la distribution des vitesses, comme il est montré sur la figure 21, *a*, on ne peut pas affirmer que l'écoulement est rotationnel si le contour C entoure un solide cylindrique ayant pour génératrice une droite parallèle à l'axe des z (fig. 21, *b*). Cette conclusion est également impossible lorsque les champs de v ou de ω comportent des singularités à l'intérieur de C.

Analysons de façon détaillée un écoulement de forme

$$\varphi = k\theta = k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \tag{8.10}$$

Cet écoulement est potentiel, c'est-à-dire que $v = \operatorname{grad} \varphi$; ses lignes de courant sont orthogonales aux surfaces $\varphi = \text{const}$ et représentent, naturellement, des circonférences dans le plan xOy. La vitesse est dirigée du côté des φ croissants et, si $k > 0$, l'écoulement a le sens indiqué sur la figure 21, *c*. La circulation Γ le long de toute circonférence confondue avec une ligne de courant diffère de zéro, bien que l'écoulement soit potentiel partout excepté à l'origine des coordonnées où le potentiel est indéterminé. Le vecteur rotation calculé pour cet écoulement est nul partout sauf sur l'axe des z où ω est égal à l'infini. On en conclut que les champs de v et de ω comportent des singularités le long de l'axe des z. On a le long de l'axe des z un fil de rotation isolé d'intensité finie $\Gamma = 2\pi k$. Cet écoulement s'appelle écoulement d'un tourbillon isolé.

Soulignons que les écoulements rotationnels ne sont pas forcément liés à la présence des lignes de courant fermées. Considérons

(fig. 21, *d*) un écoulement tel que

$$u = ay, \qquad v = w = 0,$$

où a est une constante positive.

Les trajectoires coïncidant avec les lignes de courant de cet écoulement sont des droites parallèles à l'axe des x. La distribution des vitesses le long d'une droite quelconque $x = \text{const}$ est linéaire. Le calcul direct des composantes de ω dans les axes cartésiens conduit à

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = -\frac{a}{2},$$

ce qui veut dire que l'écoulement est rotationnel, ω est dirigé à l'encontre de l'axe des z et ne varie pas d'un point à l'autre. Un élément liquide infiniment petit qui était un carré $ABCD$ au moment t se transforme en un losange $A'B'C'D'$ au moment $t + \Delta t$. On peut démontrer que les axes principaux du tenseur des taux de déformation coïncident au moment t avec les diagonales du carré et avec les diagonales du losange au moment $t + \Delta t$. Les angles entre les axes principaux sont invariablement droits pendant le mouvement mais leur orientation dans l'espace change. Ils tournent à la vitesse angulaire $\omega = -\frac{a}{2} k$.

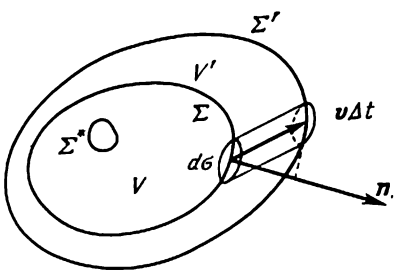


Fig. 22. Sur le théorème de Gauss-Ostrogradsky

Théorème de Gauss-Ostrogradsky. Rappelons-nous le théorème de Gauss-Ostrogradsky. Prenons dans un milieu continu en mouvement, au moment t, un volume isolé V limité par la surface Σ. Elevons en chaque point de la surface Σ une normale n extérieure à V. Au moment $t + \Delta t$ ce volume passera en un volume V', la surface Σ en Σ', cette dernière limitant V' (fig. 22).

La variation de volume $V' - V$ est évidemment égale à

$$V' - V = \int_{\Sigma} v_n \Delta t \, d\sigma$$

La diminution de V' par rapport à V s'obtient automatiquement, car la normale est toujours extérieure à V.

La vitesse de variation de volume est égale à

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V' - V}{\Delta t} = \int_{\Sigma} v_n \, d\sigma.$$

De même, pour un volume infiniment petit V^* limité par une surface Σ^*, on a

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V'^* - V^*}{\Delta t} = \int_{\Sigma^*} v_n \, d\sigma.$$

En se rappelant la définition de la divergence d'un vecteur vitesse et en s'appuyant sur sa signification cinématique, on aura dans le système d'axes cartésiens

$$\int_{\Sigma^*} v_n \, d\sigma = \int_{\Sigma^*} [u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)] \, d\sigma =$$

$$= V^* \operatorname{div} v + V^* \varepsilon = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) V^* + V^* \varepsilon, \quad (8.11)$$

où ε est une quantité infiniment petite.

Un volume fini V peut être décomposé en volumes infiniment petits V^* et on peut écrire pour chacun de ces volumes l'égalité (8.11) à condition d'avoir v continu et dérivable à l'intérieur de V. En faisant dans (8.11) la somme de toutes les composantes V^* et en passant à la limite lorsque le nombre de composantes tend à l'infini et $V^* \to 0$, on obtient

$$\int_{\Sigma} [u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)] \, d\sigma =$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau, \quad (8.12)$$

puisque, dans le premier membre, les intégrales prises sur les aires contiguës Σ^* se détruisent par suite des sens opposés des normales, et il ne reste à la limite que l'intégrale étendue à la surface extérieure Σ.

L'égalité (8.12) traduit précisément le théorème de Gauss-Ostrogradsky sur la transformation de l'intégrale étendue à la surface fermée Σ en une intégrale prise sur le volume V délimité par cette surface Σ. L'égalité (8.12) peut être récrite sous une forme indépendante du choix des axes :

$$\int_{\Sigma} v_n \, d\sigma = \int_V \operatorname{div} v \, d\tau. \quad (8.13)$$

Il est évident que tout vecteur A continu et ayant les dérivées premières continues à l'intérieur de V et sur la surface Σ peut être assimilé à la vitesse v, ce qui nous autorise de lui appliquer la formule de Gauss-Ostrogradsky

$$\int_{\Sigma} A \cdot n \, d\sigma = \int_V \operatorname{div} A \, d\tau.$$

Qui plus est, on peut appliquer le théorème de Gauss-Ostrogradsky à trois fonctions quelconques P, R, Q de x, y, z continues et dérivables, vu que ces trois fonctions P, Q, R quelles qu'elles soient peuvent être interprétées comme composantes d'un vecteur; on a en l'occurrence

$$\int_{\Sigma} [P\cos(\boldsymbol{n}, x) + Q\cos(\boldsymbol{n}, y) + R\cos(\boldsymbol{n}, z)]\, d\sigma =$$

$$= \int_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) d\tau.$$

Les intégrales des deux membres de la formule de Gauss-Ostrogradsky contiennent des quantités invariantes par rapport au choix du système de coordonnées. Si elles sont connues pour le système de coordonnées cartésiennes, on peut les calculer pour n'importe quel autre système de coordonnées. Notamment, si dans un système η^1, η^2, η^3 quelconque on a

$$\boldsymbol{A} = A^k \boldsymbol{\vartheta}_k, \quad \boldsymbol{n} = n_i \boldsymbol{\vartheta}^i;$$

alors

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} = A^k n_k$$

et

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla_k A^k = \frac{\partial A^k}{\partial \eta^k} + A^i \Gamma^k_{ki},$$

où les symboles de Christoffel Γ^i_{kj} se calculent conformément aux formules obtenues plus haut, selon g_{ij}, dans l'espace η^1, η^2, η^3 (g_{ij} s'obtiennent par les formules de transformation des axes cartésiens en axes donnés η^1, η^2, η^3).

Maintenant on peut écrire le théorème de Gauss-Ostrogradsky sous la forme

$$\int_{\Sigma} A^k n_k \, d\sigma = \int_{V} \nabla_k A^k \, d\tau, \tag{8.14}$$

valable dans un système de coordonnées curvilignes quelconque. Notons que pour la démonstration du théorème de Gauss-Ostrogradsky la dimension de l'espace peut être quelconque. En mécanique et en physique on a souvent recours à ce théorème pour les domaines bi-, trois- et quadridimensionnels.

Formules de dérivation d'une intégrale prise sur un volume mobile par rapport au temps. Déduisons une autre formule de l'analyse vectorielle qui nous sera utile dans ce qui va suivre. Soit une fonction quelconque f (ce peut aussi être un tenseur) dépendant des coordonnées des points de l'espace et du temps. Considérons l'inté-

grale

$$\int_V f(x, y, z, t)\, d\tau$$

étendue à un volume mobile. Calculons la dérivée

$$\frac{d}{dt}\int_V f(x, y, z, t)\, d\tau,$$

où sont fonction de t non seulement l'expression placée sous le signe $\int$, mais aussi le domaine d'intégration V. En s'appuyant sur la définition de la dérivée on peut écrire (voir fig. 22)

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} f(x, y, z, t)\, d\tau =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{V'} f(x, y, z, t+\Delta t)\, d\tau - \int_V f(x, y, z, t)\, d\tau}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_V [f(x, y, z, t+\Delta t) - f(x, y, z, t)]\, d\tau + \int_{V'-V} f(x, y, z, t+\Delta t)\, d\tau}{\Delta t} =$$

$$= \int_V \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t}\, d\tau + \int_\Sigma f v_n\, d\sigma, \qquad (8.15)$$

étant donné que le volume $V' - V$ est composé de cylindres élémentaires (voir fig. 22)

$$d\tau = v_n\, d\sigma\, \Delta t$$

et que pour $\Delta t \to 0$ la surface Σ' tend vers Σ et

$$f(x, y, z, t + \Delta t) \to f(x, y, z, t)$$

L'application de la formule de Gauss-Ostrogradsky à la dernière intégrale conduit à

$$\frac{d}{dt}\int_V f(x, y, z, t)\, d\tau = \int_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i (f v^i)\right] d\tau. \qquad (8.16)$$

Le domaine d'intégration V étant mobile, le résultat de dérivation dépend, naturellement, du champ de vitesses v avec lequel se déplacent les points du volume V.

L'égalité cinématique suivante est évidemment toujours vraie:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i (f v^i) = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \nabla_i f + f \nabla_i v^i = \frac{df}{dt} + f \nabla_i v^i, \qquad (8.17)$$

où

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \nabla_i f \qquad (8.18)$$

est l'expression de la dérivée totale de la fonction f par rapport au temps t dans un système d'axes arbitraires. Si bien que la formule (8.16) peut être récrite sous la forme

$$\frac{d}{dt}\int_V f(x, y, z, t)\,d\tau = \int_V \left[\frac{df}{dt} + f\nabla_i v^i\right] d\tau. \tag{8.19}$$

Appliquons la formule (8.16) à un cas particulier. Soit

$$f = \frac{1}{V},$$

où V est le volume d'un milieu continu. Il est évident que dans ce cas la fonction f dépend du volume variable V, domaine d'intégration dans (8.15), c'est-à-dire qu'elle dépend uniquement de t sans l'être des coordonnées. Il est clair que l'identité cinématique suivante a toujours lieu :

$$\int_V \frac{d\tau}{V(t)} = 1$$

et selon (8.16) on a

$$\frac{d}{dt}\int_V \frac{d\tau}{V(t)} = \int_V \left[\frac{\partial \frac{1}{V}}{\partial t} + \nabla_i\left(\frac{1}{V} v^i\right)\right] d\tau = 0 \tag{8.20}$$

soit

$$\int_V \left[\frac{d\frac{1}{V}}{dt} + \frac{1}{V}\operatorname{div} \boldsymbol{v}\right] d\tau = 0. \tag{8.21}$$

Cette identité est valable tant pour tout le volume V du milieu mobile que pour une partie quelconque de ce volume.

En appliquant (8.21) à un volume ΔV infiniment petit on obtient

$$\frac{d\left(\frac{1}{\Delta V}\right)}{dt} + \frac{1}{\Delta V}\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{8.22}$$

où div $\boldsymbol{v}$ est prise au point auquel se réduit ΔV. Soulignons que cette égalité est valable pour tout milieu et elle n'est aucunement liée aux propriétés du milieu en mouvement. En particulier, elle est valable également pour les milieux non matériels, par exemple, pour un espace de phase.

CHAPITRE III

NOTIONS ET ÉQUATIONS DYNAMIQUES DE LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

§ 1. Equation de continuité

Abordons l'étude du mouvement des êtres physiques, notamment des corps matériels et des champs. Au cours des paragraphes suivants on envisagera essentiellement les lois du mouvement des corps matériels. Un corps matériel est un corps caractérisé par l'inertie qui, à son tour, se caractérise par la masse. On peut introduire la masse pour l'ensemble du corps (m) aussi bien que pour n'importe quelle partie de celui-ci (m_i). Par définition, la masse m de tout le corps est égale à la somme des masses m_i de toutes les parties composantes.

Loi de conservation de la masse ; densité ; équation de continuité en variables d'Euler. La loi fondamentale de la mécanique newtonienne est la loi de conservation de la masse m de l'ensemble d'un volume individuel, c'est-à-dire d'un volume composé des mêmes particules d'un milieu. Cette loi peut être considérée comme une loi naturelle vérifiée empiriquement, vraie à une certaine approximation près.

D'après l'une des équations fondamentales de la mécanique des milieux continus, pour tout volume individuel

$$m = \text{const.}$$

Cette équation peut être écrite sous une autre forme, à savoir

$$\frac{dm}{dt} = 0. \tag{1.1}$$

Introduisons la densité moyenne

$$\rho_{\text{moy}} = \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

où ΔV est le volume occupé par la masse Δm ; la densité réelle se définit comme la limite

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

En mécanique des milieux continus il est couramment admis d'envisager la densité ρ au lieu de la masse m. Pour un petit volume se

vérifie l'égalité

$$\Delta m \approx \rho \, \Delta V;$$

pour un volume fini on a

$$m = \int_V \rho \, d\tau,$$

où l'intégrale est prise par rapport au volume individuel mobile. Ainsi donc, connaissant ρ on peut obtenir m.

La densité ρ d'un élément individuel peut ne pas se conserver, étant donné que le volume de cet élément peut changer lors du mouvement.

La loi de conservation de la masse pour un volume individuel d'un milieu continu se récrit donc sous la forme

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, d\tau = 0. \tag{1.2}$$

En appliquant la règle de dérivation des intégrales (8.16), chap. II, étendue au volume mobile, on obtient, à la condition d'observer la loi de conservation de la masse,

$$0 = \frac{dm}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) d\tau = \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right) d\tau$$

ou encore, comme cette égalité est valable pour tout volume individuel arbitrairement choisi, la première équation différentielle fondamentale de la mécanique des milieux continus

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{1.3}$$

appelée équation de continuité en variables d'Euler.

Conditions relatives aux caractéristiques conservant leurs valeurs dans un volume individuel. Comme la masse se conserve pour tout volume individuel, l'équation ci-dessus s'obtient également à partir de la formule (8.22), chap. II.

Outre la masse m il existe d'autres caractéristiques physiques qui demeurent constantes lors du mouvement dans tout volume individuel d'un milieu continu. Ainsi, soit N le nombre de molécules ou d'atomes dans un volume individuel quelconque. N est souvent constant dans les volumes individuels. En introduisant le nombre de molécules ou d'atomes dans l'unité de volume $n = \lim_{V \to 0} \frac{N}{V}$ et en se fondant sur l'hypothèse de la constance de N dans un volume individuel arbitraire on obtient pour n à l'aide de la

formule (8.22) l'analogue différentiel de (1.3) :

$$\frac{dn}{dt} + n \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{1.4}$$

Si des réactions chimiques se produisent dans un milieu continu, on aura l'équation (1.3) et non l'équation (1.4).

Il existe encore d'autres grandeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles qui se conservent dans tout volume individuel. Désignons par Φ une telle grandeur et introduisons sa densité

$$f = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V}.$$

Il est évident que pour Φ et f sont vérifiées les conditions

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

$$\Phi = \int_V f \, d\tau,$$

$$\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Cette dernière condition est souvent remplie en physique pour la densité de charge e. Déterminer les caractéristiques qui conservent leurs valeurs dans un volume individuel constitue l'un des problèmes essentiels de la physique.

Equations de continuité pour les mélanges de plusieurs constituants. Prenons un mélange de N constituants ; ce peut être, par exemple, un mélange d'hydrogène, d'oxygène et de vapeur d'eau ($N = 3$), ou bien un alliage d'étain et de cuivre, ou bien encore une solution de sel dans l'eau ; ou enfin un plasma, ensemble d'électrons libres et d'ions et ainsi de suite. On peut représenter tous les mélanges de ce genre comme un ensemble de N continua remplissant le même volume, celui du mélange. On peut introduire, pour chacun de ces continua, la densité et la vitesse. Notons-les $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$ et $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_N$. A chaque point du volume rempli par le mélange on aura N densités ρ_i et N vitesses $\boldsymbol{v}_i$ dont chacune se rapporte à son propre continuum.

Si le problème est posé en ces termes, la mécanique d'un mélange n'est autre que la mécanique de l'ensemble des continua remplissant le même volume.

Envisageons d'abord le cas où il n'y a ni réactions chimiques ni ionisations dans le mélange. Chacun des N constituants vérifiant alors la loi de conservation de la masse, on aura N équations

$$\frac{dm_i}{dt} = 0,$$

soit

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i v_i = 0. \tag{1.5}$$

Si, au contraire, un mélange est sujet aux réactions chimiques ou à l'ionisation (le cas est intéressant pour les applications), les masses m_i des constituants peuvent être variables. Introduisons $\varkappa_i$, variation de la masse m_i du i-ième constituant dans une unité de volume par unité de temps par suite d'une réaction chimique ou de l'ionisation. Les quantités $\varkappa_i$ sont définies en chimie. L'équation de continuité pour les constituants d'un mélange prend alors la forme

$$\frac{dm_i}{dt} = \int_V \varkappa_i \, d\tau$$

soit

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i v_i = \varkappa_i. \tag{1.6}$$

La loi fondamentale des réactions chimiques stipule que la masse totale du mélange se conserve, donc

$$\sum_{i=1}^{N} \varkappa_i = 0. \tag{1.7}$$

Outre les N densités et N vitesses des constituants il est possible d'introduire une densité ρ et une vitesse v pour l'ensemble du mélange. Par définition, la masse du mélange dans un volume donné est égale à la somme des masses des constituants dans le même volume, soit

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i,$$

et la densité ρ du mélange se définit comme

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

La densité des constituants du mélange s'écrit

$$\rho_i = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V},$$

par conséquent,

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i.$$

En écrivant la somme (1.5) compte tenu de (1.7) on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \sum_{i=1}^{N} \rho_i v_i = 0.$$

L'équation prend la forme habituelle de l'équation de continuité (1.3) lorsque la vitesse $\boldsymbol{v}$ du mélange est définie comme suit :

$$\rho \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{v}_i, \quad m\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i,$$

c'est-à-dire que

$$\boldsymbol{v} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{v}_i}{\rho}. \tag{1.8}$$

Notons que la vitesse ainsi déterminée est celle du centre commun des masses de N volumes individuels correspondant à N constituants du mélange.

Equation de continuité dans le cas des phénomènes de diffusion. Il peut arriver que tous les constituants d'un mélange se meuvent avec la même vitesse qui est celle du mélange pris dans son ensemble :

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 = \ldots = \boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{v}.$$

C'est le cas des processus sans diffusion.

Si les vitesses $\boldsymbol{v}_i$ des constituants sont distinctes, il y a diffusion : dans ce cas les constituants se meuvent les uns par rapport aux autres. Le courant électrique constitue un exemple de processus de ce genre. En présence du courant électrique dans un conducteur immobile on a $\boldsymbol{v} = 0$ et $\boldsymbol{v}_i \neq 0$, c'est-à-dire que le mouvement des électrons et des ions dans le conducteur engendre le courant électrique.

Dans le cas de la diffusion on peut donner une autre forme aux équations de continuité (1.5) ou (1.6) en introduisant dans l'équation de continuité de chaque constituant la vitesse $\boldsymbol{v}$ du mouvement du mélange pris dans son ensemble.

Lorsqu'une réaction chimique et une diffusion ont lieu, les équations (1.6) s'écrivent dans le cas général

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \boldsymbol{v} = \varkappa_i - \operatorname{div} \boldsymbol{I}_i \tag{1.9}$$

où

$$\boldsymbol{I}_i = \rho_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}).$$

La différence $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}$ est évidemment la vitesse du i-ième constituant par rapport à l'ensemble du milieu. Les termes div $\boldsymbol{I}_i$ dans (1.9) caractérisent la variation de la masse du i-ième constituant dans un volume se mouvant avec la vitesse $\boldsymbol{v}$, due au fait que si $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{v}_i$, ce volume n'est pas le volume individuel du i-ième constituant.

Les particules formant le i-ième constituant entrent dans ce volume et en sortent. Les vecteurs $\boldsymbol{I}_i$ sont appelés vecteurs du flux de diffusion.

Pour les calculer il faut faire appel aux lois physiques. Les lois concernant la diffusion varient selon les cas, mais il découle de (1.8) que l'on a toujours

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{I}_i = 0.$$

Au lieu de N équations de continuité (1.9) pour les constituants d'un mélange on peut utiliser $N - 1$ équations de continuité indépendantes (1.9) pour les constituants et une équation pour l'ensemble du mélange:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0.$$

Ainsi, en étudiant le mouvement d'un milieu à plusieurs constituants il est possible de ne pas introduire explicitement N continua remplissant le même volume et se mouvant aux différentes vitesses $\boldsymbol{v}_i$, mais de se borner à envisager les vecteurs du flux de diffusion $\boldsymbol{I}_i$ au lieu de $\boldsymbol{v}_i$ et de prendre les équations (1.9) en tant qu'équations pour les densités ρ_i des constituants du mélange.

On voit que l'étude du mouvement des mélanges miscibles de plusieurs constituants exige, en ce qui concerne les grandeurs $\varkappa_i$ et $\boldsymbol{I}_i$, qu'on réunisse les lois mécaniques à celles de la physique et de la chimie.

Equation de continuité et propriétés des tubes de courant pour un milieu incompressible. L'équation de continuité (1.3) s'obtient pour un milieu continu arbitraire. Un milieu est dit incompressible lorsqu'un volume individuel quelconque de ce milieu demeure constant lors du mouvement. Il s'ensuit que la densité d'une particule du milieu incompressible est constante. L'équation de continuité acquiert alors la forme

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{1.10}$$

Un milieu est dit homogène lorsque la densité ρ est identique pour toutes les particules du milieu, c'est-à-dire que ρ ne dépend pas des coordonnées spatiales x, y, z; il est dit hétérogène lorsque la densité ρ n'est pas la même dans différentes particules du milieu, $\rho = \rho(x, y, z)$. *L'équation de continuité* (1.10) *est évidemment valable aussi bien pour le milieu incompressible homogène que pour le milieu hétérogène.*

Le champ des vitesses d'un liquide incompressible est toujours solénoïdal et ses tubes de vecteurs, ou tubes de courant, possèdent par conséquent les propriétés que l'on a exposées au paragraphe 8, ch. II. Par exemple, l'intensité d'un tube de courant

$$\int_{\Sigma} v_n \, d\sigma = Q$$

(Σ est la section transversale du tube et $\boldsymbol{n}$ la normale à cette section), dit débit du tube de courant, demeure constante le long de ce tube. Lors du mouvement continu, les tubes de courant ne peuvent ni commencer ni se terminer à l'intérieur du volume du milieu incompressible.

Equation de continuité en variables de Lagrange. Nous allons obtenir maintenant l'équation de continuité sous une autre forme, notamment en variables de Lagrange. Construisons à cet effet, à l'instant t donné, en un point arbitraire M d'un milieu continu, un parallélépipède obliquangle infiniment petit sur les vecteurs élémentaires $\hat{\boldsymbol{\partial}}_1 d\xi^1$, $\hat{\boldsymbol{\partial}}_2 d\xi^2$, $\hat{\boldsymbol{\partial}}_3 d\xi^3$, portés par les axes du système de coordonnées concomitant ξ^1, ξ^2, ξ^3. Son volume sera

$$V = \hat{\boldsymbol{\partial}}_1 \cdot (\hat{\boldsymbol{\partial}}_2 \times \hat{\boldsymbol{\partial}}_3)\, d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3.$$

A un autre instant quelconque t_0, il lui correspondait un autre parallélépipède obliquangle élémentaire construit sur les vecteurs $\overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_1\, d\xi^1$, $\overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_2\, d\xi^2$, $\overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_3\, d\xi^3$ au même point M et de volume

$$V_0 = \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_1 \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_2 \times \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_3)\, d\xi^1\, d\xi^2\, d\xi^3.$$

Désignons par ρ et ρ_0 la densité du milieu aux instants t et t_0 respectivement. D'après la loi de conservation de la masse on a

$$\rho_0 V_0 = \rho V,$$

soit

$$\rho = \rho_0 \frac{V_0}{V} = \rho_0 \frac{\overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_1 \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_2 \times \overset{\circ}{\boldsymbol{\partial}}_3)}{\hat{\boldsymbol{\partial}}_1 \cdot (\hat{\boldsymbol{\partial}}_2 \times \hat{\boldsymbol{\partial}}_3)}. \tag{1.11}$$

Afin de calculer les produits mixtes des vecteurs de base, introduisons en outre le système de référence orthogonal x^1, x^2, x^3 avec les vecteurs de base $\boldsymbol{\partial}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\partial}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{\partial}_3 = \boldsymbol{k}$, par rapport auquel se meut le milieu. Désignons par x^1, x^2, x^3 et x_0^1, x_0^2, x_0^3 les coordonnées des points du milieu par rapport à ce système aux instants t et t_0 respectivement. On voit aisément que

$$x_0^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0), \quad x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$

c'est-à-dire que x_0^i et x^i sont les valeurs des fonctions donnant la loi du mouvement pour différentes valeurs de la variable indépendante t. Comme le rayon vecteur du point M dans le système de référence s'écrit

$$\boldsymbol{r} = x^k \boldsymbol{\partial}_k, \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{\partial}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi^i},$$

on écrira

$$\hat{\boldsymbol{\partial}}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \boldsymbol{\partial}_k,$$

et le produit mixte $\hat{\partial}_1 \cdot (\hat{\partial}_2 \times \hat{\partial}_3)$ peut être représenté par le déterminant

$$\hat{\partial}_1 \cdot (\hat{\partial}_2 \times \hat{\partial}_3) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} = \hat{\Delta},$$

où $\hat{\Delta}$ est le jacobien de la transformation des variables ξ^1, ξ^2, ξ^3 en variables x^1, x^2, x^3. De manière analogue on obtient

$$\mathring{\partial}_1 \cdot (\mathring{\partial}_2 \times \mathring{\partial}_3) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_0^1}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x_0^2}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x_0^3}{\partial \xi^1} \\ \dfrac{\partial x_0^1}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x_0^2}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x_0^3}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial x_0^1}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial x_0^2}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial x_0^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} = \mathring{\Delta},$$

où $\mathring{\Delta}$ est le jacobien de la transformation des variables ξ^1, ξ^2, ξ^3 en variables x_0^1, x_0^2, x_0^3. Si l'on s'appuie sur la propriété des jacobiens, l'équation (1.11) se récrit sous la forme

$$\rho = \rho_0 \frac{\mathring{\Delta}}{\hat{\Delta}} = \rho_0 \operatorname{Det} \left\| \frac{\partial x_0^i}{\partial x^k} \right\|. \tag{1.12}$$

Poursuivons la transformation de l'équation (1.12). Pour plus de clarté désignons les composantes $\partial x^i / \partial \xi^j$ des vecteurs $\hat{\partial}_j$ dans le repère x, y, z par $\hat{\partial}_{jx}$, $\hat{\partial}_{jy}$, $\hat{\partial}_{jz}$. On a alors

$$[\hat{\partial}_1 \cdot (\hat{\partial}_2 \times \hat{\partial}_3)]^2 = \hat{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} \hat{\partial}_{1x} & \hat{\partial}_{1y} & \hat{\partial}_{1z} \\ \hat{\partial}_{2x} & \hat{\partial}_{2y} & \hat{\partial}_{2z} \\ \hat{\partial}_{3x} & \hat{\partial}_{3y} & \hat{\partial}_{3z} \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\partial}_{1x} & \hat{\partial}_{1y} & \hat{\partial}_{1z} \\ \hat{\partial}_{2x} & \hat{\partial}_{2y} & \hat{\partial}_{2z} \\ \hat{\partial}_{3x} & \hat{\partial}_{3y} & \hat{\partial}_{3z} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{\partial}_{1x} & \hat{\partial}_{2x} & \hat{\partial}_{3x} \\ \hat{\partial}_{1y} & \hat{\partial}_{2y} & \hat{\partial}_{3y} \\ \hat{\partial}_{1z} & \hat{\partial}_{2z} & \hat{\partial}_{3z} \end{vmatrix} = \operatorname{Det} \| \hat{g}_{ik} \| = \hat{g},$$

étant donné que

$$\hat{g}_{ik} = \hat{\partial}_i \cdot \hat{\partial}_k.$$

De même

$$[\mathring{\partial}_1 \cdot (\mathring{\partial}_2 \times \mathring{\partial}_3)]^2 = \operatorname{Det} \| \mathring{g}_{ik} \| = \mathring{g}.$$

et par conséquent (1.11) s'écrit sous la forme

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{\overset{\circ}{g}}{\hat{g}}}. \tag{1.13}$$

Les équations (1.11), (1.12), (1.13) sont les différentes formes de l'équation de continuité en variables de Lagrange.

Notons que la densité f de toute quantité Φ qui se conserve dans un volume individuel du milieu continu vérifie en général l'équation

$$f = f_0 \sqrt{\frac{\overset{\circ}{g}}{\hat{g}}} = f_0 \Delta, \tag{1.14}$$

où Δ est le déterminant de la matrice de transformation des variables x^i en variables x_0^i.

L'équation de continuité revêt un caractère très général et elle a lieu lors du mouvement de n'importe quel milieu matériel, sa forme ne dépendant pas des propriétés du milieu. Cette équation est également valable pour tous les milieux : l'eau, l'air, le métal, etc. Dans le cas du milieu compressible, l'équation de continuité (1.3) comprend quatre fonctions inconnues : la densité ρ et trois composantes de la vitesse. Pour le milieu incompressible l'équation (1.10) ne contient que trois fonctions inconnues, à savoir les composantes de la vitesse. Il va sans dire que l'équation de continuité à elle seule ne suffit pas à résoudre les problèmes de la mécanique des milieux continus. Passons maintenant à la déduction d'autres équations ayant lieu pour tout milieu continu mobile.

§ 2. Equations du mouvement du milieu continu

Entreprenons l'étude du mouvement des milieux continus matériels en liaison avec les causes qui le provoquent. A cet effet introduisons les forces qui sont des grandeurs vectorielles. Donnons la classification sommaire des forces rencontrées en mécanique des milieux continus, où la notion de force est plus complexe que dans la mécanique du point matériel et du système rigide invariable.

Forces concentrées et forces réparties. En mécanique rationnelle on a surtout affaire aux forces concentrées, c'est-à-dire aux forces finies appliquées à un point. En mécanique des milieux continus on se heurte le plus souvent à des forces réparties, agissant en chaque partie du volume V ou sur chaque élément de la surface Σ du milieu continu, le vecteur force principal appliqué à un élément de volume (ou de surface) tendant vers zéro lorsque cet élément tend vers zéro.

Les forces concentrées sont très rares en mécanique des milieux continus. De la deuxième loi de la mécanique de Newton

$$\mathsf{F} = \Delta m\, \boldsymbol{a},$$

où Δm est la masse d'un petit élément du milieu continu et $\boldsymbol{a}$ son accélération, il vient qu'une force concentrée n'existe qu'en un point où $\boldsymbol{a}$ (ou ρ) tend vers l'infini.

Forces volumiques ou forces massiques. Les forces réparties dans un volume V se nomment forces volumiques ou massiques. Désignons par F le vecteur principal des forces massiques appliquées à un élément de masse Δm. La densité $\boldsymbol{F}$ de la force massique en ce point est alors

$$\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\mathsf{F}}{\Delta m}.$$

Pour une petite particule

$$\mathsf{F} \approx \boldsymbol{F}\, \Delta m.$$

On envisage parfois la force $\boldsymbol{\Phi}$ appliquée non à l'unité de masse mais à celle de volume. Il est évident que

$$\boldsymbol{\Phi} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\mathsf{F}}{\Delta V},$$

c'est-à-dire que

$$\boldsymbol{\Phi} = \rho \boldsymbol{F},$$

$\boldsymbol{\Phi}\, dV$ et $\boldsymbol{F}\, dm$ ont les dimensions de la force ; $\boldsymbol{F}$ celle de l'accélération et $\boldsymbol{\Phi}$ celle de l'accélération multipliée par la dimension de la densité.

Les différentes espèces de forces massiques ne sont guère nombreuses. Ce sont la force de pesanteur (poids) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{\Phi} = \rho \boldsymbol{g}$ et toutes les forces de gravitation en général, régies par la loi de gravitation universelle de Newton ; les forces électromagnétiques ; les forces d'inertie que l'on introduit en étudiant les mouvements dans les systèmes de coordonnées non inertiaux et qui représentent, du point de vue du corps mobile, des forces massiques extérieures réelles ordinaires. Parfois lorsqu'on a affaire à des mouvements concrets du milieu continu on introduit à dessein les forces massiques. Ainsi, par exemple, en étudiant le mouvement du profil d'aile dans le fluide on peut admettre que le domaine occupé par le profil est également rempli de fluide, mais pour que ce fluide introduit artificiellement continue à se déplacer comme le profil d'aile, il faut appliquer à ce dernier les forces massiques réparties.

En mécanique du solide parfait, l'action de tout système de forces est équivalente à celle de son vecteur et de son moment principaux. En mécanique des milieux déformables, il est important de connaître le caractère de la répartition des forces sur le corps.

Forces surfaciques. En mécanique des milieux continus, ce sont les forces surfaciques, c'est-à-dire les forces réparties sur la surface du milieu continu, et non les forces massiques qui jouent le rôle principal. Ainsi, dans un récipient rempli d'eau on observe une interaction dynamique à la surface de contact de l'eau avec les parois du récipient. Soit $d\sigma$ un élément de la surface S. On peut introduire une force surfacique élémentaire $d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}\, d\sigma$, où $\boldsymbol{p} = \lim\limits_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta\sigma}$ est la densité des forces surfaciques appliquées à l'aire $d\sigma$. En chaque point de la surface S on peut définir la densité $\boldsymbol{p}$ de la force surfacique qui est en général différente en différents points.

Forces internes et forces extérieures. On distingue les forces internes et les forces extérieures. Des forces sont internes à un système lorsqu'elles sont engendrées par des corps appartenant à ce système, et extérieures si elles sont créées par des corps extérieurs par rapport au système dont le mouvement est envisagé.

La notion de forces extérieures et internes est relative. Ainsi, par exemple, lorsqu'on envisage ensemble le mouvement de l'air dans l'atmosphère terrestre et celui de la Terre, la pesanteur de l'air est la force interne. Si l'on ne considère que le mouvement de l'air, la force de la pesanteur est extérieure. De même, lorsqu'on étudie le mouvement d'un corps matériel et du champ magnétique, les forces électromagnétiques sont internes; si le mouvement du corps matériel est étudié isolément, le champ est un agent extérieur à ce corps, ainsi que les forces électromagnétiques.

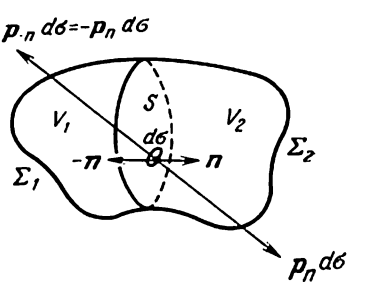


Fig. 23. Forces des contraintes internes

Forces des contraintes internes. Imaginons, dans un milieu continu, un volume arbitraire V et divisons-le par la section S en deux parties V_1 et V_2 (fig. 23). Si nous envisageons le mouvement d'une partie, de V_1 par exemple, nous devons remplacer l'action exercée sur cette dernière par V_2 par les forces massiques réparties dans V_1 et par les forces surfaciques réparties sur S. Les forces ainsi introduites sont extérieures à V_1. Si l'on envisage le mouvement du volu-

me V dans son ensemble, ces forces s'avèrent internes. La position de S étant arbitraire, les forces surfaciques réparties sur S diffèrent selon les S.

Fixons un point M à l'intérieur du corps et envisageons en ce point diverses surfaces élémentaires $d\sigma$. L'orientation de celles-ci est donnée par leur normale $\boldsymbol{n}$. Notons $d\boldsymbol{P}$ la force résultante qu'exerce la portion de milieu de volume V_2 sur la portion de milieu de volume V_1 sur la surface élémentaire $d\sigma$ de normale $\boldsymbol{n}$. Posons ensuite $d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_n\, d\sigma$, où $\boldsymbol{p}_n$ est un vecteur fini. Le vecteur $\boldsymbol{p}_n$ peut être considéré comme densité surfacique des forces d'interaction le long de la surface $d\sigma$ entre les portions séparées. En général, $\boldsymbol{p}_n$ dépend de l'orientation et d'autres caractéristiques géométriques de la surface élémentaire $d\sigma$. La normale $\boldsymbol{n}$ sera toujours orientée vers l'extérieur de la partie du milieu à laquelle s'applique la force introduite $\boldsymbol{p}_n d\sigma$. Ainsi, par exemple, l'action du volume V_2 sur V_1 est remplacée par les forces réparties $\boldsymbol{p}_n d\sigma$, celle de V_2 sur V_1 par $\boldsymbol{p}_{-n}\, d\sigma$ (fig. 23). Ces forces surfaciques sont définies en tout point du milieu continu et sont dites forces des *contraintes internes*.

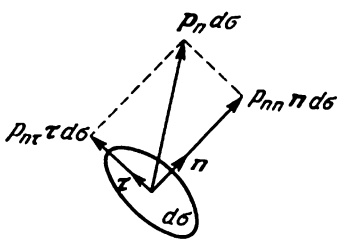


Fig. 24. Composantes normale et tangentielle des contraintes internes

En chaque point d'un milieu continu la force des contraintes internes $p_n d\sigma$ peut être décomposée en deux forces, l'une suivant la normale $\boldsymbol{n}$ et l'autre suivant la tangente $\boldsymbol{\tau}$ à la surface élémentaire $d\sigma$ (fig. 24) :

$$\boldsymbol{p}_n\, d\sigma = p_{nn}\boldsymbol{n}\, d\sigma + p_{n\tau}\boldsymbol{\tau}\, d\sigma,$$

où $p_{nn}\, d\sigma$ est la composante normale de la force des contraintes internes et $p_{n\tau}\, d\sigma$ sa composante tangentielle encore appelée force tangentielle, ou, dans le cas d'un fluide, force de frottement interne.

Les forces surfaciques $\boldsymbol{p}_n d\sigma$ peuvent être également des forces extérieures, c'est-à-dire des forces agissant sur la surface extérieure délimitant le milieu continu.

En chaque point M d'un milieu continu quelconque, il existe une infinité de vecteurs $\boldsymbol{p}_n$ correspondant à une infinité de surfaces élémentaires $d\sigma$ passant par ce point. Ils sont toutefois liés par une relation générale, indépendante des propriétés particulières du milieu mobile, que nous allons établir.

L'équation principale de la dynamique du point matériel se résume dans la loi fondamentale de la dynamique de Newton :

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{a}.$$

Nous avons à formuler une relation plus complexe qui est une généralisation directe de la loi fondamentale de la dynamique de Newton et qui permettra de décrire le mouvement du milieu matériel continu.

Equation de la quantité de mouvement pour un point matériel et pour un système de points. Envisageons le mouvement d'un point matériel de masse m par rapport au système de coordonnées x, y, z. Comme la masse m du point est constante, on a

$$m\frac{dv}{dt}=\frac{dmv}{dt}=\mathsf{F}. \tag{2.1}$$

Le produit de la masse par la vitesse, mv, est dit quantité de mouvement d'un point. L'équation de la quantité de mouvement pour un point matériel se lit : la dérivée de la quantité de mouvement du point matériel par rapport au temps est égale à la somme de toutes les forces appliquées à ce point.

A l'aide de l'équation fondamentale de la quantité de mouvement (2.1) on résout deux problèmes types : d'après les forces connues trouver la loi du mouvement du point, ou bien d'après la loi connue du mouvement déterminer la force exercée sur ce point.

Pour chaque point d'un système de n points matériels de masse m_i se déplaçant avec des vitesses v_i sous l'action de la force résultante F_i, l'équation de la quantité de mouvement (2.1) s'écrira

$$\frac{dm_iv_i}{dt}=\mathsf{F}_i,$$

où F_i comprend toutes les forces agissant sur le point numéro i, aussi bien extérieures qu'internes à tout le système de n points matériels. La sommation des équations de quantité de mouvement (2.1) de tous les n points donne

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{dm_iv_i}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}m_iv_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathsf{F}_i^{(e)},$$

où le membre de droite de l'équation représente la somme des forces exclusivement extérieures au système, car, d'après la troisième loi de Newton, les forces internes d'interaction existent par couples et s'annulent lors de la sommation.

La somme

$$Q=\sum_{i=1}^{n}m_iv_i=mv^*,$$

où $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ est la masse de tout le système et

$$v^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_i}{m}$$

est la vitesse du centre des masses du système de n points, est dite quantité de mouvement du système, et on a finalement l'équation suivante de la quantité de mouvement pour le système de n points matériels :

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i^{(e)} \quad \text{ou} \quad m\frac{dv^*}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{F}_i^{(e)}.$$

La dérivée de la quantité de mouvement du système de n points matériels par rapport au temps est égale à la somme de toutes les forces extérieures agissant sur le système. Autrement dit, le produit de la masse par l'accélération du centre des masses du système est égal à la somme de toutes les forces extérieures agissant sur le système.

Ainsi, on peut faire correspondre au mouvement de tout système de n points matériels celui d'un point matériel, centre des masses du système. Si le système est de dimensions restreintes, le mouvement du système de points peut être souvent ramené à celui d'un point, centre des masses du système pour les observateurs éloignés.

L'équation du mouvement du point matériel a une portée universelle s'appliquant à toutes sortes de systèmes mécaniques : galaxies, étoiles, planètes, avions, hommes, oiseaux, insectes, etc.

Equation de la quantité de mouvement pour un volume fini d'un milieu continu. Etendons maintenant l'équation de la quantité de mouvement au cas d'un volume individuel fini V d'un milieu continu limité par la surface Σ. Comme

$$\int_V \frac{d}{dt}(v\rho\, d\tau) = \int_M \frac{dv}{dt}\, dm = \frac{d}{dt}\int_M v\, dm = \frac{d}{dt}\int_V v\rho\, d\tau,$$

écrivons notre équation sous la forme

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V F\rho\, d\tau + \int_\Sigma p_n\, d\sigma,$$

où

$$Q = \int_V v\rho\, d\tau$$

est par définition la quantité de mouvement du milieu continu occupant le volume V et où

$$\int_V F\rho\, d\tau \quad \text{et} \quad \int_\Sigma p_n\, d\sigma$$

sont les sommes des forces massiques et surfaciques extérieures agissant sur le volume V du milieu.

Ainsi donc, pour tout volume V du milieu continu on peut écrire l'équation de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt}\int_V v\rho\, d\tau = \int_V F\rho\, d\tau + \int_\Sigma p_n\, d\sigma. \tag{2.2}$$

Autrement dit, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du volume V du milieu continu est égale à la somme de toutes les forces massiques et surfaciques extérieures appliquées à ce volume. Le volume V, isolé mentalement, est un volume substantiel mobile déformable arbitraire qui, par définition, est constitué des mêmes particules du milieu.

Si, outre les forces extérieures réparties, la masse dans le volume V subit les forces extérieures concentrées en un point ou le long de certaines lignes, leur somme doit être ajoutée au second membre de l'équation (2.2).

L'égalité (2.2) est un postulat dynamique principal de la mécanique des milieux continus. De même que le principe fondamental de la dynamique de Newton représente une équation de base dans la mécanique du point, l'équation de la quantité de mouvement (2.2) sert de base à la mécanique des milieux continus. Toutes les considérations précédentes doivent être envisagées en tant qu'hypothèses heuristiques reliant l'équation (2.2) pour le milieu continu à celle de Newton pour le point matériel.

L'équation (2.2) peut également se fonder sur le raisonnement qui suit. La formule $mv^* = \int_V v\rho\, d\tau$ permet d'introduire la vitesse du centre des masses du volume V du milieu continu et de présenter l'équation de la quantité de mouvement (2.2) comme celle du mouvement du centre des masses du volume individuel V du milieu continu :

$$m\frac{dv^*}{dt} = \int_V F\rho\, d\tau + \int_\Sigma p_n\, d\sigma.$$

Remarquons que la relation (2.2) est souvent appelée équation des impulsions, car elle se récrit sous la forme

$$d\int_V v\rho\, d\tau = \int_V F\rho\, d\tau\, dt + \int_\Sigma p_n\, d\sigma\, dt.$$

La relation (2.2) peut être envisagée comme l'égalité définissant les forces. En effet, toutes les lois connues régissant les forces sont déduites de cette équation qui est une généralisation de la loi fondamentale de la dynamique de Newton *). Ces lois sont suggérées par l'expérience ou s'obtiennent en recourant aux diverses hypothèses ou aux « expériences idéalisées » formulées comme généralisation des données pratiques. Après avoir établi les lois pour les forces selon (2.2) lors des recherches préalables, en d'autres cas, connaissant les forces, on trouve à partir de (2.2) des mouvements correspondant à ces forces.

L'équation de la quantité de mouvement (2.2) *est une équation fondamentale pour tous les mouvements du milieu continu*, y compris les mouvements discontinus, lorsque les caractéristiques du mouvement et du comportement du milieu continu ne sont pas partout dans le volume V des fonctions continues des coordonnées, ainsi que les processus de choc, lorsque les caractéristiques du mouvement et de l'état dans le volume envisagé sont des fonctions discontinues du temps.

En particulier, dans le domaine des mouvements continus, le théorème intégral de la quantité de mouvement (2.2) est équivalent aux équations différentielles du mouvement du milieu continu que nous établirons plus tard. L'équation (2.2) permet d'entrevoir également que les contraintes surfaciques $\boldsymbol{p}_n$ pour tous les milieux et tous les mouvements doivent satisfaire à certaines relations universelles que nous allons déduire.

Propriétés essentielles des contraintes internes. Commençons par dégager les restrictions qu'impose le théorème de la quantité de mouvement (2.2) à la forme éventuelle de la relation entre les contraintes $\boldsymbol{p}_n$ et l'orientation des surfaces élémentaires correspondantes, prises en un point donné, dans le cas des mouvements continus des milieux continus.

Imaginons un volume V et partageons-le par une surface quelconque S en deux parties V_1 et V_2 (fig. 23). Appliquant le théorème de la quantité de mouvement (2.2) à chacun des volumes V_1 et V_2 et à l'ensemble du volume V et sachant que l'interaction des parties séparées s'exerce soit à l'aide des forces massiques réparties, soit à l'aide des forces surfaciques réparties sur la section S qui se déplace avec les points individuels du milieu, on obtient

$$\int_{V_1} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \rho \, d\tau = \int_{V_1} \boldsymbol{F}' \rho \, d\tau + \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{p}_n \, d\sigma + \int_{S} \boldsymbol{p}_n \, d\sigma,$$

*) Le problème est examiné de plus près dans l'ouvrage de L. Sedov *Similarity and dimensional methods in mechanics.* New York, Academic Press, 1959.

$$\int_{V_2} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \rho \, d\tau = \int_{V_2} \boldsymbol{F}'' \rho \, d\tau + \int_{\Sigma_2} \boldsymbol{p}_n \, d\sigma + \int_S \boldsymbol{p}_{-n} \, d\sigma,$$

$$\int_V \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \rho \, d\tau = \int_V \boldsymbol{F} \rho \, d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n \, d\sigma,$$

où $\boldsymbol{F}'$ et $\boldsymbol{F}''$ désignent les densités des forces massiques réparties qui s'exercent sur les volumes V_1 et V_2 respectivement. Procédant à la sommation des deux premières égalités et soustrayant de la somme la troisième, en supposant de surcroît que les forces massiques internes vérifient la loi de l'action et de la réaction, c'est-à-dire

$$\int_{V_1} \boldsymbol{F}' \rho \, d\tau + \int_{V_2} \boldsymbol{F}'' \rho \, d\tau = \int_V \boldsymbol{F} \rho \, d\tau,$$

on obtient

$$\int_S (\boldsymbol{p}_n + \boldsymbol{p}_{-n}) \, d\sigma = 0.$$

D'où, étant donné que les volumes V, V_1, V_2 et la section S sont arbitraires, il s'ensuit que

$$\boldsymbol{p}_n = -\boldsymbol{p}_{-n}. \tag{2.3}$$

Il est à remarquer que l'hypothèse de la continuité du mouvement est de première importance. Par exemple, l'égalité (2.3), comme on le verra dans la suite (voir ch. VII), n'est pas vérifiée lorsque S est une surface de discontinuité de la vitesse $\boldsymbol{v}$, traversée par les particules du milieu matériel. Dans ce cas, les volumes V_1 et V_2 ne sont plus individuels et la relation (2.3) doit alors être remplacée par une autre.

Le théorème de la quantité de mouvement (2.2) s'applique à tout volume matériel V, y compris le volume infinitésimal. Etablissons les restrictions qu'impose aux fonctions sous le signe somme dans l'équation (2.2) l'applicabilité de cette équation, dans sa forme actuelle, à tout volume individuel du milieu continu *aussi petit que l'on veut*. Supposons à cet effet que les caractéristiques du mouvement soient finies et continues et composons l'expression

$$\Omega = \int_V \boldsymbol{F} \rho \, d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n \, d\sigma - \int_V \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \rho \, d\tau,$$

qui est identiquement nulle pour tout volume individuel V.

Il est clair que lorsqu'un volume V tend vers un point, on a l'égalité limite suivante indépendamment de la forme des fonctions sous le signe somme:

$$\lim_{V \to 0} \Omega = 0,$$

qui est remplie quelles que soient les fonctions finies placées sous le signe somme dans les termes composants.

Fixons maintenant à un instant donné un point quelconque M du milieu continu et faisons passer par ce point les droites parallèles aux axes cartésiens (fig. 25). Portons sur ces droites des segments arbitraires infiniment petits $dx = MA$, $dy = MC$ et $dz = MB$. Envisageons le volume V du tétraèdre infiniment petit $MABC$ construit de la sorte. Ses faces MBC, MAB et MAC sont perpendiculaires aux axes de coordonnées correspondants, la face ABC étant orientée de façon arbitraire. Son orientation se définit par le vecteur unitaire normal

$$\boldsymbol{n} = \cos(\boldsymbol{n}, x)\,\boldsymbol{i} + \cos(\boldsymbol{n}, y)\,\boldsymbol{j} + \cos(\boldsymbol{n}, z)\,\boldsymbol{k} = n_i \boldsymbol{\partial}^i.$$

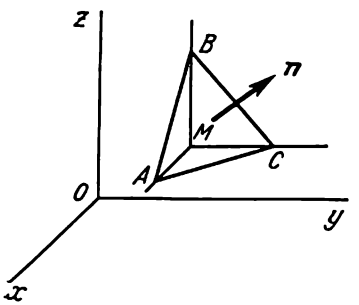


Fig. 25. Sur les propriétés des contraintes internes

Désignons par $\boldsymbol{p}^1$, $\boldsymbol{p}^2$, $\boldsymbol{p}^3$ et $\boldsymbol{p}_n$ les contraintes sur les surfaces élémentaires de normales $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}$ respectivement et par S l'aire de la face ABC. Les aires des faces MBC, MAB, MAC sont alors $S\cos(\boldsymbol{n}, x)$, $S\cos(\boldsymbol{n}, y)$, $S\cos(\boldsymbol{n}, z)$ et le volume du tétraèdre est $V = \frac{1}{3}hS$, où h est la hauteur abaissée du sommet M sur la face ABC. Quand le tétraèdre se réduit à un point tout en restant semblable à lui-même, h sera une quantité infiniment petite du premier ordre et S du second.

Calculons Ω pour le volume du milieu continu contenu à l'instant donné dans le volume de ce tétraèdre; en s'appuyant sur la propriété (2.3) des contraintes internes on obtient

$$\Omega = -\left(\frac{dv}{dt}\rho\right)_M \frac{1}{3}Sh + (F\rho)_M \frac{1}{3}Sh + \boldsymbol{p}_n S - \boldsymbol{p}^1 S\cos(\boldsymbol{n}, x) - \boldsymbol{p}^2 S\cos(\boldsymbol{n}, y) - \boldsymbol{p}^3 S\cos(\boldsymbol{n}, z) + O(h^{2+\lambda}),$$

où $\lambda > 0$. Supposons maintenant que le tétraèdre se réduise à un point tout en restant semblable à lui-même. Comme, selon (2.2), $\Omega = 0$, les égalités limites, en particulier

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Omega}{h} = 0, \quad \lim_{V\to 0}\frac{\Omega}{h^2} = 0, \quad \lim_{V\to 0}\frac{\Omega}{h^3} = 0$$

se vérifient. Dans le cas de caractéristiques continues et finies du mouvement, la première limite est nécessairement nulle, ce qui revient à dire qu'une fois de plus on n'obtient pas de restrictions à la forme éventuelle des fonctions sous le signe somme dans l'expres-

sion de Ω. En partant de la condition

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Omega}{S}=0$$

on voit que l'égalité

$$p_n = p^1\cos(n, x) + p^2\cos(n, y) + p^3\cos(n, z) \qquad (2.4)$$

est toujours vérifiée; cette égalité montre que la contrainte p_n sur toute surface élémentaire $d\sigma$ prise en un point M du milieu continu est une fonction linéaire des contraintes p^1, p^2, p^3 sur les aires choisies au point M parallèlement aux plans coordonnés du repère orthogonal cartésien.

La relation (2.4) montre également que la somme des forces surfaciques extérieures $\int\limits_{\Sigma} p_n\, d\sigma$ agissant sur un volume V du milieu continu limité par la surface Σ peut être transformée à l'aide de la formule de Gauss-Ostrogradsky en une intégrale de volume:

$$\int\limits_{\Sigma} p_n\, d\sigma = \int\limits_{V}\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}+\frac{\partial p^2}{\partial y}+\frac{\partial p^3}{\partial z}\right)d\tau. \qquad (2.5)$$

Equations du mouvement du milieu continu dans le système de coordonnées cartésiennes. Analysons enfin la condition

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Omega}{V}=0.$$

En s'appuyant sur (2.5) on peut présenter Ω sous la forme

$$\Omega=\int\limits_{V} F\rho\, d\tau+\int\limits_{V}\left(\frac{\partial p^1}{\partial x}+\frac{\partial p^2}{\partial y}+\frac{\partial p^3}{\partial z}\right)d\tau-\int\limits_{V}\frac{dv}{dt}\rho\, d\tau;$$

il s'ensuit alors de la condition

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Omega}{V}=0$$

que

$$\rho\frac{dv}{dt}=\rho F+\frac{\partial p^1}{\partial x}+\frac{\partial p^2}{\partial y}+\frac{\partial p^3}{\partial z}. \qquad (2.6)$$

Cette expression vectorielle est une équation différentielle fondamentale du mouvement du milieu continu. Elle est vérifiée pour les mouvements continus des milieux quelconques et, dans le cas de ces derniers, est équivalente à l'équation de la quantité de mouvement (2.2), car elle stipule que $\Omega = 0$ pour tout volume V. Soulignons qu'on obtient les égalités (2.6) et (2.5) à condition d'admettre la continuité et la dérivabilité des vecteurs p^i. L'équation (2.2) est postulée pour les cas plus généraux.

Décomposons les vecteurs $\boldsymbol{p}^1$, $\boldsymbol{p}^2$, $\boldsymbol{p}^3$ suivant les vecteurs de base $\boldsymbol{\partial}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\partial}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{\partial}_3 = \boldsymbol{k}$ du repère cartésien :

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{p}^1 &= p^{k1}\boldsymbol{\partial}_k, \\ \boldsymbol{p}^2 &= p^{k2}\boldsymbol{\partial}_k, \\ \boldsymbol{p}^3 &= p^{k3}\boldsymbol{\partial}_k, \end{aligned}\right\} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{p}^i = p^{ki}\boldsymbol{\partial}_k, \tag{2.7}$$

et introduisons la matrice

$$\begin{Vmatrix} p^{11} & p^{12} & p^{13} \\ p^{21} & p^{22} & p^{23} \\ p^{31} & p^{32} & p^{33} \end{Vmatrix} = \| p^{ik} \| = P$$

composée de neuf nombres. Conformément à (2.4), les composantes p_n^i de la contrainte

$$\boldsymbol{p}_n = p_n^1\boldsymbol{\partial}_1 + p_n^2\boldsymbol{\partial}_2 + p_n^3\boldsymbol{\partial}_3 = p_n^i\boldsymbol{\partial}_i$$

sur une aire arbitrairement orientée prise en un point fixe du milieu se calculent à partir des formules

$$\left.\begin{aligned} p_n^1 &= p^{11}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p^{12}\cos(\boldsymbol{n}, y) + p^{13}\cos(\boldsymbol{n}, z) = p^{1i}n_i, \\ p_n^2 &= p^{21}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p^{22}\cos(\boldsymbol{n}, y) + p^{23}\cos(\boldsymbol{n}, z) = p^{2i}n_i, \\ p_n^3 &= p^{31}\cos(\boldsymbol{n}, x) + p^{32}\cos(\boldsymbol{n}, y) + p^{33}\cos(\boldsymbol{n}, z) = p^{3i}n_i. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

La matrice P représente la transformation des composantes n_i du vecteur $\boldsymbol{n} = n_i\boldsymbol{\partial}^i$ en composantes p_n^i du vecteur $\boldsymbol{p}_n$.

Les neuf fonctions p^{ik} entrent dans l'équation vectorielle (2.6) du mouvement du milieu continu qui, projetée sur les axes du repère cartésien, s'écrit

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{du}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{12}}{\partial y} + \frac{\partial p^{13}}{\partial z}, \\ \rho\frac{dv}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial p^{21}}{\partial x} + \frac{\partial p^{22}}{\partial y} + \frac{\partial p^{23}}{\partial z}, \\ \rho\frac{dw}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial p^{31}}{\partial x} + \frac{\partial p^{32}}{\partial y} + \frac{\partial p^{33}}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

où l'on désigne par F_x, F_y, F_z les projections de la densité de la force massique $\boldsymbol{F}$ sur les axes de coordonnées.

Si l'on ajoute à ces équations l'équation de continuité (1.3), on obtient un système de quatre équations qui comprend en général, lorsque les forces massiques extérieures sont données, treize fonctions inconnues : la densité ρ, les composantes de la vitesse u, v, w et les neuf composantes des contraintes surfaciques internes p^{ik}.

Tenseur des contraintes. La relation (2.4) qui exprime la dépendance du vecteur des contraintes $\boldsymbol{p}_n$ agissant sur une aire arbitrairement orientée des vecteurs des contraintes $\boldsymbol{p}^1$, $\boldsymbol{p}^2$, $\boldsymbol{p}^3$ sur les aires

coordonnées peut être récrite à l'aide de (2.8) sous la forme

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}^i n_i = p^{ki} \boldsymbol{\partial}_k n_i = \boldsymbol{p}^i (\boldsymbol{\partial}_i \cdot \boldsymbol{n}) = p^{ki} \boldsymbol{\partial}_k (\boldsymbol{\partial}_i \cdot \boldsymbol{n}). \qquad (2.10)$$

L'égalité ci-dessus donne une transformation linéaire (avec les coefficients p^{ki}) des composantes du vecteur $\boldsymbol{n}$ en composantes du vecteur $\boldsymbol{p}_n$. Elle est obtenue dans les coordonnées orthogonales cartésiennes et, par suite, les p^{ki} ont été définis dans des repères orthogonaux cartésiens arbitraires. La formule (2.10) traduit la relation entre les vecteurs $\boldsymbol{p}_n$ et $\boldsymbol{n}$ et est donc valable dans n'importe quel système de coordonnées curvilignes. Par conséquent l'équation (2.10) permet d'introduire les quantités p^{ki} non seulement dans les axes de coordonnées cartésiens mais également dans tout repère curviligne arbitraire. Les quantités p^{ki} doivent alors être envisagées en tant que composantes contravariantes du tenseur

$$P = p^{ki} \boldsymbol{\partial}_k \boldsymbol{\partial}_i.$$

Ce tenseur est appelé tenseur des contraintes internes. En même temps dans n'importe quel système de coordonnées se vérifie l'égalité

$$\boldsymbol{p}_n = P \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}^i n_i,$$

où $\boldsymbol{p}_n$ est une contrainte sur une aire quelconque de normale $\boldsymbol{n}$, et n_i sont les composantes covariantes de $\boldsymbol{n}$.

Composantes physiques du vecteur des contraintes. Notons que l'égalité $\boldsymbol{p}^i = \boldsymbol{p}_n$ n'est vérifiée en général sur les aires coordonnées que dans le système de coordonnées orthogonales cartésiennes; on s'apercevra sans peine que dans un repère curviligne quelconque on a $\boldsymbol{p}^i \neq \boldsymbol{p}_n$ sur les aires coordonnées correspondantes.

En effet, examinons dans un système de coordonnées curvilignes donné une aire définie par les vecteurs de base $\boldsymbol{\partial}_{i+1}$ et $\boldsymbol{\partial}_{i+2}$ (les indices sont définis module 3). Définissons le sens positif de la normale à cette aire comme celui du vecteur de base contravariant

$$\boldsymbol{\partial}^i = \frac{\boldsymbol{\partial}_{i+1} \times \boldsymbol{\partial}_{i+2}}{\sqrt{g}}.$$

Le vecteur unitaire de ce sens sera évidemment donné par la formule

$$\boldsymbol{n}^i = \frac{\boldsymbol{\partial}^i}{\sqrt{g^{ii}}},$$

où $g^{ii} > 0$; on prendra ici et plus loin la valeur positive de la racine carrée. Conformément à (2.10) le vecteur contrainte $\boldsymbol{p}_n$, sur cette aire, que nous désignerons par $\boldsymbol{p}_i^*$ se récrit

$$\boldsymbol{p}_i^* = \frac{p^{\alpha k} \boldsymbol{\partial}_\alpha (\boldsymbol{\partial}_k \cdot \boldsymbol{\partial}^i)}{\sqrt{g^{ii}}} = \frac{p^{\alpha i} \boldsymbol{\partial}_\alpha}{\sqrt{g^{ii}}},$$

et par conséquent il n'est en général pas égal au vecteur $p^i = p^{\alpha i}\partial_\alpha$. Le vecteur contrainte p_i^* peut être décomposé suivant les vecteurs de base unitaires $\partial_\alpha/\sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ pris au point considéré :

$$p_i^* = X^{\alpha i}\frac{\partial_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}.$$

Les quantités $X^{\alpha i}$ sont dites composantes physiques du vecteur contrainte p_i^*. Conformément aux deux dernières égalités on aura

$$p^{\alpha i} = X^{\alpha i}\sqrt{\frac{g^{ii}}{g_{\alpha\alpha}}},$$

où il n'y a pas de sommation sur α. Il est alors évident que les composantes physiques $X^{\alpha i}$ ne sont pas celles d'un tenseur.

Dans le système de coordonnées orthogonales cartésiennes $p^{\alpha i} = X^{\alpha i}$.

Equations du mouvement du milieu continu dans un système de coordonnées arbitraire. L'équation vectorielle de la quantité de mouvement (2.2)

$$\int_V \rho\frac{dv}{dt}\,d\tau = \int_V F\rho\,d\tau + \int_\Sigma p_n\,d\sigma$$

et le théorème de Gauss-Ostrogradsky

$$\int_\Sigma p_n\,d\sigma = \int_\Sigma p^i n_i\,d\sigma = \int_V \nabla_i p^i\,d\tau$$

permettent de voir que pour les mouvements continus sont nécessairement vérifiées les équations du mouvement

$$\rho a = \rho F + \nabla_i p^i \quad \text{ou} \quad \rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki} \tag{2.11}$$

valables dans tout repère curviligne.

Dans les équations du mouvement (2.11) on a

$$a^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i\nabla_i v^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i\left(\frac{\partial v^k}{\partial \eta^i} + v^s\Gamma^k_{si}\right)$$

et

$$\nabla_i p^i = \frac{\partial p^i}{\partial \eta^i} + p^s\Gamma^i_{si} = (\nabla_i p^{ki})\,\partial_k.$$

L'équation vectorielle (2.11) est vraie dans tout système de coordonnées mobile ou immobile, tant dans le système de référence que dans le repère concomitant. Il ne faut pourtant jamais perdre de vue que le vecteur a représente l'accélération des points individuels du milieu par rapport à un système de coordonnées inertial quelconque et F la densité de forces massiques données. Si le mouvement et l'accélération sont envisagés relativement au système non inertial, l'expression pour F doit comprendre les forces d'inertie.

Fixons dans un milieu continu une particule infiniment petite de masse $\rho\, d\tau$ soumise à l'action des forces massiques $\rho \boldsymbol{F}\, d\tau$, des forces $-\rho \boldsymbol{a}\, d\tau$ qui sont inertiales dans le système concomitant, et des forces $\nabla_i \boldsymbol{p}^i\, d\tau = (\nabla_i p^{ki})\, \boldsymbol{e}_k\, d\tau$, qui peuvent être envisagées comme des forces massiques dues à l'action des forces surfaciques exercées sur la particule. L'équation (2.11) se présente alors comme une condition d'équilibre relativement au système concomitant; conformément à (2.11), la somme de toutes les forces exercées sur la particule est nulle.

Notons que $\nabla_i \boldsymbol{p}^i = 0$ si le tenseur $P = p^{ki}\, \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_i$ est constant en tout point du milieu. Dans le système de coordonnées cartésiennes, les composantes du tenseur des contraintes p^{ki} ne font partie de l'équation du mouvement que si elles varient en fonction des coordonnées x, y, z. Toutefois l'égalité

$$\nabla_i \boldsymbol{p}^i = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla_i p^{ki} = 0$$

et l'égalité $P = p^{ki} \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_i = \text{const}$ ne sont pas équivalentes. Si par exemple un milieu n'est pas soumis aux forces massiques et se trouve au repos, on a

$$\nabla_i p^{ki} = 0.$$

Cette formule est une équation fondamentale de la théorie de l'élasticité où se posent souvent des problèmes concernant l'équilibre des corps soumis uniquement aux forces surfaciques extérieures.

§ 3. Equations des moments cinétiques

On a vu plus haut que le système d'équations universelles du mouvement du milieu continu obtenu n'est pas encore complet. On peut obtenir d'autres équations générales qui ne dépendent pas des propriétés particulières du milieu mobile. Envisageons dans cette perspective une autre équation générale de la mécanique, celle des moments cinétiques.

Equation des moments cinétiques pour le point matériel et pour le système de points. Multipliant vectoriellement à gauche l'équation

$$m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathsf{F}$$

par le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ du point matériel envisagé de masse m par rapport au point O, origine d'un certain système inertial, on obtient l'équation des moments cinétiques pour un point

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \mathfrak{M}, \tag{3.1}$$

où

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} \quad \text{et} \quad \mathfrak{M} = \boldsymbol{r} \times \mathsf{F}$$

sont respectivement le moment cinétique d'un point et le moment par rapport au point O de la force résultante F exercée sur ce point. Ainsi l'équation des moments cinétiques d'un point matériel représente une conséquence triviale du principe fondamental de la dynamique de Newton.

Soit un système de n points matériels de masses m_i se déplaçant aux vitesses v_i. L'équation des moments cinétiques (3.1) peut alors être écrite pour chacun de ces points

$$\frac{d}{dt}(r_i \times m_i v_i) = r_i \times \mathsf{F}_i,$$

où F_i est le vecteur principal de toutes les forces agissant sur le point considéré de masse m_i, y compris les forces internes au système. En faisant la somme de ces égalités pour tous les n points du système et définissant le moment cinétique du système comme

$$K = \sum_{i=1}^{n} (r_i \times m_i v_i),$$

on obtient l'équation recherchée des moments cinétiques pour le système des points

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (r_i \times \mathsf{F}_i^{(e)}).$$

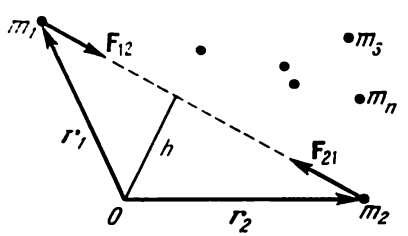


Fig. 26. Le moment résultant de toutes les forces internes par rapport au point O est nul

En raison du principe newtonien de l'action et de la réaction (fig. 26) on aura à droite la somme des moments des forces extérieures au système seulement. La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du système de points relativement à un point O est égale à la somme des moments de toutes les forces extérieures au système par rapport au même point O.

Notons que le moment cinétique du système de points matériels peut être écrit sous la forme

$$K = r^* \times m v^* + \sum_{i=1}^{n} (r_{i\,\mathrm{rel}} \times m_i v_{i\,\mathrm{rel}}),$$

où $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, r^* est le rayon vecteur du centre des masses du système, v^* la vitesse du centre des masses, $r_{i\,\mathrm{rel}}$ le rayon vecteur du i-ième point par rapport au centre des masses, $v_{i\,\mathrm{rel}}$ la vitesse du i-ième point par rapport au système de coordonnées animé d'un mouvement de translation avec le centre des masses.

Moment cinétique d'un volume fini du milieu continu ; moments cinétiques propres. On appelle moment cinétique d'un volume V du milieu continu l'expression

$$K = \int_V r \times v\rho\, d\tau, \tag{3.2}$$

où r sont des rayons vecteurs des points du milieu continu par rapport à un point immobile O et v leurs vitesses. Envisageons le problème de plus près.

Soit dans un milieu continu un volume τ quelconque de masse m. Il est évident que la vitesse v d'un point arbitraire M de ce volume peut être représentée (fig. 27) comme la somme

$$v = v^* + v_{\text{rel}},$$

où v^* est la vitesse du centre des masses O^* du volume τ, v_{rel} la vitesse du point considéré par rapport au centre des masses. Le moment cinétique du volume τ par rapport au point O est alors égal à la somme du moment cinétique par rapport au point O du point matériel de masse m s'identifiant avec le centre des masses du volume et du moment cinétique de tous les points M du volume τ par rapport au centre des masses O^*, c'est-à-dire que

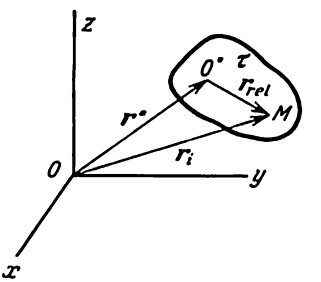


Fig. 27. Sur l'équation des moments cinétiques pour un volume fini du milieu continu

$$K = r^* \times Q + \int_\tau r_{\text{rel}} \times v_{\text{rel}}\rho\, d\tau,$$

où $Q = mv^*$ est la quantité de mouvement du point matériel de masse m coïncidant avec le centre des masses, ou encore

$$K = r^* \times Q + K^*,$$

$$K^* = \int_\tau r_{\text{rel}} \times v_{\text{rel}}\rho\, d\tau.$$

Reprenons notre étude avec un volume infinitésimal $d\tau$. Dans nombre de cas on peut négliger le moment cinétique K^* d'un volume infinitésimal en comparaison avec $r^* \times Q$. Par exemple, en représentant $d\tau$ comme une sphère infiniment petite homogène de rayon R tournant à la vitesse angulaire ω autour de l'axe passant par son centre O^*, on a

$$K^* = I\omega = ml^2\omega,$$

où I est le moment d'inertie, l le rayon de giration de la sphère par rapport à son axe de rotation. On voit que ml^2 est de l'ordre de R^5,

$\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q}$ de l'ordre de R^3 et $\boldsymbol{K}^*$, pourvu que ω soit fini, est petit par rapport à $\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q}$. Le moment cinétique du volume du milieu continu $\boldsymbol{K}$ est égal à la limite à

$$\int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\rho \, d\tau.$$

Pourtant, si la vitesse angulaire ω est si grande que ωl^2 est fini, $\boldsymbol{K}^*$ et $\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{Q}$ sont chacun de l'ordre de R^3 et le moment cinétique du volume V du milieu continu doit être égal à

$$\boldsymbol{K} = \int_V \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\rho \, d\tau + \int_V \boldsymbol{k}\rho \, d\tau, \tag{3.3}$$

$\boldsymbol{k}$ représente ici la densité de moments cinétiques dits propres, ou internes.

Du point de vue macroscopique physique le problème étudié se présente comme suit.

Examinons un système composé d'un noyau et d'un électron qui se déplace autour de ce noyau, c'est-à-dire un atome. L'électron tourne sur l'orbite à une vitesse comparable à celle de la lumière, c'est pourquoi malgré les dimensions restreintes de l'atome le système noyau — électron possède un moment cinétique propre considérable. Le moment cinétique engendré par la rotation de l'électron sur l'orbite est appelé moment cinétique orbital.

Outre cela, l'électron ainsi que le noyau possède un moment cinétique propre — le spinor — dont la présence ne peut être expliquée par un mouvement mécanique approprié.

Comme on le voit, tous les atomes ont des moments cinétiques propres $\boldsymbol{k}$ mais la somme en est souvent nulle à cause du mouvement chaotique des atomes. On arrive pourtant à systématiser le mouvement des particules élémentaires en y appliquant par exemple un champ magnétique, la somme des moments internes pour tous les atomes diffère alors de zéro. En l'occurrence, l'expression du moment cinétique de la particule macroscopique doit, rigoureusement parlant, comprendre la somme des moments cinétiques propres:

$$\boldsymbol{K}' = \int_V \boldsymbol{k}\rho \, d\tau.$$

Ainsi donc, si l'on veut décrire les mouvements des milieux réels dans les champs électromagnétiques, on est obligé d'introduire les moments propres $\boldsymbol{k}$ et de déterminer le moment cinétique du volume V du milieu continu, compte tenu de ces moments d'après (3.3).

L'on n'a entrepris que très récemment l'étude des moments cinétiques propres, lorsque la mécanique des milieux continus s'est vue confrontée à des problèmes dont la solution est rendue indispensable par la technique moderne. En mécanique classique, les moments

internes k ne sont pas pris en considération et le moment cinétique du volume V du milieu continu s'obtient comme

$$\int_V r \times v\rho\, d\tau.$$

Couples massiques et surfaciques répartis. En introduisant les moments internes k on admet de ce fait l'existence de couples massiques et surfaciques répartis.

Chaque particule du milieu continu est soumise à l'action de forces massiques et surfaciques réparties. Il se peut pourtant que l'action qu'exercent sur la particule des corps matériels extérieurs ne soit pas constituée uniquement par ces forces et l'introduction de couples massiques et surfaciques devient alors indispensable.

Notons par h et Q_n les moments des couples massiques et surfaciques rapportés à l'unité de masse. L'exemple des couples massiques distribués est fourni par les couples agissant sur chaque élément de l'aiguille de la boussole située dans le champ magnétique de la Terre.

Equation des moments cinétiques pour un volume fini du milieu continu. Ecrivons maintenant l'équation des moments cinétiques pour un volume individuel fini V délimité par la surface Σ en tant que généralisation des équations des moments cinétiques pour un point matériel et pour un système de points:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V r \times v\rho\, d\tau + \int_V k\rho\, d\tau\right) = \int_V r \times F\rho\, d\tau + \\ + \int_\Sigma r \times p_n\, d\sigma + \int_V h\rho\, d\tau + \int_\Sigma Q_n\, d\sigma. \quad (3.4)$$

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du volume individuel arbitraire V du milieu continu (compte tenu des moments propres) est égale à la somme des moments des forces massiques et surfaciques extérieures exercées sur ce volume plus la somme des moments des couples massiques et surfaciques répartis appliqués au volume et qui sont dus aux corps matériels extérieurs au volume.

L'équation des moments cinétiques tout comme l'équation de la quantité de mouvement est postulée pour un volume individuel V du milieu continu de la même façon que la loi de Newton $\mathsf{F} = ma$ pour un point matériel. Soulignons toutefois que l'équation des moments cinétiques pour un volume individuel V du milieu continu, loin d'être déduite de celle des moments cinétiques de la mécanique du système de points matériels, s'en avère tout à fait indépendante. Toutes les considérations qui précèdent la formule doivent être envisagées exclusivement comme heuristiques.

L'équation (3.4) pour des volumes individuels finis arbitraires est considérée, de même que celle de la quantité de mouvement,

comme l'équation vectorielle fondamentale de la mécanique des milieux continus. Cette équation est valable pour tous les milieux continus et pour tous les mouvements, qu'ils soient continus ou qu'ils soient discontinus dans les coordonnées des points de l'espace et dans le temps.

L'on se voit obligé à l'heure actuelle d'envisager d'autres moments d'ordres plus élevés et de formuler d'autres relations fondamentales de la mécanique des milieux continus analogues à l'équation des moments cinétiques (3.4) de premier ordre.

Equation des moments cinétiques dans le cas classique. Dans le cas classique, c'est-à-dire en l'absence de moments cinétiques internes et de couples massiques et surfaciques répartis, l'équation des moments cinétiques a la forme

$$\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{r}\times \boldsymbol{v}\rho\, d\tau = \int_V \boldsymbol{r}\times \boldsymbol{F}\rho\, d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{r}\times \boldsymbol{p}_n\, d\sigma. \tag{3.5}$$

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un volume individuel V relativement à un point O (rattaché au système inertial de coordonnées) est égale à la somme des moments, par rapport au même point O, des forces massiques et surfaciques extérieures qui s'exercent sur ce volume.

En l'absence de forces extérieures on a évidemment

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = 0,$$

donc le moment cinétique $\boldsymbol{K}$ est constant.

Effet gyromagnétique et équation des moments cinétiques. Analysons une expérience qui permet de voir qu'il faut en général tenir compte des moments cinétiques internes et des couples massiques répartis. Si l'on place une barre de fer dans un champ magnétique, cette barre s'aimante et on peut montrer que la somme des moments internes $\boldsymbol{k}$ n'y est plus nulle.

En effet, laissons cette barre au repos, librement suspendue dans le vide en présence du champ magnétique. Enlevons ensuite le champ magnétique. Vu le mouvement calorifique chaotique, la répartition des moments internes $\boldsymbol{k}$ dans la barre devient chaotique au bout d'un certain temps et la somme des moments cinétiques internes s'annule.

En outre, comme la barre n'est pas soumise aux forces extérieures, le moment cinétique total doit se conserver. Un moment cinétique doit alors se créer qui aura pour effet la rotation de la barre.

L'expérience montre qu'après la disparition du champ magnétique la barre commence effectivement à tourner. Il s'agit de l'effet

dit gyromagnétique ; il n'est pas explicable si l'on ne tient pas compte des moments cinétiques internes, et des couples massiques répartis.

Equation des moments cinétiques sous forme différentielle. Dans le cas des mouvements continus du milieu continu on peut faire appel à l'égalité (2.4) et au théorème de Gauss-Ostrogradsky pour obtenir pour la somme des moments des forces surfaciques extérieures l'intégrale étendue au volume V :

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n \, d\sigma = \int_{\Sigma} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^i) \, n_i \, d\sigma = \int_{V} \nabla_i (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^i) \, d\tau.$$

On peut montrer que, de même que les contraintes internes $\boldsymbol{p}_n$, les moments des couples surfaciques répartis $\boldsymbol{Q}_n$ peuvent être représentés sous la forme

$$\boldsymbol{Q}_n = \boldsymbol{Q}^i n_i.$$

Conformément au théorème de Gauss-Ostrogradsky on obtient alors

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{Q}_n \, d\sigma = \int_{\Sigma} \boldsymbol{Q}^i n_i \, d\sigma = \int_{V} \nabla_i \boldsymbol{Q}^i \, d\tau.$$

Recourons également à la transformation

$$\int_{V} \nabla_i (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^i) \, d\tau = \int_{V} \boldsymbol{r} \times \nabla_i \boldsymbol{p}^i \, d\tau + \int_{V} \nabla_i \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}^i \, d\tau =$$

$$= \int_{V} \boldsymbol{r} \times \nabla_i \boldsymbol{p}^i \, d\tau + \int_{V} (\boldsymbol{\vartheta}_i \times \boldsymbol{\vartheta}_k) \, p^{ki} \, d\tau,$$

car $\nabla_i \boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} = \boldsymbol{\vartheta}_i$.

On peut alors récrire le théorème des moments cinétiques (3.4) comme suit, à condition que la masse $dm = \rho \, d\tau$ soit constante :

$$\int_{V} \left[\boldsymbol{r} \times \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \nabla_i \boldsymbol{p}^i \right) \right] \rho \, d\tau + \int_{V} \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \rho \, d\tau =$$

$$= \int_{V} \boldsymbol{h} \rho \, d\tau + \int_{V} \nabla_i \boldsymbol{Q}^i \, d\tau + \int_{V} (\boldsymbol{\vartheta}_i \times \boldsymbol{\vartheta}_k) \, p^{ki} \, d\tau$$

ou encore, en vertu de l'équation de la quantité de mouvement (2.11),

$$\int_{V} \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \rho \, d\tau = \int_{V} \boldsymbol{h} \rho \, d\tau + \int_{V} \nabla_i \boldsymbol{Q}^i \, d\tau + \int_{V} (\boldsymbol{\vartheta}_i \times \boldsymbol{\vartheta}_k) \, p^{ki} \, d\tau.$$

Comme le volume V du milieu continu est arbitraire, on parvient alors à une forme différentielle de l'équation des moments cinéti-

ques pour le cas des mouvements continus:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \rho \boldsymbol{h} + \nabla_i \boldsymbol{Q}^i + (\boldsymbol{\partial}_i \times \boldsymbol{\partial}_k)\, p^{ki}. \tag{3.6}$$

Dans le cas classique, lorsqu'on néglige les moments internes et les couples massiques et surfaciques répartis, l'équation des moments cinétiques (3.6) prend la forme

$$(\boldsymbol{\partial}_i \times \boldsymbol{\partial}_k)\, p^{ki} = 0. \tag{3.7}$$

Symétrie du tenseur des contraintes dans le cas classique. Manifestement, l'équation des moments (3.7) peut encore être récrite sous la forme

$$\underset{k<i}{(\boldsymbol{\partial}_i \times \boldsymbol{\partial}_k)}\, p^{ki} + \underset{k>i}{(\boldsymbol{\partial}_i \times \boldsymbol{\partial}_k)}\, p^{ki} = 0.$$

Intervertissons dans la dernière somme les indices de sommation k et i, on a

$$\underset{k<i}{(\boldsymbol{\partial}_i \times \boldsymbol{\partial}_k)}\, p^{ki} + \underset{k<i}{(\boldsymbol{\partial}_k \times \boldsymbol{\partial}_i)}\, p^{ik} = 0$$

ou conformément à la propriété des produits vectoriels

$$\underset{k<i}{(\boldsymbol{\partial}_i \times \boldsymbol{\partial}_k)}\, (p^{ki} - p^{ik}) = 0.$$

Il s'ensuit que $p^{ki} = p^{ik}$ si $k \neq i$, c'est-à-dire que

$$p^{13} = p^{31}, \quad p^{12} = p^{21}, \quad p^{23} = p^{32}.$$

Ainsi donc, l'équation classique des moments a pour conséquence la symétrie du tenseur des contraintes. Il est évident que l'équation des moments cinétiques (3.7) est identiquement satisfaite si le tenseur des contraintes est symétrique. Soulignons que la symétrie du tenseur des contraintes ne découle généralement de l'équation des moments cinétiques qu'en l'absence de moments cinétiques internes et de couples massiques et surfaciques répartis.

Rappelons que l'on a obtenu plus haut quatre équations universelles décrivant le mouvement du milieu continu. Maintenant on voit s'y ajouter trois équations des moments cinétiques. Dans le cas classique, ces trois équations complémentaires ne contiennent pas de nouvelles inconnues mais réduisent à six le nombre de composantes indépendantes du tenseur des contraintes.

Le système d'équations du mouvement que l'on a obtenu n'est pas complet pour autant. On verra par la suite qu'on peut dans certains cas écrire pour les composantes du tenseur des contraintes p^{ik} des formules complémentaires liées aux particularités physiques des modèles concrets des milieux continus, ce qui permet de progresser considérablement vers un système d'équations complet.

Faisons encore une remarque d'ordre général sur les notions de vecteur quantité de mouvement $\boldsymbol{Q}$ et de moment cinétique $\boldsymbol{K}$. En

mécanique newtonienne, les vecteurs $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{K}$ sont envisagés comme invariants, car ces grandeurs et les équations correspondantes se conservent en passant d'un système de coordonnées à l'autre, quel qu'il soit, cartésien ou curviligne, immobile par rapport au premier. Pourtant ces êtres « invariants » sont essentiellement liés au choix du système de référence de l'observateur. Lors du passage d'un référentiel à un autre qui se déplace par rapport au système initial, ces vecteurs varient même si ce passage s'effectue d'un système inertial à un autre, inertial lui aussi.

Dans le cas général, si l'on passe à un système mobile arbitraire (non inertial), les équations correspondantes et notamment celles de la quantité de mouvement et des moments cinétiques se trouvent modifiées : dans les seconds membres apparaissent les forces inertiales extérieures complémentaires.

Bien que les vecteurs $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{K}$ soient invariants comme il est entendu plus haut, ils ne peuvent toutefois être définis indépendamment du choix du système de référence dans la classe des systèmes mobiles les uns par rapport aux autres *). Si l'on envisage tous les processus se déroulant dans un milieu dans le système de coordonnées concomitant, la quantité de mouvement dans ce système est constamment nulle.

§ 4. Axes principaux et composantes principales du tenseur des contraintes symétrique

Surface tensorielle du tenseur des contraintes. Construisons la surface tensorielle du tenseur des contraintes. A cet effet, fixons un point O du milieu et envisageons les aires $d\sigma$ passant par ce point, caractérisées par les différentes normales $\boldsymbol{n}$. A chacune de ces aires est appliquée la force surfacique de densité $\boldsymbol{p}_n$ appelée parfois vecteur des contraintes, ou contrainte. En projetant la contrainte $\boldsymbol{p}_n$ sur la normale correspondante $\boldsymbol{n}$ on obtient

$$p_{nn} = \boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{p}^i \cdot \boldsymbol{n})\, n_i = p^{ki} n_k n_i.$$

Utilisons pour plus de simplicité le système de coordonnées cartésiennes où, comme on le sait, la disposition des indices n'entre pas en ligne de compte. Introduisons les vecteurs $\boldsymbol{r} = x_i \boldsymbol{a}^i$ issus du point O et dirigés suivant la normale $\boldsymbol{n}$; il est évident qu'alors $n_i =$

*) Cette circonstance (la dépendance des équations et des caractéristiques globales de $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{K}$ du choix du référentiel) se manifeste surtout dans la théorie de la relativité générale, d'une part à cause de la complication accrue du problème consistant à sommer les trivecteurs donnés en différents points de l'espace riemannien, et d'autre part du fait qu'il s'avère physiquement impossible d'indiquer des référentiels qui aient quelque avantage majeur sur les autres ni le temps propre pour des volumes finis du milieu.

$= \cos(\boldsymbol{n}, x_i) = x_i/r$. Choisissons la longueur r des vecteurs telle que

$$p_{nn}r^2 = p^{ki}x_k x_i = 2\Phi(x, y, z) = \text{const},$$

où $2\Phi(x, y, z)$ est la forme quadratique correspondant au tenseur des contraintes symétrique P. Le lieu géométrique des points tels que

$$p^{ki}x_k x_i = 2\Phi(x, y, z) = \text{const}$$

forme la surface du second degré qui est une surface tensorielle du tenseur des contraintes. La propriété fondamentale des contraintes internes (2.4) admet la représentation

$$\boldsymbol{p}_n = p^i n_i = p^i \frac{x_i}{r}$$

ou, en projections sur les axes x_k du système de coordonnées cartésiennes,

$$r p_n^k = p^{ki} x_i.$$

On établit au moyen d'une vérification directe que

$$p^{ki}x_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$$

et, par conséquent,

$$r p_n^k = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k},$$

c'est-à-dire que

$$r\boldsymbol{p}_n = \text{grad}\, \Phi.$$

Il s'ensuit que si l'on connaît la surface tensorielle $\Phi = \text{const}$, on peut trouver géométriquement le sens de la contrainte $\boldsymbol{p}_n$ agissant sur l'aire $d\sigma$ de normale $\boldsymbol{r}$. A partir du point O on trace le vecteur $\boldsymbol{r}$ perpendiculairement à l'aire donnée (fig. 28). Au point d'intersection de $\boldsymbol{r}$ avec la surface $\Phi = \text{const}$ on trace le plan σ tangent à la surface tensorielle; il est clair que le vecteur $\boldsymbol{p}_n$ est perpendiculaire au plan tangent σ.

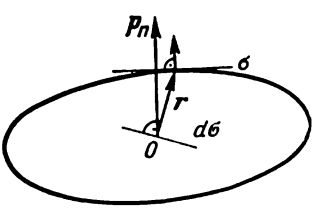


Fig. 28. Surface tensorielle du tenseur des contraintes

Axes principaux du tenseur symétrique des contraintes. On le sait, les surfaces de second degré possèdent au moins trois directions $\boldsymbol{r}$ auxquelles sont perpendiculaires les plans tangents σ. Ces directions sont appelées directions principales et pour elles, manifestement, $\boldsymbol{p}_n$ est orthogonal à $d\sigma$. Le cas général n'en prévoit que trois. Elles forment un trièdre orthogonal et sont appelées axes principaux du tenseur des contraintes. Lorsque la surface tensorielle $\Phi = \text{const}$ représente une surface de révolution, une sphère, par exem-

ple, le nombre de ces directions est infiniment grand. Pour les aires orthogonales aux directions principales, $\boldsymbol{p}_n$ est colinéaire à $\boldsymbol{n}$ et, par conséquent, sont vraies les égalités

$$\boldsymbol{p}_n = p^{ki} n_i \boldsymbol{\partial}_k = \lambda \boldsymbol{n} = \lambda n_i \boldsymbol{\partial}^i \tag{4.1}$$

ou

$$p^i_k n_i \boldsymbol{\partial}^k = \lambda \delta^i_k n_i \boldsymbol{\partial}^k,$$

d'où

$$(p^i_k - \lambda \delta^i_k)\, n_i \boldsymbol{\partial}^k = 0$$

ou

$$(p^i_k - \lambda \delta^i_k)\, n_i = 0. \tag{4.2}$$

Nous avons obtenu un système homogène de trois équations algébriques pour la définition des cosinus directeurs des trois directions principales n_i. Ce système a une solution non triviale seulement si

$$\Delta = \operatorname{Det} \| p^i_k - \lambda \delta^i_k \| = | p^i_k - \lambda \delta^i_k | = 0,$$

$$\begin{vmatrix} p^1_1 - \lambda & p^2_1 & p^3_1 \\ p^1_2 & p^2_2 - \lambda & p^3_2 \\ p^1_3 & p^2_3 & p^3_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.3}$$

ou, sous forme développée,

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0, \tag{4.4}$$

où

$$p^\alpha_\alpha = I_1,$$

$$\begin{vmatrix} p^2_2 & p^3_2 \\ p^2_3 & p^3_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p^3_3 & p^1_3 \\ p^3_1 & p^1_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p^1_1 & p^2_1 \\ p^1_2 & p^2_2 \end{vmatrix} = I_2,$$

$$\operatorname{Det} \| p^i_k \| = I_3.$$

C'est une équation séculaire. Comme on le sait, lorsque le tenseur p^{ij} est symétrique, cette équation possède trois racines réelles. Les racines λ_1, λ_2, λ_3 de cette équation définissent d'après (4.1) les contraintes sur les aires orthogonales aux directions principales (aires principales) :

$$\lambda_1 = p_{n1} = p_1; \quad \lambda_2 = p_{n2} = p_2; \quad \lambda_3 = p_{n3} = p_3,$$

et sont dites composantes principales du tenseur des contraintes.

Connaissant p_1, p_2, p_3 trouvons à partir du système d'équations (4.2) les composantes n_i des vecteurs $\boldsymbol{n}$ définissant les directions principales (utilisons à cet effet les conditions $(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}) = 1$). Il est évident que la formule (4.1), les équations (4.2) et (4.3) sont vraies dans tout système de coordonnées curvilignes.

L'équation de la surface tensorielle $2\Phi = \text{const}$ se ramène dans les axes principaux x, y, z à la forme canonique

$$2\Phi = p_1 x^2 + p_2 y^2 + p_3 z^2 = \text{const}.$$

On a pour les composantes du tenseur des contraintes dans les axes principaux

$$p^{ii} = p_i^i = p_{ii} = \lambda_i = p_i$$

et

$$p^{ki} = p_k^i = p_{ki} = 0 \quad \text{pour} \quad k \neq i.$$

Sur les aires perpendiculaires aux axes principaux du tenseur des contraintes ne sont différentes de zéro que les composantes normales du vecteur contrainte, les tangentes étant nulles.

Lorsque $p_1 = p_2 = p_3$, la surface tensorielle du vecteur contrainte représente une sphère.

Nous avons introduit dans ce qui précède les axes principaux du tenseur des déformations, du tenseur des contraintes et du tenseur des taux de déformation. Dans le cas général, ces axes ne coïncident pas. Les critères de leur coïncidence sont liés, comme on le verra par la suite, à des restrictions physiques considérables imposées aux propriétés des milieux envisagés.

Lorsque $p_1 \neq 0$ et $p_2 = p_3 = 0$, on a en un point donné du milieu continu une traction pure suivant l'axe x_1 pour $p_1 > 0$ et une compression pure si $p_1 < 0$. Ainsi donc, tout état de contrainte au point donné du milieu continu peut être considéré comme un ensemble de trois tractions ou compressions pures le long des axes principaux du tenseur des contraintes.

Les coefficients de l'équation séculaire (4.4) sont des invariants du tenseur des contraintes. Ils s'expriment à l'aide des racines de l'équation séculaire conformément aux formules

$$I_1 = p_1 + p_2 + p_3,$$
$$I_2 = p_2p_3 + p_1p_2 + p_1p_3,$$
$$I_3 = p_1p_2p_3.$$

La surface tensorielle $\Phi = T_{ij}\, dx^i\, dx^j = \text{const}$ peut être associée également à tout autre tenseur symétrique du second ordre $T = T_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = T^i_{\cdot k}\mathbf{e}_i\mathbf{e}^k$ en chaque point O. Tout ce qui a été dit précédemment à propos du tenseur des contraintes peut s'appliquer entièrement à la définition des directions des axes principaux et des composantes principales du tenseur T.

CHAPITRE IV

SYSTÈMES COMPLETS D'ÉQUATIONS MÉCANIQUES POUR LES MODÈLES LES PLUS SIMPLES DES MILIEUX CONTINUS. QUELQUES NOTIONS D'ANALYSE TENSORIELLE

§ 1. Fluides parfaits

Les équations différentielles de continuité, de la quantité de mouvement et des moments cinétiques sont vérifiées pour tous les mouvements continus de *tous* les milieux continus. Cependant, différents milieux se comportent différemment dans les mêmes conditions extérieures.

Par conséquent, les équations en question ne suffisent pas à elles seules pour décrire le mouvement d'un milieu continu concret même si l'on y ajoute des conditions aux frontières correspondantes. On n'en aperçoit d'autant mieux que le nombre d'équations est inférieur à celui des inconnues y entrant, autrement dit le système d'équations n'est pas complet.

Pour construire un système d'équations complet décrivant le mouvement d'un milieu continu concret on doit trouver les relations complémentaires entre les paramètres du milieu continu donné.

La construction de nouveaux modèles des milieux continus constitue un chapitre important de la mécanique, appelé rhéologie. Pour construire un nouveau modèle il faut effectuer une recherche expérimentale sur les propriétés du milieu. Cela nécessite également le recours aux principes connus de la mécanique et de la physique, par exemple, aux relations thermodynamiques. Il est utile d'y appliquer les principes variationnels.

Dans ce chapitre nous étudierons quelques modèles des milieux continus parmi les plus simples. En même temps, nous nous bornerons aux cas où les propriétés des milieux et les classes des processus considérés n'exigent pas, pour la description du mouvement mécanique, une connaissance des propriétés thermodynamiques des milieux. Le système d'équations mécaniques est alors complet sans recours aux équations thermodynamiques.

Dans le cas général, si l'on veut étudier tous les processus possibles se déroulant dans ces milieux, il est aussi indispensable d'appliquer les relations thermodynamiques.

Commençons par l'étude des modèles des fluides parfaits.

Définition d'un fluide parfait. On appelle fluide parfait un fluide dans lequel le vecteur contrainte $\boldsymbol{p}_n$ est perpendiculaire à tout élément de surface de normale $\boldsymbol{n}$, c'est-à-dire qu'il est parallèle à $\boldsymbol{n}$.

Les données expérimentales et les raisonnements physiques généraux montrent qu'à des températures et des pressions très élevées tout milieu pratiquement possède cette propriété.

Le tenseur des contraintes dans un fluide parfait est sphérique. La surface tensorielle est évidemment une sphère dans ce cas, ce qui entraîne l'égalité des composantes principales du tenseur des contraintes : $p_1 = p_2 = p_3$. Désignons-les par $-p$ et soit p la pression. Nous choisissons le signe de la pression de sorte que celle-ci soit une quantité positive, car l'expérience montre que les milieux correspondant au modèle du fluide parfait sont, généralement, en état de compression lorsque $p > 0$.

Pour un tel milieu trois directions orthogonales quelconques sont les directions principales et, par suite, dans tout système de coordonnées cartésiennes la matrice du tenseur des contraintes se présente sous la forme

$$\begin{Vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Vmatrix}.$$

En particulier, pour les composantes mixtes p^i_k on peut écrire

$$p^i_k = -p\delta^i_k. \tag{1.1}$$

Evidemment, les composantes δ^i_k du tenseur $\delta^i_k \mathbf{a}^k \mathbf{a}_i$ ne changent pas lors de la transformation de coordonnées ($\delta'^i_k = \delta^i_k$). Par conséquent, la formule (1.1) pour les composantes mixtes du tenseur des contraintes d'un fluide parfait est valable aussi bien dans les axes cartésiens que dans n'importe quels axes curvilignes.

Les composantes contravariantes de ce tenseur ont pour expression

$$p^{ki} = g^{ks}p^i_s = -pg^{ks}\delta^i_s = -pg^{ki} \tag{1.2}$$

et les composantes covariantes

$$p_{ki} = g_{ks}p^s_i = -pg_{ks}\delta^s_i = -pg_{ki}.$$

Il s'ensuit que le tenseur des contraintes est donné dans le cas d'un fluide parfait par un seul nombre p et non pas par neuf ou six nombres p^{ki} comme c'est le cas en général.

Pour un liquide parfait

$$P = -pG,$$

où G est le tenseur métrique.

Notons que tout tenseur T est dit sphérique si sa surface tensorielle est une sphère. Tous les tenseurs sphériques se mettent sous

la forme

$$T = kG,$$

où k est un scalaire.

Equation du mouvement d'un fluide parfait. Dans tout système de coordonnées curvilignes, les équations du mouvement d'un milieu continu ((2.11) ch. III)

$$\rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki},$$

appliquées au fluide parfait, s'écrivent en vertu de (1.2) de la façon suivante:

$$\rho a^k = \rho F^k - g^{ki} \nabla_i p. \tag{1.3}$$

On a tenu compte dans (1.3) de ce que les composantes du tenseur g^{ki} se comportent comme des constantes par rapport à la dérivation covariante.

Ecrivons ces équations sous forme vectorielle. Les quantités $\nabla_i p$ sont, évidemment, les composantes covariantes du vecteur gradient p et $g^{ki} \nabla_i p$ ses composantes contravariantes. Par conséquent, les équations (1.3) se présentent sous forme vectorielle de la façon suivante:

$$\rho \boldsymbol{a} = \rho \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} p. \tag{1.4}$$

En projection sur les axes cartésiens ces équations s'écrivent ainsi

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Elles sont dites équations d'Euler.

Equations du mouvement d'un liquide parfait sous la forme de Groméco-Lamb. Ecrivons les équations précédentes sous une autre forme. L'accélération peut être facilement écrite de la façon sui-

vante :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} + 2\omega \times v, \tag{1.7}$$

où ω est le vecteur rotation.

En effet, dans les axes cartésiens, on a pour les projections de l'accélération sur l'axe des x

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) v + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) w =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} + 2 (\omega_y w - \omega_z v) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} + 2 (\omega \times v)_x.$$

On obtient des formules analogues pour les projections de l'accélération sur les axes des y et des z. Ainsi, la présentation de l'accélération $\frac{dv}{dt}$ sous la forme vectorielle (1.7) se trouve justifiée. Quant aux équations du mouvement d'un fluide parfait, on peut les écrire sous forme vectorielle comme suit :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 + 2\omega \times v = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{1.8}$$

Ces équations sont dites équations du mouvement d'Euler sous la *forme de Groméco-Lamb*. Cette transformation de l'accélération peut être pratiquée pour les milieux continus les plus divers, en particulier, elle s'avère fort utile dans bien des problèmes de l'hydromécanique.

Aux trois équations du mouvement d'un fluide parfait il faut ajouter l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0.$$

Nous avons obtenu un système de quatre équations contenant à côté des forces massiques connues F_x, F_y, F_z cinq fonctions inconnues : u, v, w, p, ρ. Néanmoins, ce système *n'est pas encore complet.*

Système complet d'équations du mouvement d'un liquide parfait incompressible (en général non homogène). Dans certains cas on peut admettre, de plus, que le liquide est incompressible, c'est-à-dire que le volume de chaque particule est de valeur constante. On peut alors ajouter au système de quatre équations la condition suivante :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} \rho = 0$$

ou, dans les axes cartésiens,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}=0.$$

Avec cette condition le système d'équations du mouvement d'un liquide parfait devient complet. Voici la totalité de ce système

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p,\\ &\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\\ &\frac{d\rho}{dt}=0. \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

La dernière équation change si la masse de la particule varie.

Notons que s'il s'agit d'un fluide parfait incompressible et homogène dont toutes les particules sont de masse constante, la densité ρ est constante dans la particule et est identique pour toutes les particules, pour cette raison elle cesse d'être une inconnue essentielle. Le système complet d'équations mécaniques comporte dans ce cas les équations d'Euler et l'équation de continuité:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^j\nabla_j v^i=F^i-\frac{1}{\rho}g^{ij}\nabla_j p,\\ &\nabla_\alpha v^\alpha=0. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Système complet d'équations du mouvement d'un fluide parfait compressible et barotrope. Le plus souvent dans le cas des fluides en mouvement on peut admettre que

$$p=f(\rho),$$

c'est-à-dire que dans chaque particule la pression n'est fonction que de la densité. *Les processus caractérisés par*

$$p=f(\rho)$$

sont dits barotropes. Un exemple en est fourni par le mouvement isotherme d'un gaz qui suit l'équation de Clapeyron

$$p=R\rho T$$

où R est la constante des gaz parfaits. (Le mouvement est dit isotherme lorsque la température T est un paramètre constant et identique pour toutes les particules.)

Il est évident que la propriété barotropique (à condition que la fonction $f(\rho)$ soit connue) permet de compléter le système d'équations donnant la loi du mouvement d'un fluide parfait compressible.

Dans ce cas le système complet d'équations s'écrit dans les axes orthogonaux cartésiens de la façon suivante:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},\\
&p=f(\rho).
\end{aligned}\right\}\qquad(1.11)$$

Le plus souvent dans le mouvement des fluides la condition de barotropie n'est pas remplie et l'on doit faire appel à des relations complémentaires de nature thermodynamique pour décrire ces mouvements de manière adéquate.

§ 2. Corps linéaire élastique, fluide linéaire visqueux

Etudions deux autres modèles particuliers des milieux continus: le modèle d'un corps linéaire élastique et le modèle d'un fluide linéaire visqueux. Les moyens qui permettent de les introduire étant formellement analogues, nous construirons ces modèles parallèlement. Mais en réalité, ces deux modèles décrivent deux types totalement différents de comportement mécanique des milieux réels.

Corps élastiques. On appelle ainsi un milieu dans lequel les composantes du tenseur des contraintes p^{kl} de chaque particule sont fonction des composantes du tenseur des déformations ε_{ij}, des composantes du tenseur métrique g_{ij}, de la température T et, éventuellement, d'autres paramètres de nature physico-chimique χ_i (concentration des phases, entre autres):

$$p^{ij}=f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta},\ g^{\alpha\beta},\ T,\ \chi_1,\ \ldots,\ \chi_n).\qquad(2.1)$$

Fluides visqueux. Un fluide visqueux est un milieu dans lequel les composantes du tenseur des contraintes sont de la forme

$$p^{ij}=-pg^{ij}+\tau^{ij},\qquad(2.2)$$

de plus

$$\left.\begin{aligned}
p&=p(\rho,\ T,\ \chi_1,\ \ldots,\ \chi_n),\\
\tau^{ij}&=\varphi^{ij}(e_{\alpha\beta},\ g^{\alpha\beta},\ T,\ \chi_1,\ \ldots,\ \chi_n),
\end{aligned}\right\}\qquad(2.3)$$

où $e_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur des taux de déformation.

Ce paragraphe est consacré à l'étude de f^{ij} en fonction de $\varepsilon_{\alpha\beta}$ et de $g^{\alpha\beta}$ ainsi que de φ^{ij} en fonction de $e_{\alpha\beta}$ et de $g^{\alpha\beta}$. Pour cette raison les paramètres T et χ_i ne paraîtront pas dans ce qui suit.

Lois de Hooke et de Navier-Stokes. La forme concrète des fonctions $f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_i)$ et $\varphi^{ij}(e_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_i)$ dépend des modèles concrets des milieux élastique et visqueux. On sait par expérience que les contraintes et les déformations dans de nombreux corps solides, dans les métaux par exemple, sont liées entre elles dans les conditions habituelles (températures et contraintes moyennes) par la loi de Hooke; les contraintes visqueuses et les taux de déformation de nombreux fluides, par exemple ceux de l'eau et de l'air, sont liés entre eux par la loi de Navier-Stokes. Prenant l'exemple de la loi de Hooke, nous procéderons aux raisonnements qui permettent d'introduire ces lois.

Supposons que les fonctions f^{ij} puissent être développées en série de Taylor par rapport à $\varepsilon_{\alpha\beta}$ et qu'en l'absence de contraintes ($p^{ij} = 0$) les déformations soient également nulles ($\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$) et inversement *).

Dans cette hypothèse on a

$$p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}) = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + \ldots$$

Ici les coefficients $A^{ij\alpha\beta}$ peuvent dépendre de T et de χ_s. Si les déformations sont petites, on peut ne conserver dans le développement de p^{ij} en série que les termes linéaires, en écrivant simplement

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}. \tag{2.4}$$

Des hypothèses analogues pour les fonctions φ^{ij} conduisent aux égalités

$$\tau^{ij} = B^{ij\alpha\beta}e_{\alpha\beta}. \tag{2.5}$$

Les expressions (2.4) traduisent la loi de Hooke, les relations (2.5) la loi de Navier-Stokes (ou la loi de viscosité de Newton généralisée).

Nous avons obtenu (2.4) et (2.5) en supposant $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (pour la loi de Hooke) et $e_{\alpha\beta}$ (pour la loi de Navier-Stokes) petits. Signalons toutefois que la loi de Navier-Stokes est applicable à l'eau, à l'air et à certains autres fluides même dans le cas où les composantes du tenseur des taux de déformation ne sont pas petites. Les relations thermodynamiques générales conduisent à la conclusion que la loi de Hooke est physiquement admissible uniquement en tant que loi approximative pour les petites déformations.

Le chapitre de la mécanique des milieux continus où l'on étudie le comportement des milieux continus satisfaisant à la loi de Hooke ou à la loi plus générale (2.1) est appelé théorie de l'élasticité. Le chapitre consacré au mouvement des milieux continus régis par la loi de Navier-Stokes ou par la loi plus générale (2.2)-(2.3) est appelé théorie du mouvement d'un fluide visqueux.

*) Notons que les déformations peuvent apparaître même si $p^{ij} = 0$ (par exemple, la dilatation thermique). Ici nous étudions, pour des raisons de simplicité, les p^{ij} en fonction de ε_{ij}, lorsque $T = \text{const}$ et $\chi_i = \text{const}$.

Il découle directement des égalités (2.4) et (2.5), invariantes par rapport au choix des axes, que $A^{ij\alpha\beta}$ et $B^{ij\alpha\beta}$ sont les composantes des tenseurs du quatrième ordre. Elles représentent les caractéristiques physiques du milieu donné et dépendent généralement de la température T et d'autres paramètres physico-chimiques caractérisant l'état du milieu étudié.

Le tenseur du quatrième ordre a $3^4 = 81$ composantes. Mais, en vertu de la symétrie du tenseur des contraintes (dans le cas classique), du tenseur des déformations et de celui des taux de déformation, le nombre des composantes indépendantes $A^{ij\alpha\beta}$ et $B^{ij\alpha\beta}$ se réduit à 36, puisque les tenseurs A et B doivent être symétriques par rapport au couple d'indices i et j et l'on peut admettre qu'ils soient également symétriques par rapport au couple d'indices α et β. Si de plus le milieu régi par la loi de Hooke ou de Navier-Stokes présente quelques propriétés géométriques de symétrie, le nombre des composantes $A^{ij\alpha\beta}$ et $B^{ij\alpha\beta}$ s'en trouve encore réduit. En particulier, si le milieu en question est isotrope, tous les $A^{ij\alpha\beta}$ et $B^{ij\alpha\beta}$ sont définis par deux paramètres.

Anisotropie, isotropie, girotropie d'un milieu. Un milieu est dit isotrope si toutes ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions. Si les propriétés d'un milieu varient selon les directions, il s'agit d'un milieu anisotrope. Les milieux isotropes peuvent avoir des symétries variées.

Donnons une définition mathématique plus rigoureuse de la propriété de symétrie et, en particulier, de l'isotropie. Les propriétés mécaniques et physiques d'un milieu peuvent se décrire au moyen des tenseurs et des équations tensorielles (par exemple, si le milieu obéit à la loi de Hooke, les propriétés élastiques sont données par le tenseur $A^{ij\alpha\beta}$). On dit qu'un milieu possède une symétrie s'il existe un groupe de transformations des coordonnées, ne comprenant pas seulement la transformation identique, tel que les composantes des tenseurs donnant les propriétés du milieu sont invariantes par les transformations appartenant à ce groupe.

En particulier, le milieu est dit isotrope si les composantes des tenseurs définissant ses propriétés sont invariantes par toute transformation orthogonale. Notons qu'une transformation orthogonale peut être définie comme une transformation laissant invariables les composantes du tenseur métrique (autrement dit, les produits scalaires des vecteurs de base restent invariables), à savoir

$$g'_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} = g_{ij}.$$

Un groupe orthogonal complet contient des rotations (le déterminant de la transformation est égal à $+1$) et des rotations combinées à des réflexions (le déterminant est égal à -1).

Si les propriétés du milieu sont invariantes par les rotations et ne le sont pas par les réflexions, ce milieu est dit girotrope.

Examinons d'une façon plus détaillée ce qu'on entend par l'isotropie (ou la girotropie) d'un corps élastique répondant à la loi de Hooke. Choisissons dans un point quelconque de ce milieu, à un instant donné, deux systèmes de coordonnées : l'un x^1, x^2, x^3 et l'autre y^1, y^2, y^3, ce dernier obtenu par la rotation du premier. Les composantes des tenseurs considérés seront désignées dans les axes x^1, x^2, x^3 par des lettres non primées et dans les axes y^1, y^2, y^3 par des lettres correspondantes primées. Il est évident que

$$A'^{ij\alpha\beta} = \frac{\partial y^i}{\partial x^p}\frac{\partial y^j}{\partial x^q}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\lambda}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\mu}A^{pq\lambda\mu}. \tag{2.6}$$

Dans le système x^1, x^2, x^3 la loi de Hooke doit faire appel aux coefficients $A^{ij\alpha\beta}$ et dans le système y^1, y^2, y^3 aux coefficients $A'^{ij\alpha\beta}$. Envisageons deux états déformés d'un milieu continu qui ont la même forme dans les axes différents x^i et y^i (tournés l'un par rapport à l'autre), c'est-à-dire

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}.$$

Il est clair que dans ce cas pour un milieu isotrope les états de contrainte doivent avoir la même forme dans les axes x^i et y^i. Si $A'^{ij\alpha\beta} = A^{ij\alpha\beta}$, autrement dit si les coefficients de la loi de Hooke sont les mêmes dans les deux axes, $p^{ij} = p'^{ij}$. C'est le cas d'un milieu continu isotrope ou girotrope. Si $A'^{ij\alpha\beta} \neq A^{ij\alpha\beta}$, c'est-à-dire que les coefficients de la loi de Hooke sont différents dans les axes x^1, x^2, x^3 et y^1, y^2, y^3, alors $p^{ij} \neq p'^{ij}$ et le milieu est anisotrope. On sait par expérience que parmi les milieux anisotropes dont les propriétés diffèrent selon les directions on peut citer les milieux cristallins dont les molécules ou les atomes sont disposés selon un ordre précis, ainsi que les matériaux fibreux.

Les milieux isotropes pour lesquels aucun système de coordonnées n'a d'avantages devant les autres tournés par rapport à ce premier sont par exemple l'eau et d'autres milieux ayant une structure dite amorphe, ainsi que les milieux constitués de petits cristaux, à condition que ces cristaux élémentaires soient disposés d'une façon désordonnée, chaotique. Les métaux de ce genre sont généralement utilisés dans la technique.

Lois de Hooke et de Navier-Stokes pour un milieu girotrope. Nous allons montrer maintenant que pour les corps isotropes et girotropes le tenseur $A^{ij\alpha\beta}$ ne contient que deux composantes indépendantes *) sur un nombre total de 81 composantes non nulles en

*) Pour le tenseur du quatrième ordre les notions d'isotropie et de girotropie coïncident.

général. Dirigeons les axes de coordonnées suivant les directions principales du tenseur des déformations ε_{ij}. Manifestement la loi de Hooke ne comporte dans ce cas que les coefficients de la forme $A^{ij\alpha\alpha}$. Démontrons que $A^{ij\alpha\alpha}=0$ lorsque $i \neq j$. En effet, en tournant les axes choisis de 180° par rapport au i-ième axe on obtient un nouveau système de coordonnées où l'axe i s'identifie avec l'ancien, tandis que les deux autres prennent un sens opposé. Conformément à la règle de transformation (2.6) des composantes du tenseur A on a pour $i \neq j$ et α quelconque

$$A'^{ij\alpha\alpha} = -A^{ij\alpha\alpha}.$$

Or, si le milieu est isotrope ou girotrope, on a forcément $A'^{ij\alpha\alpha} = A^{ij\alpha\alpha}$, ce qui implique $A^{ij\alpha\alpha} = 0$ pour $i \neq j$.

Comme dans ce système de coordonnées $p^{ij} = 0$ pour $i \neq j$, il en découle que pour un milieu girotrope et, à plus forte raison, pour un milieu isotrope régi par la loi de Hooke les axes principaux du tenseur des déformations coïncident avec ceux du tenseur des contraintes.

Dans les formules de la loi de Hooke rapportée aux axes principaux nous ne relevons parmi les quatre-vingt et un coefficients $A^{ij\alpha\beta}$ que neuf coefficients essentiels $A^{ii\alpha\alpha}$.

L'ordre du numérotage des axes étant d'une importance négligeable en raison de la girotropie du milieu *), nous avons

$$A^{1111} = A^{2222} = A^{3333} = 2\mu + \lambda,$$
$$A^{1122} = A^{1133} = A^{2233} = \lambda,$$
$$A^{ii\alpha\alpha} = A^{\alpha\alpha ii},$$

où $2\mu + \lambda$ et λ sont des nouvelles désignations des deux composantes différentes mentionnées ci-dessus du tenseur A qui sont en général non nulles. (Notons que les composantes A^{ijij} pour $i \neq j$ sont également non nulles. On montrera plus bas que ces composantes sont égales à μ (voir la formule (2.12).)

On peut démontrer en s'appuyant sur les considérations précédentes que, pour un milieu girotrope et, à plus forte raison, pour un milieu isotrope régi par la loi de Navier-Stokes, les axes principaux du tenseur des taux de déformation coïncident avec ceux du tenseur des contraintes et tous les coefficients $B^{ij\alpha\beta}$ s'expriment au moyen de deux coefficients λ_1 et μ_1.

La loi de Hooke

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}$$

pour un milieu isotrope, rapportée aux axes principaux du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes, a maintenant pour

*) Il est évident que l'axe x^2, par exemple, peut être amené dans la position x^1 par une rotation de 90° du système de coordonnées autour de l'axe x^3.

expression

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_1, \\ p_2 &= \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_2, \\ p_3 &= \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\mu\varepsilon_3; \end{aligned}\right\}$$

λ et μ sont dits coefficients de Lamé.

De façon analogue, la loi de Navier-Stokes pour un milieu isotrope rapportée aux axes principaux du tenseur des taux de déformation et du tenseur des contraintes s'écrit comme suit :

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_1, \\ \tau_2 &= \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_2, \\ \tau_3 &= \lambda_1(e_1 + e_2 + e_3) + 2\mu_1 e_3. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Essayons d'obtenir l'expression de la loi de Hooke pour un milieu isotrope (girotrope) rapportée à un système quelconque de coordonnées. Pour ce faire multiplions les égalités (2.7) par $(dx^1)^2$, $(dx^2)^2$, $(dx^3)^2$ respectivement, additionnons-les ensuite et pour dx^1, dx^2, dx^3 quelconques nous avons

$$p_1(dx^1)^2 + p_2(dx^2)^2 + p_3(dx^3)^2 = \\ = \lambda I_1(\varepsilon)\, ds^2 + 2\mu\,[\varepsilon_1(dx^1)^2 + \varepsilon_2(dx^2)^2 + \varepsilon_3(dx^3)^2], \tag{2.9}$$

où $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$, tandis que $I_1(\varepsilon)$ est le premier invariant du tenseur des déformations. Comme

$$p_1(dx^1)^2 + p_2(dx^2)^2 + p_3(dx^3)^2 = 2\Phi\,(dx^1, dx^2, dx^3)$$

est une forme quadratique associée au tenseur des contraintes, invariante par rapport au choix des axes et inscrite dans les axes principaux du tenseur des contraintes, et comme

$$\varepsilon_1(dx^1)^2 + \varepsilon_2(dx^2)^2 + \varepsilon_3(dx^3)^2 = 2F\,(dx^1, dx^2, dx^3)$$

est une forme quadratique associée au tenseur des déformations, invariante par rapport au choix des axes et inscrite dans les axes principaux du tenseur des déformations, il en découle que l'égalité (2.9) est une relation invariante. Rapportée à un système quelconque de coordonnées curvilignes η^1, η^2, η^3 elle se met sous la forme

$$2\Phi\,(d\eta^1, d\eta^2, d\eta^3) = \lambda I_1(\varepsilon)\, g_{ij}\, d\eta^i\, d\eta^j + 4\mu F\,(d\eta^1, d\eta^2, d\eta^3), \tag{2.10}$$

où

$$2\Phi = p_{ij}\, d\eta^i\, d\eta^j, \quad 2F = \varepsilon_{ij}\, d\eta^i\, d\eta^j,$$
$$I_1(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad ds^2 = g_{ij}\, d\eta^i\, d\eta^j.$$

L'expression (2.10) étant vérifiée pour $d\eta^1$, $d\eta^2$, $d\eta^3$ quelconques, on aura pour tout système de coordonnées

$$p_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)\, g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2.11}$$

ou

$$p^{ij} = \lambda I_1(\varepsilon)\, g^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}. \tag{2.11'}$$

Les formules (2.11′) ou (2.11) constituent, dans les axes curvilignes quelconques, la loi de Hooke pour un milieu isotrope.

La formule (2.11′) permet aisément d'obtenir l'expression des coefficients $A^{ij\alpha\beta}$ dans un système quelconque de coordonnées curvilignes

$$A^{ij\alpha\beta} = \lambda g^{ij} g^{\alpha\beta} + \mu\,(g^{i\alpha} g^{j\beta} + g^{i\beta} g^{j\alpha}). \tag{2.12}$$

Les mêmes raisonnements appliqués à la loi de Navier-Stokes pour un milieu isotrope conduisent à l'expression suivante de cette loi rapportée à des axes curvilignes quelconques :

$$\tau_{ij} = \lambda_1 I_1(e)\, g_{ij} + 2\mu_1 e_{ij} \tag{2.13}$$

ou

$$\tau^{ij} = \lambda_1 I_1(e)\, g^{ij} + 2\mu_1 g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}. \tag{2.14}$$

Compte tenu de (2.2) nous obtenons la relation suivante entre les composantes du tenseur des contraintes et celles du tenseur des taux de déformation pour un fluide isotrope visqueux dans un système quelconque de coordonnées curvilignes :

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda_1 g^{ij} \operatorname{div} v + 2\mu_1 g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}. \tag{2.15}$$

Dans les axes cartésiens (non principaux), la loi de Hooke pour un milieu isotrope s'écrit

$$p_{ii} = \lambda I_1(\varepsilon) + 2\mu\varepsilon_{ii} \tag{2.16}$$

et, lorsque $i \neq j$,

$$p_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij};$$

la loi de Navier-Stokes s'écrit

$$p_{ii} = -p + \lambda_1 \operatorname{div} v + 2\mu_1 \frac{\partial v_i}{\partial x^i}$$

et, lorsque $i \neq j$,

$$p_{ij} = 2\mu_1 e_{ij} = \mu_1 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right). \tag{2.17}$$

Module d'Young, coefficient de Poisson, coefficients de viscosité. Les coefficients de Lamé λ et μ sont remplacés, dans l'élasticité, par les caractéristiques des matériaux suivantes: le module d'Young

$$E = \mu \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

et le coefficient de Poisson

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

En théorie du mouvement d'un fluide visqueux, il est d'usage d'introduire le coefficient dynamique de viscosité $\mu = \mu_1$ et le coefficient cinématique de viscosité $\nu = \mu/\rho$, ainsi que le deuxième coefficient de viscosité

$$\zeta = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu.$$

Dans ce qui suit, lorsqu'il s'agira du mouvement d'un fluide visqueux, nous désignerons le coefficient de Lamé λ_1 par λ.

Les valeurs numériques de E, σ, μ, ν pour certains milieux sont indiquées dans les tables ci-dessous.

Les lois de Hooke et de Navier-Stokes pour $T = \text{const}$ et $\chi_i = \text{const}$ permettent de compléter le système d'équations du mouvement des milieux isotropes élastiques et d'un fluide visqueux incompressible.

Matériau (à la température normale)	E, kgf/mm$^2 \cdot 10^4$	σ
Acier	2,0 à 2,2	0,24 à 0,28
Fer	1,6 à 2,0	0,28
Cuivre	1,1	0,31 à 0,34
Aluminium	0,69	0,32 à 0,36
Bronze	1,1	0,35
Verre	0,56	0,25
Caoutchouc	0,00008	0,47

Température, °C	20	100	300	500
Acier au carbone, E, kgf/mm^2	21 350	21 000	19 800	17 900

Milieu	Température, °C	μ, $\frac{g}{s \cdot cm} \cdot 10^{-2}$	ν, $cm^2/s \cdot 10^{-2}$	ρ, g/cm^3
Eau	5	1,514	1,514	1,00
	10	1,304	1,304	1,00
	15	1,137	1,138	0,999
	20	1,002	1,004	0,998
	50	0,548	0,554	0,998
Benzène	15	0,7	0,8	0,88
Alcool	15	1,34	1,7	0,8
Mercure	15	1,58	0,116	13,6
Glycérine	15	23	18	1,26
Huile lubrifiante (viscosité moyenne)	20	275 à 350	300 à 380	0,9 à 0,95
Air (à 1 atmosphère)	0	$1,71 \cdot 10^{-2}$	13,2	$1,293 \cdot 10^{-3}$
	10	$1,76 \cdot 10^{-2}$	14,1	$1,247 \cdot 10^{-3}$
	15	$1,78 \cdot 10^{-2}$	14,5	$1,225 \cdot 10^{-3}$
	20	$1,81 \cdot 10^{-2}$	15,0	$1,205 \cdot 10^{-3}$
	60	$2 \cdot 10^{-2}$	18,8	$1,060 \cdot 10^{-3}$

Equations de Navier-Stokes. Pour écrire le système complet d'équations du mouvement d'un milieu continu lorsqu'il s'agit d'un fluide visqueux incompressible, il nous faut tout d'abord établir les équations du mouvement d'un fluide visqueux, en général compressible, satisfaisant à la loi de Navier-Stokes (2.15) ou

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda g^{ij} \operatorname{div} v + 2\mu e^{ij}, \tag{2.18}$$

équations, appelées équations de Navier-Stokes qu'on obtient en substituant la loi de Navier-Stokes (2.18) dans l'équation des impulsions.

Notons avant tout que dans un espace euclidien on a

$$\nabla_i \nabla_j v^\alpha = \nabla_j \nabla_i v^\alpha.$$

En effet, $T^\alpha_{ij} \equiv \nabla_i \nabla_j v^\alpha - \nabla_j \nabla_i v^\alpha$ sont les composantes du tenseur d'ordre trois; or, dans les axes cartésiens $T^\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} = 0$ et, par conséquent, $T^\alpha_{ij} = 0$ dans tout système d'axes curvilignes. Ainsi donc, si l'on peut introduire dans tout l'espace un système unique de coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire si l'espace est euclidien *), le résultat de la dérivation multiple covariante ne dépend pas de l'ordre dans lequel on procède.

*) Dans un espace riemannien le tenseur T^α_{ij} n'est pas nul à cause de la courbure de l'espace, puisque dans un espace courbe il est impossible de réduire à zéro simultanément Γ^k_{ij} et $\partial \Gamma^k_{ij}/\partial x^s$ (voir § 5, ch. II).

Calculons maintenant $\nabla_j p^{ij}$ à condition que les p^{ij} s'obtiennent par (2.18) et que λ et μ soient constants:

$$\begin{aligned}\nabla_j p^{ij} &= -g^{ij}\nabla_j p + \lambda g^{ij}\nabla_j \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\mu\nabla_j e^{ij} = \\ &= -g^{ij}\nabla_j p + \lambda g^{ij}\nabla_j\nabla_\alpha v^\alpha + \mu\nabla_j g^{i\alpha} g^{j\beta}(\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha) = \\ &= -g^{ij}\nabla_j p + \lambda g^{ij}\nabla_j\nabla_\alpha v^\alpha + \mu g^{i\alpha}\nabla_j\nabla_\alpha v^j + \mu g^{i\beta}\nabla_j\nabla_\beta v^i = \\ &= -g^{ij}\nabla_j p + (\lambda+\mu)\, g^{ij}\nabla_j\nabla_\alpha v^\alpha + \mu\nabla^\beta\nabla_\beta v^i = \\ &\qquad\qquad = -\nabla^i p + (\lambda+\mu)\,\nabla^i \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu\nabla v^i.\end{aligned}$$

Ici $\nabla^i = g^{ij}\nabla_j$ et $\Delta = \nabla^\beta\nabla_\beta = \nabla^2$ est l'opérateur de Laplace. Dans les axes cartésiens

$$\Delta v^i = \frac{\partial^2 v^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^i}{\partial z^2}.$$

Sous forme vectorielle on a

$$\nabla_j p^j = -\operatorname{grad} p + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{v} + \mu\Delta \boldsymbol{v}. \tag{2.19}$$

Ainsi donc, les équations de Navier-Stokes dans un système de coordonnées curvilignes s'écrivent, compte tenu de (2.11), ch. III, et de (2.19) ci-dessus comme suit:

$$a^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^{ij}\frac{\partial p}{\partial x^j} + \frac{\lambda+\mu}{\rho} g^{ij}\frac{\partial \operatorname{div} \boldsymbol{v}}{\partial x^j} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v^i,$$

ou, sous forme vectorielle,

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\lambda+\mu}{\rho}\operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{v} + \nu\Delta \boldsymbol{v}. \tag{2.20}$$

Système complet d'équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Pour un fluide visqueux incompressible les équations de Navier-Stokes sont plus simples

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho}\Delta \boldsymbol{v}. \tag{2.21}$$

Avec l'équation de continuité

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

ces équations forment un système complet d'équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible satisfaisant à la loi de Navier-Stokes à coefficient de viscosité μ constant.

Dans les axes cartésiens orthogonaux le système complet d'équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible non homogène a la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\\
&\qquad\qquad+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\\
&\qquad\qquad+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\\
&\qquad\qquad+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(2.22)$$

Equations du mouvement en déplacements d'un corps élastique ; cas des systèmes complets d'équations. Les équations du mouvement d'un corps élastique satisfaisant à la loi de Hooke, écrites à l'aide des déplacements dans le cas de *petites déformations*, c'est-à-dire les équations

$$p^{ij}=\lambda I_1(\varepsilon)\,g^{ij}+2\mu\varepsilon^{ij},\quad \varepsilon^{ij}=\frac{1}{2}(\nabla^j w^i+\nabla^i w^j),\qquad(2.23)$$

où w^i sont les composantes du vecteur déplacement et $I_1(\varepsilon)$ le premier invariant du tenseur des déformations ($I_1(\varepsilon)=\nabla_i w^i$), sont appelées équations de Lamé. Dans ce qui suit nous supposerons que les modules de Lamé λ et μ soient les constantes données. Pour obtenir les équations de Lamé il faut porter la loi de Hooke pour les déformations infinitésimales (2.23) dans l'équation des impulsions (2.11), ch. III. La déduction de ces équations est parfaitement analogue à celle des équations de Navier-Stokes faite plus haut. Les équations de Lamé ont la forme

$$(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{w}+\mu\Delta\boldsymbol{w}+\rho\boldsymbol{F}=\rho\boldsymbol{a}.\qquad(2.24)$$

Dans les axes cartésiens elles s'écrivent de la façon suivante:

$$\left.\begin{aligned}
\rho a_x &= (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\\
&\qquad +\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho F_x,\\
\rho a_y &= \lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\\
&\qquad +\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho F_y,\\
\rho a_z &= (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\\
&\qquad +\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho F_z.
\end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

Ici u, v, w désignent les composantes du vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$.

Les équations de Lamé sont déduites en supposant que les déformations soient petites, en particulier, que soit petite la variation de la densité ($\rho = \rho_0 + \rho'$, $\rho' \ll \rho_0$). Pour cette raison, à des infiniment petits du premier ordre près on écrit dans ces équations ρ_0 au lieu de ρ.

Le système d'équations de Lamé pour les problèmes dynamiques est complet si on lui adjoint la définition de l'accélération

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right)_{x^i} + v^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^\alpha}, \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{w}}{dt}.$$

Dans la théorie de l'élasticité l'équation de continuité peut être négligée s'il s'agit de petites déformations. Elle sert à déterminer ρ' qui n'entre pas dans les équations fondamentales de Lamé.

Les équations (2.24) sont établies en supposant petites les déformations; quant aux déplacements, aux vitesses et aux accélérations, ils peuvent être finis.

Toutefois on considère souvent le cas où sont *petits non seulement les déformations mais aussi les déplacements, les vitesses et les accélérations.* On obtient alors en négligeant les termes non linéaires

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2},$$

et les équations simplifiées de Lamé prennent la forme

$$\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2}\right)_{x^i} = \boldsymbol{F} + \frac{\lambda+\mu}{\rho_0}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{w} + \frac{\mu}{\rho_0}\Delta\boldsymbol{w}. \tag{2.26}$$

Dans les problèmes de la théorie de l'élasticité il faut en règle générale trouver les déplacements des particules individuelles du milieu comme, par exemple, la variation de la forme de la surface extérieure du corps « solide ». C'est pourquoi l'on emploie d'ordinaire dans

la théorie de l'élasticité, la description lagrangienne et le système de coordonnées lagrangiennes.

On a montré précédemment qu'on pouvait utiliser deux systèmes de coordonnées lagrangiennes, à savoir, le système initial et le système actuel (voir ch. II). Toutes les équations sont établies pour un instant actuel donné. Il est alors évident que les équations des impulsions d'un milieu continu aussi bien que les équations de Lamé en composantes d'un système actuel de coordonnées lagrangiennes obtenues à partir de ces dernières ont la même forme que dans le système de référence.

Si l'on passe des axes lagrangiens actuels au système lagrangien initial, les équations en composantes changent de forme. La raison en est que les formules de transformation des composantes des vecteurs et des tenseurs à l'aide desquelles on passe du système initial de coordonnées lagrangiennes au système actuel lagrangien ne coïncident pas avec les formules ordinaires de transformation des composantes des tenseurs lorsqu'on change de systèmes de coordonnées dans un même espace. Les espaces de l'état initial et de l'état actuel de mêmes coordonnées ξ^1, ξ^2, ξ^3 des points doivent être considérés, à cause des déformations *), comme des espaces différents aux métriques différentes, $ds^2 \neq ds_0^2$.

Cependant, si les déformations et les déplacements sont petits, les axes lagrangiens initiaux diffèrent peu des axes actuels; on peut alors admettre, qu'à des infiniment petits du premier ordre près, les équations en composantes lagrangiennes actuelles coïncident avec les équations en composantes lagrangiennes initiales. Les axes lagrangiens initiaux peuvent s'avérer plus commodes que les axes actuels, car si l'on veut résoudre tout le problème, l'on doit déterminer la position de ces derniers par rapport au système de référence.

Nécessité de construire d'autres modèles. Les modèles cités précédemment ont servi de base au développement de vastes chapitres de l'hydrodynamique et de la théorie de l'élasticité. Néanmoins les mouvements des milieux réels ne sont pas toujours décrits d'une façon suffisamment exacte à l'aide de ces modèles élémentaires.

Par exemple, pour l'étude du mouvement des gaz ionisés et des gaz en l'absence de barotropie on a besoin de modèles plus perfectionnés.

Dans de nombreux cas la loi de Hooke pour les corps « solides » n'est pas applicable. Par exemple, elle n'est pas valable lorsqu'il s'agit des déformations persistant dans les corps « solides » (asphalte,

---

*) Ce problème, pour le cas de l'équation générale du mouvement d'un milieu continu, est analysé d'une façon détaillée dans l'ouvrage de L. Sedov *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Eddison-Wesley, 1965.

bitume, métaux surchargés) après la disparition des contraintes. La nécessité se fait alors sentir de construire des modèles où l'on tient compte de la plasticité, du fluage et d'autres propriétés. L'ensemble des notions et des caractéristiques précédemment introduites, liées à l'état et au mouvement des particules du milieu, s'avère insuffisant pour les modèles plus complexes des milieux continus.

Il est indispensable d'introduire d'autres caractéristiques telles que la température T, l'énergie interne U, l'entropie S, les déformations rémanentes, les caractéristiques du champ électromagnétique, etc. Le système d'équations mécaniques doit être complété dans ces cas. On doit alors avoir recours aux relations complémentaires de la physique et, notamment, de la thermodynamique.

§ 3. Exemples des équations rapportées aux axes curvilignes et notions complémentaires de l'analyse tensorielle

Il est utile, en vue des applications, de présenter l'équation de continuité et les équations du mouvement dans divers axes curvilignes.

Symboles de Christoffel dans les axes orthogonaux, équation de continuité dans des axes quelconques. Ecrivons les formules traduisant les symboles de Christoffel $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ au moyen des composantes du tenseur métrique g_{ij} rapportées à des systèmes quelconques de coordonnées orthogonales. Dans les espaces euclidien et riemannien les symboles de Christoffel ont pour expression

$$\Gamma^{j}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{js} \left(\frac{\partial g_{\alpha s}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta s}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{s}} \right). \tag{3.1}$$

Dans un système de coordonnées orthogonales ($g_{ij} = 0$ pour $i \neq j$) on obtient aisément

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \tag{3.2}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}}, \tag{3.3}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\alpha}}, \tag{3.4}$$

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0 \quad \text{pour } \alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \alpha \neq \gamma. \tag{3.5}$$

A l'aide de la formule (3.2) nous obtenons, dans des axes orthogonaux, la formule suivante pour la somme $\sum_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}$:

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\beta}}, \tag{3.6}$$

où g est le déterminant de la matrice $\| g_{ij} \|$.

Démontrons la formule (3.6) dans un système *quelconque* de coordonnées. On a

$$g = | g_{ij} | = | (\mathbf{a}_i \circ \mathbf{a}_j) | \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\omega}_{k\beta}\mathbf{a}_{\omega}.$$

En calculant la dérivée $\partial g/\partial x^{\beta}$ il faut prendre la dérivée du produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_j$ dans chaque élément du déterminant g.

La dérivation du premier facteur $\mathbf{a}_i$ donne trois déterminants. Dans chacun de ces déterminants les éléments de la i-ième ligne sont remplacés par ceux du type $\Gamma^{\omega}_{i\beta}g_{\omega j}$. On voit sans peine que chacun de ces déterminants est égal à $\Gamma^{i}_{i\beta}g$, où i est l'indice fixé égal au numéro de la ligne correspondante. (Les déterminants pour les valeurs fixées $\omega \neq i$ sont nuls.) La somme de trois déterminants est égale à $\sum_{i=1}^{3} \Gamma^{i}_{i\beta}g$. Il découle de la symétrie de g_{ij} que la dérivation des seconds facteurs $\mathbf{a}_j$ conduit à une somme identique.

Par conséquent,

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\beta}} = 2g\Gamma^{i}_{i\beta},$$

où l'on somme sur l'indice i.

On peut maintenant écrire l'expression de la divergence de tout vecteur dans un système quelconque de coordonnées :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla_{\alpha} v^{\alpha} = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + v^{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{v^{\beta}}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial v^{\alpha}\sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}}. \tag{3.7}$$

L'équation de continuité rapportée à un système quelconque de coordonnées a la forme

$$\sqrt{g}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^1 \sqrt{g}}{\partial x^1} + \frac{\partial \rho v^2 \sqrt{g}}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho v^3 \sqrt{g}}{\partial x^3} = 0. \tag{3.8}$$

Rappelons que v^{α} représentant les composantes du vecteur $\mathbf{v}$ dans la base covariante $\mathbf{a}_{\alpha}$, les vecteurs de cette dernière ne sont généralement pas les vecteurs unitaires.

Composantes physiques des vecteurs et des tenseurs. Le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ peut s'écrire comme suit :

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{\partial}_i = u^1 \frac{\boldsymbol{\partial}_1}{\sqrt{g_{11}}} + u^2 \frac{\boldsymbol{\partial}_2}{\sqrt{g_{22}}} + u^3 \frac{\boldsymbol{\partial}_3}{\sqrt{g_{33}}}, \tag{3.9}$$

où $\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{\partial}_i}{\sqrt{g_{ii}}}$ sont les vecteurs unitaires. Si le système de coordonnées est orthogonal, les composantes

$$u^i = v^i \sqrt{g_{ii}}$$

(pas de sommation sur i) sont égales aux projections de la vitesse $\boldsymbol{v}$ sur les tangentes aux courbes coordonnées et s'appellent composantes physiques du vecteur vitesse. Dans les systèmes de coordonnées orthogonales les quantités $u_i = v_i \sqrt{g^{ii}}$ (pas de sommation sur i) coïncident manifestement avec les composantes physiques introduites u^i. De la même manière on peut introduire les composantes physiques de tout vecteur (par exemple, celles de l'accélération $\boldsymbol{a}$ ou de grad p) et, en général, de tout tenseur d'ordre quelconque *).

L'équation de continuité (3.8) écrite en composantes physiques dans un système quelconque de coordonnées orthogonales prend la forme

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \sqrt{g_{22}g_{33}}\,u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \rho \sqrt{g_{11}g_{33}}\,u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho \sqrt{g_{11}g_{22}}\,u^3}{\partial x^3} = 0. \tag{3.10}$$

Equation de continuité en coordonnées sphériques et cylindriques. S'il s'agit d'un système de coordonnées cylindriques, on a $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

$$|\boldsymbol{\partial}_1| = 1, \quad |\boldsymbol{\partial}_2| = r, \quad |\boldsymbol{\partial}_3| = 1,$$

c'est-à-dire que

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \neq j.$$

L'équation de continuité rapportée aux coordonnées cylindriques s'écrit ainsi

$$r\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_r r}{\partial r} + \frac{\partial \rho u_\varphi}{\partial \varphi} + r\frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = 0.$$

Dans le système de coordonnées sphériques où $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ (angle polaire), $x^3 = \lambda$ (longitude), on a $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\lambda^2$, $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2 \sin^2\theta$, de sorte que l'équation de

*) Par exemple, les composantes physiques du tenseur $T = T^i_j\, \boldsymbol{\partial}_i \boldsymbol{\partial}^j$ peuvent être définies de la façon suivante :

$$T = T^i_j \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g^{jj}}\, \frac{\boldsymbol{\partial}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\boldsymbol{\partial}^j}{\sqrt{g^{jj}}} = (T^i_j)_{\text{phys}}\, \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}^j.$$

continuité prendra la forme

$$r^2 \sin\theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sin\theta \frac{\partial \rho u_r r^2}{\partial r} + r \frac{\partial \rho u_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \rho u_\lambda}{\partial \lambda} = 0.$$

Composantes de l'accélération en coordonnées orthogonales. Avant d'écrire les équations du mouvement d'Euler dans un système de coordonnées orthogonales essayons d'obtenir la formule exprimant les composantes de l'accélération a^j au moyen de g^{ij} et de v^i. La composante dv/dt s'écrit

$$a^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \nabla_i v^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + v^i v^\beta \Gamma^j_{i\beta}.$$

Transformons le dernier terme de cette formule, on a

$$v^i v^\beta \Gamma^j_{i\beta} = \underset{\substack{\beta \neq j \\ \text{(pas de sommation sur } j)}}{2 v^j v^\beta \Gamma^j_{\beta j}} + (v^\beta)^2 \Gamma^j_{\beta\beta} = \underset{\substack{\beta \neq j \\ \text{(pas de sommation sur } j)}}{2 v^j v^\beta \Gamma^j_{\beta j}} + (v^j)^2 \Gamma^j_{jj} + \underset{j \neq \beta}{(v^\beta)^2} \Gamma^j_{\beta\beta}.$$

En s'appuyant sur les formules (3.2) à (3.5) reliant les symboles de Christoffel $\Gamma^j_{\alpha\beta}$ avec g_{ij} on a dans un système de coordonnées orthogonales

$$a^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} v^i + \underset{\substack{\beta \neq j \\ \text{(pas de sommation sur } j)}}{\frac{v^j v^\beta}{g_{jj}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^\beta}} + \frac{1}{2} \frac{(v^j)^2}{g_{jj}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^j} - \frac{(v^\beta)^2}{2 g_{jj}} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^j}. \tag{3.11}$$

D'où, en remplaçant v^i par les composantes physiques u^i d'après (3.9), les composantes physiques de l'accélération en coordonnées cylindriques seront

$$\left.\begin{aligned}
a_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r}, \\
a_\varphi &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r}, \\
a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z};
\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

en coordonnées sphériques les composantes physiques de l'accélération s'écrivent

$$\left.\begin{aligned}
a_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \lambda} - \frac{u_\theta^2 + u_\lambda^2}{r}, \\
a_\theta &= \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda} + \frac{u_r u_\theta - u_\lambda^2 \operatorname{cotg}\theta}{r}, \\
a_\lambda &= \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\lambda}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_r u_\lambda + \operatorname{cotg}\theta u_\theta u_\lambda}{r}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

Composantes du vecteur gradiént d'une fonction scalaire dans un système de coordonnées orthogonales. Définissons les projections du vecteur grad p sur les axes d'un système de coordonnées orthogonales. On a

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x^i}\, \mathbf{a}^i = (\nabla_i p)\, \mathbf{a}^i = A_i \frac{\mathbf{a}^i}{\sqrt{g^{ii}}}.$$

Il s'ensuit que les composantes physiques A_i du vecteur grad p en coordonnées orthogonales ont pour expression

$$A_i = \frac{\partial p}{\partial x^i}\sqrt{g^{ii}} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial p}{\partial x^i}.$$

(pas de sommation sur i)

Les composantes physiques du vecteur grad p en coordonnées cylindriques sont

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad} p|_r &= \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \operatorname{grad} p|_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{grad} p|_z &= \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

En coordonnées sphériques elles sont

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad} p|_r &= \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \operatorname{grad} p|_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ \operatorname{grad} p|_\lambda &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Equations d'Euler dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques. Les relations (3.12) et (3.14) permettent d'écrire aisément les équations d'Euler en coordonnées cylindriques et (3.13) et (3.15) permettent de les écrire en coordonnées sphériques.

Les équations d'Euler rapportées aux axes cylindriques sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_r}{\partial r}u_r + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_r}{\partial z}u_z - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial t} = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ &\frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}u_\varphi + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}u_z + \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = F_\varphi - \frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\ &\frac{\partial u_z}{\partial r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}u_\varphi + \frac{\partial u_z}{\partial z}u_z + \frac{\partial u_z}{\partial t} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Dans les axes sphériques elles s'écrivent

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \lambda}-\frac{u_\theta^2+u_\lambda^2}{r}=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
&\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda}+\frac{u_r u_\theta}{r}-\frac{\operatorname{cotg}\theta}{r}u_\lambda^2=\\
&\qquad\qquad =F_\theta-\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta},\\
&\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\lambda}{\partial r}+\frac{u\theta}{r}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta}+\frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}+\frac{u_r u_\lambda}{r}+\frac{\operatorname{cotg}\theta u_\theta u_\lambda}{r}=\\
&\qquad\qquad =F_\lambda-\frac{r}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \lambda}.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.17)$$

Laplacien d'une fonction scalaire en coordonnées orthogonales. En posant

$$\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\Phi$$

et compte tenu de la formule (3.7) nous obtenons pour le laplacien d'une fonction scalaire Φ en coordonnées orthogonales quelconques l'expression

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi=\nabla^2\Phi=\Delta\Phi=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\right)}{\partial x^1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{11}}{g_{33}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right)}{\partial x^3}\right].\qquad(3.18)$$

Il s'ensuit que dans un système de coordonnées cylindriques on a

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},\qquad(3.19)$$

et dans un système sphérique

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda^2}\right].\qquad(3.20)$$

Les exemples ci-dessus illustrent l'application de formules générales à des cas particuliers importants.

Composantes du tenseur des taux de déformation et équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques et sphériques. Ecrivons, pour compléter, les expressions des composantes physiques du tenseur des taux de déformation dans les axes cylindriques

$$e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad 2e_{r\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right),$$

$$e_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r},\quad 2e_{\varphi z}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi},\quad e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad 2e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}$$

et sphériques

$$e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},$$

$$e_{\lambda\lambda}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta\operatorname{cotg}\theta}{r},$$

$$2e_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r},$$

$$2e_{\lambda r}=\frac{\partial u_\lambda}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\lambda}{r},$$

$$2e_{\lambda\theta}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\lambda}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\theta}-\frac{u_\lambda\operatorname{cotg}\theta}{r},$$

ainsi que les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible dans les axes cylindriques

$$a_r=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta u_r-\frac{u_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right),$$

$$a_\varphi=F_\varphi-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\nu\left(\Delta u_\varphi-\frac{u_\varphi}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\right),$$

$$a_z=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta u_z\quad\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

et sphériques

$$a_r=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\Delta u_r-\frac{2u_r}{r^2}-\frac{2u_\theta}{r^2}\operatorname{cotg}\theta-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right).$$

$$a_\theta=F_\theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\nu\left(\Delta u_\theta-\frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right),$$

$$a_\lambda=F_\lambda-\frac{1}{r_\theta\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\lambda}+\nu\left(\Delta u_\lambda-\frac{u_\lambda}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\lambda}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\lambda}\right)$$

$$\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\operatorname{cotg}\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right),$$

où les composantes physiques de l'accélération sont définies par les formules (3.12) et (3.13) respectivement.

Notons que les expressions précédées des facteurs multiplicatifs ν dans les deux dernières équations de Navier-Stokes représentent les composantes physiques du vecteur $\nabla^2\boldsymbol{v}$ obtenu par l'application du laplacien au vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$. En comparant ces expressions avec (3.19) et (3.20) respectivement on constate que l'application du laplacien à une composante vectorielle et à une fonction scalaire conduit, en général, à des formules différentes.

Equivalence dans l'espace tridimensionnel d'un tenseur antisymétrique du second ordre au vecteur axial. Dans un espace tridimensionnel à tout tenseur antisymétrique du second ordre $A_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$

correspond un vecteur axial $B = B^i \mathfrak{e}_i$ dont les composantes contravariantes sont définies par les formules

$$B^\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}} A_{\alpha\beta}, \tag{3.21}$$

où le système de trois indices α, β, γ s'obtient à partir du système 1, 2, 3 par une permutation circulaire et $g = \mathrm{Det} \| g_{\alpha\beta} \|$. Pour démontrer cette proposition considérons les formules de transformation des quantités B^γ lors du passage du système de coordonnées x^i au système y^i. Nous utiliserons en outre les formules tensorielles de transformation des composantes du tenseur $g_{ij}\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j$ et de celles du tenseur $A_{ij}\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j$ ainsi que l'antisymétrie de A_{ij}.

On a pour le déterminant g *)

$$g = |g_{ij}| = |g'_{kl}| \left| \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right| \left| \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \right| = g' \Delta^2,$$

Δ étant le déterminant de la matrice $\| \partial y^k / \partial x^i \|$.

C'est pourquoi

$$\frac{1}{\sqrt{g}} A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{1}{|\Delta|} A'_{pq} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{g'}} A'_{\alpha\beta} \frac{\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^\beta}{\partial x^j} - \dfrac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}}{|\Delta|}.$$

(la sommation sur α, $\beta = 1, 2, 3$ tels que $\alpha > \beta$)

(3.22)

On constate aisément que les quantités

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial y^j} - \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}$$

sont des cofacteurs des éléments $\partial x^k / \partial y^\gamma$ de la matrice, inverse de la matrice $\| \partial y^i / \partial x^j \|$ et, par conséquent,

$$\frac{1}{|\Delta|}\left[\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} - \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}\right] = \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}\frac{\Delta}{|\Delta|},$$

les indices α, β, γ et i, j, k représentant les permutations circulaires de 1, 2, 3.

Cela étant, les formules (3.22) peuvent être écrites sous la forme

$$B^k = B'^\gamma \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma} \frac{\Delta}{|\Delta|}. \tag{3.23}$$

Ces formules ne coïncident avec les formules ordinaires de transformation des composantes contravariantes d'un vecteur qu'à la condition $\Delta > 0$.

---

*) Dans ce qui suit on a surtout besoin de la formule de transformation de g; la relation entre g et la métrique n'est généralement pas essentielle.

Pour cette raison le vecteur $\boldsymbol{B} = B^i \mathfrak{e}_i$ défini par les formules (3.21) est appelé vecteur axial ou pseudovecteur à la différence du vecteur ordinaire qui est un vecteur polaire.

Une transformation inverse, par exemple

$$y^i = -x^i,$$

fait changer le signe des composantes d'un vecteur polaire $\boldsymbol{b}$, c'est-à-dire que

$$b'^k = b^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = -b^k,$$

tandis que les composantes du vecteur axial $\boldsymbol{B}$ conservent leur signe comme on le voit de (3.23) :

$$B'^k = -B^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = B^k.$$

Définition du rotationnel d'un vecteur dans les systèmes de coordonnées curvilignes. Le vecteur $\boldsymbol{c} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ est défini par les formules

$$\boldsymbol{c} = c^\gamma \mathfrak{e}_\gamma, \quad c^\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}} (\nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \right)$$

(α, β, γ s'obtiennent de 1, 2, 3 par permutation circulaire).

Il est évident que si $\boldsymbol{A}$ est un vecteur polaire, rot $\boldsymbol{A}$ est un vecteur axial.

Dans les axes cartésiens les composantes du vecteur $\boldsymbol{c} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ sont calculées d'après les formules

$$c^\gamma = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$$

(α, β, γ s'obtiennent de 1, 2, 3 par permutation circulaire).

Tenseur de Lévy-Chivita $\varepsilon = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{e}_\beta \mathfrak{e}_\gamma$. Il est évident que le rotationnel du vecteur $\boldsymbol{A} = A^\alpha \mathfrak{e}^\alpha$ peut être considéré comme le résultat de la contraction du tenseur $\nabla_\alpha A_\beta \mathfrak{e}^\alpha \mathfrak{e}^\beta$ avec un pseudotenseur du troisième ordre $\varepsilon = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathfrak{e}_\alpha \mathfrak{e}_\beta \mathfrak{e}_\gamma$ antisymétrique pour tous les indices, dont les composantes sont définies d'après les formules

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{g}} & \text{si } \alpha, \beta, \gamma \text{ s'obtiennent par une permutation paire de } 1, 2, 3; \\ -\dfrac{1}{\sqrt{g}} & \text{si } \alpha, \beta, \gamma \text{ s'obtiennent par une permutation impaire de } 1, 2, 3; \\ 0 & \text{s'il y a deux indices égaux parmi les } \alpha, \beta, \gamma \end{cases} \tag{3.24}$$

On vérifiera directement sans peine que les formules (3.24) définissent effectivement les composantes d'un pseudotenseur, autrement dit que les formules de transformation de $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ lors du passage à un autre système de coordonnées y^i peuvent s'écrire sous la forme

$$\varepsilon'^{ijk} = \frac{\Delta}{|\Delta|} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial y^k}{\partial x^\gamma},$$

ε'^{ijk} étant représentés à l'aide de $g' = \text{Det} \| g'_{ij} \|$ au moyen des formules analogues à (3.24). Le tenseur de Lévy-Chivita est appelé pseudotenseur parce que le signe dans la formule de transformation dépend du facteur $\Delta / | \Delta |$. Dans le cas des transformations propres ($\Delta > 0$) les pseudotenseurs ne diffèrent en rien des tenseurs ordinaires.

En résumé, les composantes du vecteur rot $\boldsymbol{A}$ peuvent être écrites sous la forme

$$c^\gamma = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \nabla_\alpha A_\beta.$$

Composantes du produit vectoriel dans les axes curvilignes. Envisageons le produit vectoriel de deux vecteurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ dans un système de coordonnées curvilignes. Admettons que les composantes c^γ du produit vectoriel $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ sont définies par les formules

$$c^\gamma = \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} A_\alpha B_\beta$$

ou

$$c^\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}} (A_i B_j - A_j B_i)$$

(les indices i, j, γ s'obtiennent par permutation circulaire de 1, 2, 3).

Il en découle, en particulier, qu'un produit de deux vecteurs polaires est un vecteur axial (pseudovecteur).

Exemples de vecteurs axiaux. Des exemples physiques de vecteurs axiaux qui sont, en fait, des tenseurs antisymétriques du second ordre sont fournis par le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \boldsymbol{v}$, par le vecteur intensité du champ magnétique $\boldsymbol{H}$, par le vecteur induction $\boldsymbol{B}$, etc.

L'équivalence entre un tenseur antisymétrique par deux indices et un vecteur axial par les mêmes indices n'existe que dans un espace tridimensionnel.

Dans un espace à $n > 3$ dimensions cette équivalence n'a pas lieu.

En physique, outre l'espace tridimensionnel aux coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3 on utilise également un espace physiquement admissible à quatre dimensions avec les coordonnées des points x^1, x^2, x^3 et avec le temps $t = x^4$.

Lorsqu'on introduit les équations physiques fondamentales il faut rapporter les vecteurs et les tenseurs à un espace quadridimension-

nel x^1, x^2, x^3, x^4 en supposant que les coordonnées des points de cet espace-temps soient reliées entre elles et équivalentes dans un certain sens.

Correspondance entre le tenseur antisymétrique du second ordre et les vecteurs axial et polaire dans un espace quadridimensionnel. Dans cet espace quadridimensionnel les équations physiques renferment souvent des tenseurs antisymétriques du second ordre jouant un rôle fondamental.

Soit F_{ik} un tenseur antisymétrique dans un espace quadridimensionnel. Par définition

$$F_{ik} = -F_{ki}$$

et, par conséquent,

$$F_{ii} = 0.$$

Lors du changement de coordonnées

$$x^i = f^i(y^k), \quad i, k = 1, 2, 3, 4, \tag{3.25}$$

les composantes du tenseur F_{ik} se transforment d'après les formules ordinaires

$$F_{ik}^{(y)} = F_{pq}^{(x)} \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^q}{\partial y^k}. \tag{3.25'}$$

Les formules de transformation (3.25′) ainsi que les résultats ci-dessous ne dépendent pas de la manière d'introduire la métrique dans l'espace quadridimensionnel. Toutefois, il est commode d'examiner en même temps que l'espace quadridimensionnel un sous-espace tridimensionnel usuel x^1, x^2, x^3, où la métrique est définie par la formule habituelle de la forme

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

La matrice quadridimensionnelle du tenseur F_{ik} s'écrit

$$\| F_{ik} \| = \begin{Vmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & \sqrt{g}\, H^3 & -\sqrt{g}\, H^2 & E_1 \\ -\sqrt{g}\, H^3 & 0 & \sqrt{g}\, H^1 & E_2 \\ \sqrt{g}\, H^2 & -\sqrt{g}\, H^1 & 0 & E_3 \\ -E_1 & -E_2 & -E_3 & 0 \end{Vmatrix} \tag{3.26}$$

où

$$g = \mathrm{Det}\,\|\,g_{\alpha\beta}\,\|.$$

Les lettres H^α et E_α ($\alpha = 1, 2, 3$) désignent ici les éléments correspondants de la matrice F_{ik}. Les formules de transformation (3.25') des composantes de F_{ik} peuvent être également envisagées comme les formules de transformation des grandeurs H^α et E_α.

Si l'on introduit, en même temps que la transformation générale des coordonnées (3.25), les transformations particulières

$$\left.\begin{aligned} x^\alpha &= f^\alpha(y^1, y^2, y^3) \quad (\alpha = 1, 2, 3), \\ x^4 &= y^4, \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

où seules les coordonnées spatiales sont affectées tandis que la coordonnée temporelle reste invariable, les formules générales de transformation (3.25') donneront des formules spéciales de transformation des grandeurs notées H^α et E_α dans la seconde matrice (3.26). Il découle de ces formules que, dans le cas de transformations spéciales (3.27), les grandeurs H^α et E_α peuvent être considérées respectivement comme les composantes contravariantes d'un vecteur axial tridimensionnel

$$\boldsymbol{H} = H^\gamma \mathfrak{e}_\gamma \quad (\gamma = 1, 2, 3),$$

$$H^\gamma = \frac{1}{\sqrt{g}} F_{\alpha\beta}$$

(α, β, γ s'obtiennent par permutation circulaire de 1,2, 3), et comme les composantes covariantes d'un vecteur polaire

$$\boldsymbol{E} = E_\gamma \mathfrak{e}^\gamma \quad (\gamma = 1, 2, 3),$$

$$E_\gamma = F_{\gamma 4}.$$

Il va sans dire que dans le cas général de la transformation quadridimensionnelle (3.25) les formules de transformation de H^γ et E_γ ne sont pas vectorielles. Pour l'espace quadridimensionnel les vecteurs tridimensionnels $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{E}$ ne sont pas des êtres invariants.

On verra plus loin que les vecteurs champ électrique et champ magnétique peuvent être considérés comme les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ associés au tenseur quadridimensionnel correspondant

$$F = F_{ik} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^k.$$

Soulignons que les relations précédentes entre F_{ik}, E_γ et H^γ sont indépendantes de la métrique de l'espace quadridimensionnel. Dans (3.26) on peut substituer au tenseur métrique tridimensionnel $g_{\alpha\beta}\mathfrak{e}^\alpha\mathfrak{e}^\beta$ un autre tenseur spatial tridimensionnel du second ordre quelconque pourvu que le déterminant formé de ses composantes ne soit pas nul.

CHAPITRE V

NOTIONS ET ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THERMODYNAMIQUE

§ 1. Théorème des forces vives et travail de forces internes surfaciques

Parmi les conséquences générales les plus importantes des équations dynamiques du mouvement du milieu continu on peut citer le théorème des forces vives.

Soient V un volume fini quelconque se déplaçant avec les particules du milieu matériel, Σ la surface qui le délimite. Supposons qu'à l'intérieur du volume V les composantes du tenseur des contraintes $P = p^{ij}\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$ et celles du vecteur vitesse $\boldsymbol{v} = v^i\mathbf{a}_i = v_i\mathbf{a}^i$ soient des fonctions continues et dérivables des coordonnées spatio-temporelles.

Prenons un vecteur $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\,dt$, vecteur du déplacement d'un volume matériel infinitésimal $d\tau$ au bout du temps dt; formons le produit scalaire de l'équation des impulsions par $d\boldsymbol{r}$ et intégrons sur le volume V. Il vient

$$\int_V \rho\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\,dt\,d\tau = \int_V \rho\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}\,d\tau + \int_V (\nabla_j p^{ij})\,v_i\,dt\,d\tau. \tag{1.1}$$

Transformons les intégrales de cette relation.

Energie cinétique d'un volume V de milieu continu. La quantité scalaire (invariante) $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}$ peut être calculée dans n'importe quel système de coordonnées. Pour le système de coordonnées cartésiennes nous obtenons aisément

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,v^2.$$

Comme la masse $dm = \rho\,d\tau$ est constante, il est évident que

$$\int_V \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}\rho\,d\tau\,dt = \int_M d\left(\frac{v^2}{2}\right)dm = d\int_M \frac{v^2}{2}\,dm = dE,$$

où, par définition,

$$E = \int_V \frac{\rho v^2}{2}\,d\tau \tag{1.2}$$

est l'énergie cinétique du volume V de milieu continu.

Travail des forces massiques internes et extérieures. Classons les forces massiques $\boldsymbol{F}$ en deux groupes : $\boldsymbol{F}^{(i)}$ internes et $\boldsymbol{F}^{(e)}$ extérieures

par rapport à tout le volume V. On a alors

$$\int_V \rho \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}\, d\tau = \int_V \rho \boldsymbol{F}^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}\, d\tau + \int_V \rho \boldsymbol{F}^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}\, d\tau = dA_m^{(e)} + dA_m^{(i)}, \qquad (1.3)$$

où $dA_m^{(e)}$ et $dA_m^{(i)}$ sont les travaux élémentaires des forces massiques extérieures et internes par rapport au volume V et agissant sur ce volume pendant un déplacement infiniment petit.

On remarquera que la somme de toutes les forces massiques internes qui s'exercent sur tout le volume V est constamment nulle bien que leur travail puisse être différent de zéro.

Remplaçons la dernière intégrale de l'expression (1.1) par les deux intégrales suivantes:

$$\int_V (\nabla_j p^{ij})\, v_i\, dt\, d\tau = \int_V \nabla_j (p^{ij} v_i)\, dt\, d\tau - \int_V p^{ij} \nabla_j v_i\, dt\, d\tau. \qquad (1.4)$$

Servons-nous du théorème de Gauss-Ostrogradsky pour transformer la première intégrale du second membre de (1.4) et appliquons à la seconde l'identité évidente

$$\nabla_j v_i = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) + \frac{1}{2}(\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) = e_{ij} + \omega_{ij}.$$

On aura

$$\int_V (\nabla_j p^{ij})\, v_i\, dt\, d\tau = \int_\Sigma p^{ij} v_i n_j\, d\sigma\, dt - \int_V p^{ij} e_{ij}\, dt\, d\tau - \int_V p^{ij} \omega_{ij}\, dt\, d\tau, \qquad (1.5)$$

où Σ est la surface enveloppant le volume V, n_i sont les composantes covariantes du vecteur unitaire normal à Σ, extérieur au volume V.

Remarquons qu'en vertu de l'antisymétrie du tenseur $\omega_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$ l'égalité suivante a lieu:

$$p^{ij}\omega_{ij} = \underset{[i<j]}{p^{ij}\omega_{ij} + p^{ji}\omega_{ji}} = \underset{[i<j]}{(p^{ij} - p^{ji})\,\omega_{ij}}. \qquad (1.5')$$

C'est pourquoi, lorsque dans le cas classique le tenseur des contraintes est symétrique ($p^{ij} = p^{ji}$), la dernière intégrale de (1.5) est nulle.

Travail des forces extérieures surfaciques. Etant donné que $p^{ij} n_j \mathbf{e}_i = \boldsymbol{p}_n$, on peut écrire

$$\int_\Sigma p^{ij} v_i n_j\, d\sigma\, dt = \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n \cdot d\boldsymbol{r}\, d\sigma = dA_{surf}^{(e)}, \qquad (1.6)$$

où $dA_{surf}^{(e)}$ désigne le travail des forces surfaciques extérieures s'exerçant au niveau de la surface Σ du volume isolé V lors des déplacements infiniment petits $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, dt$ des points de la surface Σ.

Définition de travail des forces internes surfaciques. La dernière intégrale de (1.4) qui est une quantité invariante est appelée, par définition, travail des forces de contraintes internes surfaciques dans le volume V:

$$-\int_V p^{ij}\nabla_j v_i \, dt \, d\tau = dA^{(i)}_{\text{surf}}. \tag{1.7}$$

Théorème des forces vives pour un volume fini du milieu continu. Ainsi donc l'égalité (1.1) peut être récrite sous la forme:

$$dE = dA^{(e)}_{\text{m}} + dA^{(i)}_{\text{m}} + dA^{(e)}_{\text{surf}} + dA^{(i)}_{\text{surf}}. \tag{1.8}$$

En d'autres termes, pour un mouvement réel, la différentielle de l'énergie cinétique d'un volume matériel fini est égale à la somme des travaux élémentaires des forces massiques et surfaciques internes et extérieures, qui s'exercent sur ce volume. Nous venons de formuler le théorème des forces vives appliqué au volume fini du milieu continu déformable.

Il faut se garder d'oublier que dans la formule du théorème des forces vives (1.8) dE est une différentielle totale de la fonction E, énergie cinétique du volume du milieu continu, tandis que les termes $dA^{(e)}_{\text{m}}$, $dA^{(i)}_{\text{m}}$, $dA^{(e)}_{\text{surf}}$, $dA^{(i)}_{\text{surf}}$ sont généralement des quantités infiniment petites, à savoir les travaux élémentaires des forces correspondantes s'exerçant sur des déplacements continus infiniment petits

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\, dt$$

définis en chaque point du milieu continu.

Expression du travail des forces surfaciques internes dans le cas d'un tenseur de contraintes symétrique. Les relations (1.4), (1.5), (1.5′) permettent de présenter l'expression du travail des forces surfaciques internes sous la forme suivante:

$$dA^{(i)}_{\text{surf}} = -\int_V p^{ij} e_{ij} \, dt \, d\tau - \int_V p^{ij}\omega_{ij} \, dt \, d\tau, \tag{1.9}$$

ou, dans le cas d'un tenseur de contraintes symétrique, sous la forme

$$dA^{(i)}_{\text{surf}} = -\int_V p^{ij} e_{ij} \, dt \, d\tau. \tag{1.10}$$

On sait (voir ch. IV, § 3) que dans un espace tridimensionnel à un tenseur antisymétrique ω_{ij} peut être associé un vecteur axial $\boldsymbol{\omega}$, le vecteur rotation. Les considérations qui précèdent montrent que la présence de tourbillons dans un milieu continu en mouvement admettant la description par un tenseur de contraintes symétrique

(en particulier, en l'absence de moments cinétiques internes et de couples massiques et surfaciques extérieurs) n'influe pas directement sur la valeur du travail élémentaire des forces surfaciques internes et, par suite, sur la variation de l'énergie cinétique.

Théorème des forces vives pour un volume infinitésimal du milieu continu. Formulons maintenant le théorème des forces vives pour un volume infinitésimal du milieu continu. Appliquons à cet effet le théorème de la moyenne à toutes les intégrales (1.2), (1.3), (1.4) entrant dans l'égalité (1.8) qui traduit le théorème des forces vives pour un volume fini ; divisons le résultat par la masse M du volume V et passons à la limite lorsque V tend vers un point. On obtient

$$\frac{dv^2}{2} = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \frac{1}{\rho}\nabla_j(p^{ij}v_i)\,dt - \frac{1}{\rho}p^{ij}\nabla_j v_i\,dt.$$

On peut appeler $v^2/2$ densité d'énergie cinétique et $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, $\frac{1}{\rho}\nabla_j(p^{ij}v_i)\,dt$, $-\frac{1}{\rho}p^{ij}\nabla_j v_i dt$ densités de travail des forces massiques et surfaciques extérieures et internes.

Le travail élémentaire des forces massiques internes n'entre pas dans le théorème des forces vives pour un volume infiniment petit du milieu continu, puisque, pour autant qu'on le sache, il tend vers zéro lorsque V tend vers un point et $M \to 0$.

Supposons, par exemple, que les forces massiques internes soient les forces d'attraction newtonienne qui s'exercent entre les particules du volume V. Le travail des forces massiques internes dans le volume V de masse M s'écrit alors évidemment comme suit :

$$\int_M\int_M \frac{dm_1\,dm_2}{(r_1-r_2)^2}\,\frac{r_1-r_2}{|r_1-r_2|}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Divisée par M, cette expression tend vers zéro lorsque V se réduit en un point.

Ainsi donc on peut formuler de la façon suivante le théorème des forces vives qui s'applique à chaque particule élémentaire : en chaque point du milieu continu la différentielle de la densité d'énergie cinétique est égale à la somme des densités des travaux élémentaires des forces massiques extérieures, des forces surfaciques internes et extérieures s'exerçant sur ce milieu.

On voit que le théorème des forces vives est une conséquence immédiate des équations des impulsions et représente l'équation de l'équilibre de l'énergie mécanique. Le théorème des forces vives est de nature énergétique, mais ne traduit pas, en général, la loi de conservation de l'énergie. Il ne peut être interprété comme loi de conservation de l'énergie (dans le cadre des problèmes de la mécanique) que dans le cas où l'énergie mécanique du système considéré ne se transforme pas en chaleur ou en d'autres formes d'énergie.

Notons que la loi générale de conservation de l'énergie se présente dans ce cas sous la forme de deux lois distinctes, celle de conservation de l'énergie mécanique et celle de conservation de l'énergie non mécanique.

Essayons d'obtenir les expressions de la densité de travail des forces surfaciques internes $\frac{1}{dm} dA^{(i)}_{surf}$ dans quelques cas particuliers. On a

$$\frac{1}{dm} dA^{(i)}_{surf} = -\frac{1}{\rho} p^{ij} e_{ij}\, dt - \frac{1}{\rho} p^{ij} \omega_{ij}\, dt = -\frac{1}{\rho} p^{ij} e_{ij}\, dt - \\ -\frac{1}{\rho} \underset{[i<j]}{(p^{ij} - p^{ji})}\, \omega_{ij}\, dt.$$

Si le milieu se déplace comme un solide, tous les $e_{ij} = 0$ et

$$\frac{1}{dm} dA^{(i)}_{surf} = -\frac{1}{\rho} \underset{[i<j]}{(p^{ij} - p^{ji})}\, \omega_{ij}\, dt.$$

Si le tenseur des contraintes n'est pas symétrique ($p^{ij} \neq p^{ji}$) et le milieu se déplace comme un solide parfait, le travail des forces surfaciques peut différer de zéro, car la vitesse angulaire ω et, par suite, ω_{ij} peuvent être non nulles (cas de la rotation).

Si le tenseur des contraintes est symétrique, on a l'égalité suivante:

$$\frac{1}{dm} dA^{(i)}_{surf} = -\frac{1}{\rho} p^{ij} e_{ij}\, dt, \tag{1.11}$$

c'est-à-dire que dans ce cas le travail des forces surfaciques internes est déterminé, généralement, par les déformations. Si le milieu caractérisé par un tenseur des contraintes symétrique se déplace comme un solide rigide, le travail des forces surfaciques internes y est toujours nul.

Densité de travail des forces internes appliquées au fluide parfait. Pour un milieu parfait on a $p^{ij} = -pg^{ij}$, donc

$$\frac{1}{dm} dA^{(i)}_{surf} = \frac{p}{\rho} g^{ij} e_{ij}\, dt = \frac{p}{\rho} e^{i}_{\cdot i}\, dt = \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dt.$$

En exprimant div $\boldsymbol{v}$ au moyen de l'équation de continuité on obtient

$$\frac{1}{dm} dA^{(i)}_{surf} = -\frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dl}\, dt = p\, d\frac{1}{\rho} = p\, dV, \tag{1.12}$$

où V est le volume spécifique.

Pour une particule élémentaire du milieu parfait, dans les régions d'un mouvement continu du milieu, le théorème des forces vives s'écrit

$$d\frac{v^2}{2} = \frac{1}{dm} dA^{(e)}_{m} + \frac{1}{dm} dA^{(e)}_{surf} + p\, d\frac{1}{\rho} = \boldsymbol{F}^{(e)} \cdot \boldsymbol{v}\, dt - \\ -\frac{1}{\rho} \nabla_k (p v^k)\, dt + p\, d\frac{1}{\rho}. \tag{1.13}$$

Il n'est pas inutile de remarquer que dans un mouvement du milieu continu par rapport à un système de coordonnées fixe ou mobile, la densité de travail des forces internes n'est généralement pas égale à la densité de travail de signe contraire de toutes les forces extérieures massiques et surfaciques.

§ 2. Premier principe de la thermodynamique (loi de conservation de l'énergie) et équation de la chaleur reçue

Paramètres d'état. La thermodynamique, et par suite toute la mécanique des milieux continus, se fonde sur les notions d' «état » du système et de « paramètres d'état » que nous allons tenter d'expliquer. On dit que l'état d'un système (d'un certain volume du milieu continu, par exemple) est donné si les valeurs de certains paramètres $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n$, définissant de manière exhaustive toutes les caractéristiques nécessaires du système (milieu), sont données. Ces paramètres μ^i, qui peuvent en général dans certains intervalles prendre des valeurs quelconques, sont appelés paramètres d'état.

Le nombre et le choix des paramètres d'état dépendent des modèles du milieu continu considéré.

Qu'entend-on par connaître l'état d'un milieu? On peut proposer la réponse suivante. Tous les corps sont composés d'atomes et de molécules et si l'on connaît, à tous les instants, la position et le mouvement de toutes les particules élémentaires du corps, on connaît l'état de tout le corps. Mais cette réponse n'est pas satisfaisante. En effet, s'il s'agit de donner l'état d'un centimètre cube d'air immobile, il faut introduire les $3 \cdot 27 \cdot 10^{19}$ fonctions du temps que sont les coordonnées des molécules (considérées comme points matériels) enfermées dans ce volume, car, même si le gaz est au repos, ses molécules sont en mouvement. Cependant on sait que, du point de vue macroscopique, il suffit dans bien des cas de donner seulement deux paramètres, à savoir, la pression p et la densité ρ, pour connaître l'état de l'air (et d'autres gaz) au repos.

La méthode macroscopique prend en considération des processus, des effets et des propriétés qui ne sont essentiels que pour des corps de dimensions finies *) observés ou utilisés dans différents phénomènes naturels ou techniques.

Loin d'être trivial, le problème de passer d'un grand nombre de paramètres définissant l'état du milieu en tant que système discontinu à un nombre réduit de paramètres, comme ρ et p pour un gaz, caractérisant l'état macroscopique du milieu, constitue pour la physique des fluides et des solides un objectif de tout premier plan. La résolution de ce problème s'accompagne toujours d'hypothèses

*) On les dit essentiels pour ce qui concerne la manière de poser le problème, le choix judicieux, adéquat et précis des mesures et notions adoptées.

complémentaires comme les lois de la probabilité et d'autres hypothèses puisées dans les observations empiriques.

On peut construire les paramètres macroscopiques à la manière des moyennes statistiques, en s'appuyant sur certaines suppositions qui se rapportent à l'ensemble d'un grand nombre de molécules dont les mouvements et les positions sont en général arbitraires. Par exemple, la vitesse macroscopique $\boldsymbol{v}$ d'un gaz peut être présentée comme la vitesse du centre d'inertie de l'ensemble des molécules incluses dans un volume physiquement petit ; la température T, comme l'énergie moyenne par degré de liberté du mouvement chaotique des atomes et des molécules par rapport au mouvement macroscopique ; la contrainte $\boldsymbol{p}_n$ appliquée à un élément de surface, comme la caractéristique moyenne de l'impulsion transportée par les molécules à travers cet élément lors de leur mouvement chaotique, etc.

Le plus souvent, les paramètres de définition sont introduits pour des classes déterminées de problèmes examinés à la lumière d'hypothèses faisant appel aux données expérimentales et théoriques. Dans bien des cas complexes, tels que les modèles des corps solides viscoplastiques, les phénomènes non équilibrés des systèmes physiques, chimiques ou biologiques complexes, les phénomènes accompagnés de rayonnement, etc., l'introduction des paramètres de définition est un problème à résoudre et fait l'objet de recherches.

Nombre de paramètres d'état pour des milieux continus. L'état interne d'une petite particule d'un continuum matériel peut être déterminé, d'une façon générale, par un nombre de paramètres de définition bien plus réduit que celui d'un système discontinu de particules élémentaires. Par exemple, en élasticité classique, l'état interne d'une particule d'un corps solide déformable est caractérisé par sept paramètres variables seulement, à savoir six composantes du tenseur des déformations ε_{ij} et la température T, ainsi que par les quantités constantes pour le milieu donné telles que le module d'Young E, le coefficient de Poisson σ et la chaleur spécifique c. On ne saurait pourtant exclure l'éventualité d'un nombre infini de paramètres d'état, même pour une particule infiniment petite d'un modèle quelconque du continuum (milieu continu).

Un exemple de ce modèle nous est fourni par le modèle à mémoire. Pour construire ce dernier on suppose que les contraintes p^{ij} dépendent non seulement des déformations et de la température actuelles mais contiennent toute l'histoire antérieure de la déformation, c'est-à-dire qu'elles sont fonction de $\varepsilon_{ij}(t)$ et de $T(t)$. Cela revient à affirmer que les p^{ij} dépendent des ε_{ij}, de T et de toutes leurs dérivées dans le temps, c'est-à-dire que le nombre de paramètres d'état de ces milieux est infini. Un autre exemple, plus complexe, est celui des continua que l'on rencontre dans les théories cinétiques de la physique statistique, notamment un gaz qu'on peut décrire par

l'équation de Boltzmann. Ce genre de modèles est pourtant complexe et, comme le montre la pratique théorique et expérimentale, dans la plupart des cas usuels importants on peut se contenter de donner un petit nombre de paramètres pour décrire l'état d'une petite particule. Dans les théories cinétiques développées on a souvent recours à des méthodes approchées qui sont équivalentes, du point de vue physique, au passage à des modèles à nombre de degrés de liberté fini pour des particules infiniment petites.

On remarquera que pour définir l'état d'un volume fini d'un milieu continu il faut, en général, introduire des fonctions (et non une quantité finie de nombres) telles que la répartition des déformations, de la température, etc. Définir une fonction c'est donner un nombre infini de paramètres (par exemple, les coefficients de Fourier de cette fonction). C'est pourquoi dans le cas général le nombre de paramètres de définition d'un volume fini est toujours infini pour tous les modèles du milieu continu.

Cependant, à l'échelle infinitésimale, toutes les fonctions d'état d'un corps peuvent être considérées approximativement soit comme linéaires, soit comme quadratiques, soit comme des polynômes d'un degré peu élevé. Les coefficients de ces polynômes fournissent alors un nombre fini de paramètres définissant l'état des éléments matériels infinitésimaux.

En mécanique des milieux continus, les particules infinitésimales sont considérées comme des systèmes thermodynamiques pour lesquels on a défini les notions mécaniques sur la position du système, les caractéristiques de son mouvement ainsi que les notions physiques sur l'état interne.

Nous admettrons par la suite qu'une particule élémentaire possède un système fini de caractéristiques, c'est-à-dire de paramètres de définition, donnés par des nombres dans le système de coordonnées et dans le système d'unités utilisés.

Certains de ces paramètres peuvent être géométriques ou mécaniques comme c'est le cas des coordonnées spatiales, de la vitesse, de la densité, des caractéristiques de la déformation, etc. ; d'autres sont de nature physique ou chimique tels que la température, la concentration de différents constituants, les paramètres de structure, les caractéristiques de phase d'une substance, les coefficients de conduction thermique, de viscosité, les modules d'élasticité, etc.

Convenons de désigner par μ^i les paramètres qui peuvent être variables dans le système de référence donné, et par k^i les constantes physiques. Certains paramètres μ^i, k^i peuvent être les composantes de divers vecteurs et tenseurs.

Système complet des paramètres de définition. Par définition, les quantités $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n, k^1, k^2, \ldots, k^m$ forment, pour une petite particule donnée, une base (système complet des paramètres

de définition) si elles peuvent être données indépendamment les unes des autres et, dans certaines limites, arbitrairement, leur ensemble ayant la propriété fondamentale de permettre d'exprimer sous une forme universelle, indépendante du problème particulier, toutes les autres caractéristiques d'état et de mouvement considérées dans la classe des problèmes en question.

Par exemple, on verra plus bas que la densité et la température d'une particule gazeuse peuvent être définies dans certaines limites d'une façon arbitraire, tandis que les autres fonctions thermodynamiques, notamment l'entropie et la pression, se traduisent par leur intermédiaire.

Il faut faire la différence entre le système des paramètres de définition d'un problème concret et le système de paramètres définissant l'état du milieu. Le premier système est celui des paramètres caractérisant les conditions du problème et qui, pour des corps finis, met en relief un phénomène concret en partant d'un système d'équations, des conditions aux limites et d'autres conditions (l'élaboration de ce système dépend du problème concret donné). Le deuxième système de paramètres groupe les caractéristiques d'état pour lesquelles on doit composer des équations valables pour tout un ensemble de problèmes et de processus concrets.

La composition d'un système de paramètres définissant l'état physique des éléments matériels représente une importante étape, fondamentale du point de vue de la logique dans l'édification du modèle du milieu continu servant à décrire le mouvement d'un certain milieu réel dans une certaine classe déterminée de conditions extérieures.

Mathématiquement, les paramètres d'état $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n$, $k^1, k^2, \ldots, k^m$ représentent les arguments des fonctions entrant dans le système complet d'équations qui décrit le comportement du milieu *). Il est clair que ces fonctions peuvent dépendre du choix des variables indépendantes, et par suite le système des paramètres de définition décrivant le modèle du milieu continu donné peut se composer de différentes grandeurs. Par exemple, dans le cas d'un gaz ce peut être soit p et ρ, soit p et T, soit ρ et T, etc.

Il n'est pas impossible que, du point de vue physique, ces divers systèmes de paramètres de définition pour un modèle du milieu continu donné ne soient pas équivalents. Comme on verra par la suite, on n'apporte pas la même quantité d'information en présentant l'énergie interne en fonction de ρ et de l'entropie S ou bien de p et ρ. Lorsque l'on construit le système de paramètres de définition, on se rend bien compte que c'est un ensemble des quantités et des

*) L'expression même de « paramètres de définition » sous-entend que les relations fonctionnelles concrètes sont établies à l'aide des lois, des hypothèses et des définitions directes correspondantes.

caractéristiques à déterminer. Il est évident que les systèmes de paramètres de définition diffèrent, en général, par le nombre et la nature des paramètres selon les grandeurs à déterminer.

Systèmes thermodynamiques holonomes et non holonomes. Il existe une analogie entre la notion de degré de liberté dans la mécanique rationnelle et la notion de paramètres de définition dans la mécanique des milieux continus.

En effet, le nombre de degrés de liberté est défini comme le nombre de paramètres indépendants fixant la position du système mécanique. Par exemple, un solide parfait possède six degrés de liberté. Notons que si le solide parfait est considéré comme un système physique, on doit introduire encore dix paramètres constants, à savoir la masse, la position du centre d'inertie dans le corps et les composantes du tenseur d'inertie au centre d'inertie.

La mécanique rationnelle étudie les systèmes non holonomes. La mécanique des milieux continus compte également des problèmes dans lesquels les paramètres de définition μ^i varient arbitrairement dans des limites déterminées et leurs accroissements $\delta\mu^i$ sont liés, selon les conditions de la classe de problèmes en question, par m relations, par exemple, indépendantes non intégrables de la forme

$$A_i \delta\mu^i = 0,$$

où les A_i sont des fonctions des paramètres de définition. Dans ce cas, le nombre $n - m$ des accroissements indépendants $\delta\mu^i$ s'avère inférieur au nombre de paramètres de définition variables indépendants μ^i, et le système thermodynamique est alors appelé non holonome.

Pour un système non holonome le nombre de degrés de liberté est défini comme le nombre des accroissements indépendants $\delta\mu^i$.

Examinons l'exemple des relations non holonomes découlant uniquement de la définition des paramètres μ^i. Soient, par exemple, $\mu^1(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ un paramètre scalaire quelconque (la densité de la particule ρ par exemple), t le temps, ξ^1, ξ^2, ξ^3 les coordonnées lagrangiennes du centre de la particule isolée et μ^2 et μ^3 les dérivées première et seconde de μ^1 en t, c'est-à-dire

$$\mu^2 = \frac{\partial\mu^1}{\partial t}, \quad \mu^3 = \frac{\partial\mu^2}{\partial t} = \frac{\partial^2\mu^1}{\partial t^2}. \tag{2.1}$$

Selon la condition physique naturelle nous admettrons que le temps t n'entre pas explicitement dans le système des μ^i.

Il est clair qu'à des conditions extérieures différentes correspondent les états aux μ^1, μ^2, μ^3 différents, pouvant varier arbitrairement dans certaines limites, tandis que les accroissements $d\mu^1$ et $d\mu^2$ dus à la variation de dt, pour des ξ^1, ξ^2, ξ^3 constants, sont cons-

tamment liés par une même relation non holonome

$$\mu^2 d\mu^2 - \mu^3 d\mu^1 = 0 \tag{2.2}$$

qui devient une identité si on a (2.1). Il découle des égalités (2.1) que les relations (2.2) ne sont pas vérifiées pour $\delta\mu^1$ et $\delta\mu^2$ quelconques. On rencontre des relations non holonomes de ce genre lorsqu'on a affaire à des modèles des milieux continus admettant, parmi les paramètres, les dérivées successives par rapport au temps. Les équations (2.1) et (2.2) ne sont liées ni aux observations ni à l'expérience, mais on peut voir un résultat expérimental dans le fait qu'il est possible et rationnel d'introduire parmi les paramètres de définition d'un modèle de milieu continu les dérivées successives que l'on considérera alors comme les arguments de certaines fonctions, ces dernières étant construites, en fin de compte, à partir de données expérimentales.

Espace des états. Introduisons la notion d'espace des états, c'est-à-dire de l'espace dont les coordonnées sont les paramètres d'état μ^i (espace de phase).

Il est évident qu'à différents états des systèmes thermodynamiques correspondent différents points de l'espace des états.

Processus et cycles. L'ensemble des états du milieu qui correspond à une certaine suite des valeurs des paramètres est appelé processus. Les processus physiques réels revêtent une importance particulière, leurs états successifs se réalisant, dans le cadre du modèle étudié, pendant un certain laps de temps. On différencie les processus réels d'après les interactions extérieures ou internes.

Si l'ensemble des états $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n$ du système forme une courbe continue dans l'espace des états, il s'agit d'un processus continu. On étudie également les processus caractérisés par des valeurs discontinues des paramètres d'état $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n$ et, notamment, les processus discontinus constitués de parties continues de courbes dans l'espace des états. La mécanique des milieux continus étudie les processus continus et les processus discontinus aux points de discontinuité isolés sur les courbes continues dans l'espace des états.

Deux états donnés peuvent être reliés, en général, par une multitude de processus différents, tant continus que discontinus. La famille de courbes traduisant les processus réels, fonctions des conditions extérieures diverses, est le plus souvent arbitraire. Cependant, dans certains cas, comme pour les systèmes non holonomes, les courbes correspondantes sont caractérisées par des propriétés spéciales faciles à trouver. Dans l'exemple déjà considéré, il découle de (2.1) qu'un processus continu avec $\mu^1 = \text{const}$ et $\mu^2 \neq 0$ est impossible. Néanmoins les égalités (2.1) n'excluent pas l'éventualité de pro-

cessus réels continus reliant dans l'espace des états deux points quelconques aux coordonnées arbitraires $\mu^{1'}$, $\mu^{2'}$, $\mu^{3'}$ et $\mu^{1''}$, $\mu^{2''}$, $\mu^{3''}$.

Le nombre et la nature des paramètres peuvent différer selon les processus. Par exemple, les processus peuvent être purement mécaniques lorsque tous les paramètres de caractère non mécanique gardent des valeurs constantes.

On appelle cycle un processus qui, dans l'espace des états, ramène le système à l'état initial.

Le cycle des processus continus est décrit, dans l'espace des états, par une courbe fermée.

On étudiera dans ce chapitre les processus continus. Les processus aux points de discontinuité seront analysés dans le chapitre VII.

On peut considérer toutes sortes de cycles continus passant par un certain état donné A et un autre état B. Aux différents processus, ou cycles, correspondent différentes conditions extérieures. Ce fait est enregistré dans les équations définissant μ^1, μ^2, . . ., μ^n, car elles contiennent certaines fonctions éventuellement différentes qui peuvent être choisies à des fins précises et influencer ainsi les processus. Les exemples connus de modèles de milieux continus montrent que, lorsque l'état A est fixé, l'état B coïncide, généralement, avec tous les états possibles contenus dans le volume de phase qui est fonction de valeurs physiquement admissibles des paramètres de définition.

Interaction du système avec les objets extérieurs. Au cours d'un processus le système peut généralement être soumis aux actions des champs et des corps extérieurs. La mise en évidence des lois et des mécanismes d'interaction de la particule matérielle isolée avec les corps et les champs extérieurs (en particulier, avec les particules voisines du même milieu) représente un problème de tout premier ordre dans la construction d'un modèle de milieu continu.

Des considérations pratiques et la mécanique des milieux continus incitent à chercher les relations macroscopiques ayant un nombre réduit de paramètres de définition. Très souvent ces relations se fondent sur un point de vue microscopique sur les propriétés des molécules, des atomes ou d'autres particules, de leurs positions, de leurs mouvements et des forces qu'ils exercent entre eux. Toutefois on ne peut jamais connaître tous les détails. On remarquera à cet égard qu'il est impossible et surtout inutile de tenir compte de toutes les particularités même quand elles sont connues. C'est pourquoi on cherche à formuler et à appliquer aux modèles à construire des hypothèses phénoménologiques sous telle ou telle forme qui, après avoir été confirmées par l'expérience, sont appelées lois de la nature.

En physique et, en particulier, en mécanique des milieux continus on attache une grande importance à l'échange énergétique

ayant lieu entre la particule donnée (système thermodynamique) et les particules voisines, les corps extérieurs et les champs extérieurs. La notion d'énergie est intimement liée à celle de diverses espèces d'énergie. Citons parmi ces dernières l'énergie cinétique des particules, l'énergie potentielle due à la disposition relative des particules, l'énergie thermique, l'énergie électromagnétique, l'énergie de liaison chimique, etc. Une étude plus détaillée effectuée au niveau microscopique apporte certaines modifications dans les conceptions des différentes espèces (et du nombre d'espèces) d'énergie. Cependant, l'expérience montre qu'au niveau macroscopique on peut différencier, d'après certains critères phénoménologiques, les espèces d'énergie citées ci-dessus et d'autres encore, et que l'on peut parler de la transformation d'une espèce d'énergie en une autre.

Nous nous appuierons sur l'hypothèse physique fondamentale stipulant l'existence de caractéristiques qui permettent de distinguer au niveau macroscopique les espèces d'énergie d'un corps et les espèces de flux d'énergie reçus par le corps par suite de l'action des corps et des champs extérieurs. Nous ne manquerons pas également de tenir compte de la transformation d'une espèce d'énergie en une autre.

Envisageons un système caractérisé par un nombre fini de paramètres comme, par exemple, une particule de matière infiniment petite ou un volume fini V d'un milieu continu à condition que toutes les particules de ce volume subissent les mêmes processus (les paramètres d'état dans ce cas sont constants dans tout le volume).

Supposons que la donnée des caractéristiques de l'état interne $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n$ d'une particule ainsi que de leurs variations infinitésimales $d\mu^1, d\mu^2, \ldots, d\mu^n$ permet d'évaluer divers flux sommaires macroscopiques d'énergie pénétrant de l'extérieur dans la particule. L'information contenue dans les accroissements $d\mu^1, d\mu^2, \ldots, d\mu^n$ sur ces flux suivant le processus élémentaire peut et, d'une façon générale, doit servir à décrire les propriétés du modèle, ce qui constitue l'une des étapes importantes dans la construction du modèle. Il va de soi que l'on peut fonder la description des propriétés du modèle sur d'autres données (c'est ce qu'on fait en réalité), ces dernières pouvant fournir, par une suite de raisonnements généraux ou particuliers sur ce modèle, la même information sur les échanges énergétiques en question.

En mécanique on attachait jusqu'à ces derniers temps une importance capitale au flux énergétique de nature mécanique qui affecte la particule, ce flux représentant le travail des forces extérieures macroscopiques massiques et surfaciques appliquées à la particule, ainsi qu'au flux de l'énergie thermique que reçoit la particule grâce à la conduction thermique, au rayonnement, aux transformations chimiques, au courant électrique et à d'autres mécanismes. (Les énergies correspondant à ces flux que reçoit ou perd la particule

peuvent se transformer mutuellement à l'intérieur ou à l'extérieur de la particule.)

Aujourd'hui on doit très souvent tenir compte des interactions électromagnétiques; la nécessité se fait sentir de connaître le rôle de mécanismes d'interaction plus complexes dans l'échange énergétique de la particule avec l'extérieur, tels que, par exemple, le travail des couples surfaciques répartis, l'échange énergétique par transformations chimiques, par transformation de structure ou de phase, etc.

On fait actuellement des recherches sur de nouveaux mécanismes macroscopiques de l'échange d'énergie entre la particule donnée et le milieu ambiant, ainsi que sur les lois régissant les interactions mutuelles des particules élémentaires. Au niveau microscopique et, dans bien des cas, au niveau macroscopique (les propriétés des métaux, les interactions à l'intérieur du corps à basses températures, l'interaction des rayons laser avec des corps ordinaires, etc.) on ne peut comprendre l'essence du mécanisme d'interaction que dans le cadre de la mécanique des quanta, tandis que l'on peut procéder à la traduction phénoménologique nécessaire de ces interactions au moyen de modèles complexes de milieux continus fondés sur la mécanique de Newton.

Le flux total d'énergie reçu par une petite particule de l'extérieur au cours d'un processus élémentaire $d\mu^1$, $d\mu^2$, . . ., $d\mu^n$ s'écrit

$$dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}, \tag{2.3}$$

où $dA^{(e)}$ est le travail des forces extérieures macroscopiques massiques et surfaciques, $dQ^{(e)}$ le flux de chaleur, dQ^{**} le flux d'énergie extérieur dû aux divers mécanismes d'interaction autres que le travail des forces macroscopiques et l'échange de la chaleur, l'interaction avec le champ électromagnétique, par exemple, en tenant compte de l'énergie dépensée à l'aimantation et à la polarisation du milieu, etc.

Compte tenu de la signification fondamentale du système des paramètres d'état et en vertu de certaines hypothèses figurant dans la définition d'un modèle de milieu continu, l'expression du travail élémentaire effectué par les forces extérieures au cours d'un processus élémentaire infinitésimal modifiant les paramètres de $d\mu^1$, $d\mu^2$, ..., $d\mu^n$ peut s'écrire sous la forme suivante:

$$dA^{(e)} = P_i(\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n, k^1, k^2, \ldots, k^m)\, d\mu^i. \tag{2.4}$$

Dans cette formule le travail des forces extérieures $dA^{(e)}$ est exprimé au moyen des paramètres internes de la particule et de leurs accroissements. La forme des fonctions P_i est essentiellement liée à l'énoncé des postulats de base indispensables à la définition d'un modèle.

La formule (2.4) pour une petite particule d'un milieu continu peut être considérée comme une généralisation de la formule

$$dA^{(e)} = mv\,dv \tag{2.5}$$

pour un point matériel de masse m, se déplaçant avec la vitesse v, ou la généralisation de la formule pour un solide parfait de dimensions quelconques finies

$$dA^{(e)} = mv^*\,dv^* + Ap\,dp + Bq\,dq + Cr\,dr, \tag{2.6}$$

où m est la masse du solide, v^* la vitesse de son centre d'inertie, A, B et C les moments d'inertie par rapport aux axes centraux d'inertie et p, q, r les projections de la vitesse angulaire instantanée sur les axes centraux.

Pour un liquide parfait, où la pression est donnée comme une fonction des paramètres d'état, on peut écrire en vertu du théorème des forces vives (1.13)

$$\frac{1}{dm}\,dA^{(e)} = v\,dv - p\,d\frac{1}{\rho}. \tag{2.7}$$

Chacune des relations (2.4) à (2.7) peut être envisagée comme une définition de $dA^{(e)}$ au moyen des paramètres internes du milieu.

Chacune de ces relations peut conduire à l'équation définissant les valeurs des paramètres d'un processus concret si l'étude complémentaire fournit pour la quantité $dA^{(e)}$ la loi régissant l'échange d'énergie entre la particule donnée et les corps extérieurs en fonction des conditions extérieures. Ainsi, pour un point matériel on peut utiliser l'expression de $dA^{(e)}$ différente de (2.5), à savoir $dA^{(e)} = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, où $\boldsymbol{F}$ est une force. Si l'on connaît la force $\boldsymbol{F}$ (le mécanisme d'interaction entre le point et les corps extérieurs est connu), (2.5) conduit à l'équation du mouvement du point. Soulignons que les lois d'interaction caractérisant un modèle donné peuvent être établies à partir des résultats des expériences où l'on mesure le second membre de (2.4), traités et généralisés comme il se doit.

Par analogie avec (2.4), en faisant appel aux caractéristiques physiques et, en général, aux hypothèses physiques spéciales entrant dans la définition du modèle donné d'un milieu, on peut écrire

$$dQ^* = dQ^{(e)} + dQ^{**} = Q_i(\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n, k^1, \ldots, k^m)\,d\mu^i. \tag{2.8}$$

Par exemple, il est admis qu'un solide indéformable ou un liquide parfait incompressible satisfait à

$$dQ^* = dQ^{(e)} = c(T)\,dT, \tag{2.9}$$

$c(T)$ étant la capacité calorifique et T la température. La relation (2.9) peut servir à la définition expérimentale de la quantité $dQ^{(e)}$. Si la loi de la conduction de chaleur est établie pour $dQ^{(e)}$, la rela-

tion (2.8) devient pour $dQ^{**} = 0$ une équation de transfert de la chaleur.

Dans les cas plus généraux les formules (2.4) et (2.9) deviennent plus complexes. Par exemple, pour un liquide incompressible visqueux le second membre de (2.4) se voit augmenter d'un certain terme positif, tandis qu'un terme identique mais négatif apparaît dans (2.8). Ce terme introduit le travail de dissipation des forces des contraintes visqueuses; ce travail des forces internes se transforme en chaleur (pour plus de détails voir § 7 du présent chapitre). Cette circonstance est typique pour les cas où il y a transformation d'une forme d'énergie en d'autres à l'intérieur d'une particule. On verra dans ce qui suit que ce sont les grandeurs représentées par la somme $P_i + Q_i$ qui jouent le rôle le plus important.

Les flux d'énergie dQ^*, $dQ^{(c)}$ et dQ^{**} ainsi que le travail élémentaire des forces macroscopiques $dA^{(c)}$ ne sont pas, en général, des différentielles de certaines fonctions mais représentent des quantités infiniment petites.

Loi de conservation de l'énergie ou premier principe de la thermodynamique. Soit un processus se déroulant dans un espace des

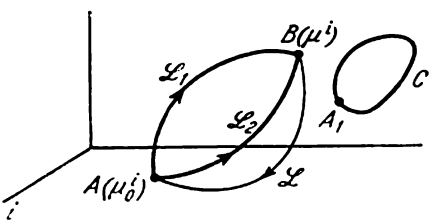


Fig. 29. Sur la loi de conservation de l'énergie

états suivant la courbe $\mathcal{L}_1$ du point A aux valeurs de paramètres d'état μ_0^i vers le point B aux valeurs de paramètres μ^i (fig. 29).

Introduisons la notion du flux total d'énergie que le système reçoit de l'extérieur. Il est manifestement égal à

$$A^{(c)} + Q^* = \int\limits_{AB(\mathcal{L}_1)} P_i \, d\mu^i + \int\limits_{AB(\mathcal{L}_1)} Q_i \, d\mu^i \tag{2.10}$$

et, au premier abord, dépend du processus, c'est-à-dire de la courbe d'intégration $\mathcal{L}_1$ dans l'espace des états.

Le premier principe de la thermodynamique, ou la loi de conservation de l'énergie, revient à l'impossibilité de créer un moteur perpétuel de première espèce, c'est-à-dire une machine qui, fonctionnant cycliquement, pourrait fournir de l'énergie utilisable sans qu'il y ait une source d'énergie extérieure à la machine.

L'on doit considérer cette affirmation comme une loi vérifiée par toutes les données expérimentales connues.

Supposons maintenant que le système accomplisse un cycle C. Alors, selon le premier principe de la thermodynamique, ou la loi de conservation de l'énergie, le flux total de l'énergie venu de l'extérieur vers le système effectuant un cycle quelconque réalisable est égal à zéro, soit

$$\oint_C (P_i + Q_i)\, d\mu^i = 0. \tag{2.11}$$

Il en découle directement que le flux total d'énergie (2.10) reçu par le système de l'extérieur ne dépend pas du processus $\mathcal{L}_1$, n'étant fonction que de l'état initial et de l'état final du système. En effet, introduisons entre les états A et B, outre le processus arbitraire considéré $\mathcal{L}_1$, un autre processus $\mathcal{L}_2$ et le processus $\mathcal{L}$ qui se déroule de l'état B vers l'état A. Les processus $\mathcal{L}_1\,\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_2\,\mathcal{L}$ formant des cycles fermés, il découle immédiatement de la loi de conservation de l'énergie que

$$A^{(e)} + Q^* = \int_{\mathcal{L}_1} (P_i + Q_i)\, d\mu^i = \int_{\mathcal{L}_2} (P_i + Q_i)\, d\mu^i = -\int_{\mathcal{L}} (P_i + Q_i)\, d\mu^i. \tag{2.12}$$

Energie totale d'un système. Par conséquent, une fois fixé l'état initial A d'un système, le flux total d'énergie venant de l'extérieur vers le système dans tous les processus réalisables ne dépend que de l'état final du système, c'est-à-dire que l'on a

$$A^{(e)} + Q^* = \mathcal{E}(\mu^1, \ldots, \mu^n) - \mathcal{E}(\mu_0^1, \ldots, \mu_0^n),$$

où $\mathcal{E}$ est une fonction univoque des paramètres d'état du système, appelée l'énergie totale du système. Ainsi donc, il découle du premier principe de la thermodynamique qu'il existe une fonction d'état $\mathcal{E}(\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n)$, dont la différentielle totale pour les processus réalisables est égale à la somme des travaux élémentaires des forces massiques et surfaciques extérieures macroscopiques $dA^{(e)}$ et des flux élémentaires d'autres formes d'énergie extérieure reçue par le système :

$$d\mathcal{E} = dA^{(e)} + dQ^* = (P_i + Q_i)\, d\mu^i. \tag{2.13}$$

On voit sans peine que l'énergie totale du système $\mathcal{E}(\mu^1, \ldots, \mu^n)$ est définie à la constante additive près, qui est la valeur de $\mathcal{E}$ à l'état initial du système (A).

Le premier principe de la thermodynamique peut servir de base à la définition de l'énergie totale $\mathcal{E}$ si l'on connaît les flux d'énergie extérieurs reçus par le système. Inversement, si l'énergie est connue,

on peut appliquer la loi de conservation de l'énergie à l'analyse du mécanisme d'interaction de la particule donnée avec les corps extérieurs, c'est-à-dire à la détermination de $dA^{(c)} + dQ^*$.

Afin de déterminer l'énergie totale du système $\mathscr{E}(\mu^1, \ldots, \mu^n)$ il faut en général connaître les fonctions P_i et Q_i. En raison de l'égalité (2.13), P_i et Q_i ne peuvent être des fonctions arbitraires des paramètres d'état.

En effet, récrivons l'égalité (2.13) sous la forme

$$\left(P_i + Q_i - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \mu^i}\right) d\mu^i = 0. \tag{2.14}$$

Si le système est holonome, c'est-à-dire si tous les $d\mu^1, d\mu^2, \ldots, d\mu^n$ sont indépendants (en particulier, s'il n'y a pas parmi les paramètres μ^i de dérivées successives par rapport au temps), il découle de (2.14) que $P_i + Q_i = \partial\mathscr{E}/\partial\mu^i$ et, par conséquent, $P_i + Q_i$ doivent satisfaire aux conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial (P_i + Q_i)}{\partial \mu^k} = \frac{\partial (P_k + Q_k)}{\partial \mu^i}. \tag{2.15}$$

Pour les systèmes non holonomes on peut écrire

$$P_i + Q_i = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \mu^i} + R_i.$$

Pour tous les processus obéissant au premier principe de la thermodynamique les quantités R_i doivent vérifier l'égalité

$$R_i d\mu^i = 0, \tag{2.16}$$

ce qui signifie que les R_i n'apportent pas de l'énergie, quel que soit le processus réalisable. Néanmoins, les R_i peuvent être non nuls eux-mêmes. On peut écrire pour certains cas importants *) la forme générale des fonctions R_i satisfaisant à la condition (2.16).

Pour les systèmes non holonomes les conditions (2.15) sont remplacées, pour les processus réalisables, par les conditions

$$\frac{\partial (P_i + Q_i - R_i)}{\partial \mu^k} = \frac{\partial (P_k + Q_k - R_k)}{\partial \mu^i}, \qquad R_i\, d\mu^i = 0. \tag{2.17}$$

Etant donné que les égalités (2.15) ou (2.17) représentent les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence de la fonction $\mathscr{E}(\mu^1, \ldots, \mu^n)$ satisfaisant à l'égalité (2.13) pour les processus réalisables, on peut les considérer également comme l'un des énoncés possibles de la loi de conservation de l'énergie.

---

*) Voir L. Sédov, *Quelques problèmes de construction de nouveaux modèles de milieux continus.* Recueil du XIe congrès sur la mécanique théorique et appliquée à Munich, 1964.

On peut utiliser les conditions (2.15) soit pour vérifier les résultats expérimentaux lors de la détermination de $P_i + Q_i$, soit pour réduire le nombre de mesures expérimentales. Dans ce dernier cas certaines valeurs de $P_i + Q_i$ sont déterminées expérimentalement, les autres sont calculées à l'aide de (2.15).

Energie interne d'un système. Nous avons introduit plus haut la fonction $E = v^2/2$ dite densité d'énergie cinétique du milieu; $E\rho d\tau$ ne coïncide généralement pas avec la fonction $\mathscr{E}$, énergie totale de la particule. Posons

$$\mathscr{E} = (E + U)\,\rho\, d\tau,$$

U étant une fonction scalaire des paramètres d'état que l'on appelle densité d'énergie interne. Tout comme l'énergie totale du système $\mathscr{E}$, la densité d'énergie interne, dite encore l'énergie interne d'une unité de masse ou l'énergie interne spécifique U, est définie, pour chaque système thermodynamique, à une constante additive près.

Si l'espace et le temps peuvent être supposés isotropes, l'énergie interne spécifique U ne dépendra pas explicitement des coordonnées spatio-temporelles. La propriété d'isotropie implique que, les conditions extérieures étant identiques à tous les points de l'espace et à tous les instants, les processus se déroulent identiquement dans un système thermodynamique donné.

L'énergie totale et l'énergie interne peuvent être définies aussi bien pour le corps dans sa totalité que pour les parties du corps. L'énergie interne d'une partie de dimensions finies d'un corps ou du corps dans sa totalité n'est généralement pas additive, c'est-à-dire que l'énergie interne de tout le corps n'est pas égale à la somme des énergies internes des parties constituant ce corps.

Ainsi, par exemple, toutes les conditions étant identiques (la même température, etc.), l'énergie interne de deux petites gouttes d'eau n'est pas égale à celle d'une grande goutte de masse équivalente à la somme des deux petites si l'on tient compte de l'énergie de la tension superficielle *). Il est évident que l'énergie interne due à l'attraction universelle des parties d'un corps n'est pas additive elle non plus.

Cependant on peut souvent considérer l'énergie interne comme additive; tel est le cas de l'eau lorsqu'on ne tient pas compte de la tension superficielle ou d'un corps élastique conforme à la loi de

*) Il nous a semblé opportun à ce propos de dissiper certains doutes qui résident dans le fait suivant. Si l'on considère le processus spontané de la fusion lente de deux gouttes isolées en une seule, on constatera, en vertu de la loi de conservation de l'énergie, que l'énergie interne d'une grande goutte immobile sera égale, bien entendu, à la somme des énergies de deux gouttes initialement au repos. Toutefois la température de la grande goutte sera alors supérieure à la température identique de deux gouttes avant la fusion.

Hooke. Si l'énergie interne est additive, l'énergie totale d'un volume arbitraire fini V est définie de la façon suivante :

$$\mathscr{E} = \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + U \right) d\tau.$$

Les considérations qui suivent sont consacrées essentiellement à une particule infinitésimale, ce qui les rend valables aussi bien pour le cas où l'énergie interne est additive que pour le cas où elle ne l'est pas.

On remarquera que la notion d'énergie interne, comme, d'ailleurs, toutes les notions et relations thermodynamiques, s'avère le plus souvent nécessaire lors de l'étude du mouvement d'un milieu continu. Cependant, il existe des exemples particuliers de milieux continus, mentionnés notamment dans le chapitre IV, où la notion d'énergie interne n'est pas indispensable pour compléter le système d'équations des mouvements continus. Ainsi, on n'a pas besoin de la notion d'énergie interne sous sa forme explicite dans l'étude du mouvement mécanique d'un fluide parfait incompressible ; on s'en passe également dans la théorie de l'élasticité si l'on omet de considérer les effets calorifiques.

Equation de la loi de conservation de l'énergie. Ainsi donc, on peut présenter la relation universelle traduisant la loi de conservation de l'énergie sous la forme

$$dE + dU_m = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}, \tag{2.18}$$

où dU_m est la variation de l'énergie interne du corps étudié, dE la variation de son énergie cinétique, $dA^{(e)}$ le travail élémentaire des forces extérieures macroscopiques, $dQ^{(e)}$ le flux élémentaire de chaleur entrant dans le système de l'extérieur, dQ^{**} le flux élémentaire des énergies autres que la chaleur et le travail des forces macroscopiques.

Equation de chaleur reçue. En retranchant de cette relation l'égalité (1.8) exprimant le théorème des forces vives pour un milieu continu on obtient l'équation

$$dU_m = -dA^{(i)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}$$

ou

$$dU_m = -dA^{(i)} + dQ^{*}, \tag{2.19}$$

appelée équation de chaleur reçue. Elle peut se substituer au principe de conservation de l'énergie.

Si le processus est très lent de sorte qu'on peut négliger les accélérations, on a $dE = 0$ et on peut admettre pour ces processus que le

travail des forces extérieures est égal au travail des forces internes, pris avec le signe opposé :

$$dA^{(e)} = -dA^{(i)}.$$

Si bien que l'on peut encore écrire l'équation de chaleur pour des processus comme les processus quasi statiques sous la forme suivante :

$$dU_m = dA^{(e)} + dQ^*.$$

Equation différentielle de chaleur reçue. L'équation de chaleur reçue (2.19) peut être écrite pour volume quelconque isolé mentalement d'un milieu continu. Etablissons-la pour une particule infiniment petite du milieu continu. La densité d'énergie interne U s'écrit

$$U = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{U_{\Delta m}}{\Delta m}$$

(on suppose que la limite existe). Pour une petite particule on a $dU_{\Delta m} = \Delta m dU$. De même, introduisons les flux élémentaires d'énergie extérieurs reçus par une unité de masse du milieu :

$$dq^{(e)} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{dQ^{(e)}}{\Delta m}, \quad dq^{**} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{dQ^{**}}{\Delta m}.$$

En divisant (2.19) par Δm et en faisant tendre Δm vers zéro, se sou venant de plus que la densité de travail des forces surfaciques internes est égale à

$$-\frac{1}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i \, dt,$$

on obtient l'équation différentielle de chaleur sous la forme

$$dU = \frac{1}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i \, dt + dq^{(e)} + dq^{**}. \tag{2.20}$$

On sait par la théorie des déformations (voir § 6, chap. II) que les composantes du tenseur des taux de déformation ont pour expression

$$\hat{e}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla}_j \hat{v}_i + \hat{\nabla}_i \hat{v}_j) = \frac{1}{2} \frac{d\hat{g}_{ij}}{dt};$$

si la métrique de l'état initial $\overset{\circ}{g}_{ij}$ ne dépend pas du temps, on a $\hat{e}_{ij} dt = d\hat{\varepsilon}_{ij}$, les différentielles des composantes du tenseur des déformations étant définies dans le repère concomitant. Pour $p^{ij} = p^{ji}$ nous aboutissons à l'expression suivante de l'équation de chaleur reçue :

$$dU = \frac{1}{\rho} \hat{p}^{ij} d\hat{\varepsilon}_{ij} + dq^{(e)} + dq^{**}. \tag{2.21}$$

Tout comme les composantes du tenseur des déformations $\hat{\varepsilon}_{ij}$, les différentielles $d\hat{\varepsilon}_{ij}$ de ces composantes, définies dans le système de coordonnées concomitantes, peuvent être rattachées à un système de coordonnées quelconque. Désignons par $d\varepsilon_{ij} = e_{ij}dt$ les composantes $d\hat{\varepsilon}_{ij}$ du tenseur dans un système de coordonnées quelconque. Les composantes $d\varepsilon_{ij}$ ainsi introduites dans un système quelconque (non concomitant) n'y sont pas les différentielles des composantes du tenseur des déformations ε_{ij}. Compte tenu de cette remarque l'équation (2.21) s'écrit dans un système de coordonnées quelconque

$$dU = \frac{1}{\rho} p^{ij} d\varepsilon_{ij} + dq^{(e)} + dq^{**}, \tag{2.22}$$

où $d\varepsilon_{ij} = e_{ij}dt$. Pour chaque état d'un milieu continu en mouvement, les quantités $d\varepsilon_{ij}$ ainsi que les accroissements des paramètres de définition, dont dépendent dU, $dq^{(e)}$ et dq^{**}, peuvent prendre des valeurs dans une certaine mesure arbitraires. Le fait est que l'équation (2.22) ne contient pas de forces extérieures massiques et ne dépend pas explicitement des conditions aux limites et des autres conditions extérieures, ces dernières pouvant être différentes et affecter de manière décisive les accroissements des paramètres de définition inclus dans (2.22). Il n'en reste pas moins vrai que l'équation (2.22) se montre efficace et universelle dans toutes sortes de processus.

On peut obtenir plusieurs équations du type d'équations d'état à partir d'une équation (2.22) grâce à l'arbitraire introduit par l'indépendance linéaire de l'ensemble correspondant des différentielles des paramètres de définition pour différents processus.

§ 3. Equilibre thermodynamique, processus réversibles et irréversibles

Equilibre thermodynamique. On connaît l'équilibre mécanique d'un solide parfait. On dit qu'un corps est en état d'équilibre mécanique s'il se maintient dans cet état un temps indéterminé, toutes les conditions extérieures étant conservées. On dit qu'un système est en état d'équilibre thermodynamique si toutes les caractéristiques de l'état interne du système (y compris les caractéristiques mécaniques) se conservent aussi longtemps que l'on veut, toutes les conditions extérieures étant conservées. Dans l'espace des états, l'état d'équilibre thermodynamique est représenté par un point. Si au nombre des paramètres de définition on trouve les dérivées substantielles par rapport au temps, ces paramètres sont nuls à l'état d'équilibre.

Processus équilibrés et déséquilibrés. Les processus thermodynamiques peuvent se dérouler lentement ou rapidement. On peut con-

sidérer le cas limite d'un processus se déroulant tellement lentement que les vitesses de variation de tous les paramètres y sont infinitésimales. Un tel processus est représenté, dans l'espace des états, par une courbe dont chaque point est celui de l'équilibre. Les processus infiniment lents dont chaque état intermédiaire est l'état de l'équilibre sont appelés processus équilibrés; dans les relations décrivant les processus équilibrés la vitesse de variation des paramètres de définition importe peu, tandis que le sens de variation peut être essentiel.

Les processus se déroulant à des vitesses finies (si les vitesses affectent les liaisons physiques) sont appelés processus déséquilibrés.

Quand on dit qu'un système effectue un certain processus, on a en vue un certain corps matériel dont les paramètres d'état varient, c'est-à-dire que l'on utilise la description lagrangienne. Il est évident que la définition des processus équilibrés ne coïncide pas, dans le cas général, avec la définition des processus permanents (stationnaires) s'il y a mouvement du milieu continu. Le processus peut être permanent, c'est-à-dire que tous les paramètres d'état du système peuvent ne pas varier avec le temps en un point de l'espace géométrique ($\partial\mu^i/\partial t = 0$), et, en même temps, être déséquilibré, c'est-à-dire être caractérisé par des vitesses de variation de paramètres finies, influençant sensiblement les processus dans les particules du milieu ($d\mu^k/dt \neq 0$).

Processus réversibles et irréversibles. Le processus se déroulant d'un état A vers un état B est dit réversible si, pour chaque état intermédiaire, toutes les *équations en accroissements infinitésimaux des paramètres* sont satisfaites également lorsqu'on inverse les signes de ces accroissements. Ainsi donc, si une certaine suite d'états forme, dans un espace des états, un processus réversible, le système peut passer par cette suite aussi bien dans le sens direct que dans le sens inverse, les flux d'énergie extérieurs $dA^{(e)}$, $dQ^{(e)}$ et dQ^{**} ne différant que par le signe pour chaque élément de courbe parcouru dans le sens direct et dans le sens inverse. Si le processus ne possède pas cette propriété, il est dit irréversible.

Notons que dans l'ensemble des paramètres de définition des processus irréversibles sont avant tout incluses les grandeurs caractérisant le sens de la variation de certains paramètres de définition; pour les processus réversibles le sens de la variation des paramètres thermodynamiques n'est pas essentiel. On étudie, d'habitude, les processus réversibles qui sont en même temps équilibrés *). Cepen-

*) Les notions de processus équilibrés et réversibles diffèrent généralement. Néanmoins, les processus équilibrés infiniment lents pour lesquels, dans les relations finies entre les paramètres de définition, non seulement les vitesses mais aussi le sens des variations des paramètres de définition sont sans impor-

dant on peut considérer les processus réversibles qui ne sont pas constitués des états thermodynamiques d'équilibre.

La réversibilité et l'irréversibilité des phénomènes sont des notions fondamentales. En sciences naturelles ces notions représentent des propriétés caractéristiques importantes définissant la nature des lois rhéologiques et d'autres lois physiques pour toutes sortes de phénomènes macroscopiques et microscopiques.

On constate aisément qu'en mécanique analytique des systèmes matériels tous les mouvements du système sont réversibles si toutes les forces restent les mêmes lorsque seul le sens des vitesses est inversé. Il en va ainsi, en particulier, dans le cas où toutes les forces appliquées ne dépendent que des coordonnées des points substantiels du système. Si les mouvements sont réversibles, tous les points du système peuvent se déplacer suivant les mêmes trajectoires avec les mêmes vitesses en valeurs absolues, aussi bien dans le sens direct que dans le sens inverse.

Par exemple, si l'on ne tient compte que des forces d'attraction universelle, les mouvements des corps célestes sont des phénomènes réversibles. Si dans le problème de Cauchy on conserve les positions et les vitesses initiales en ne faisant inverser que les sens des vitesses, on trouve, en résolvant le système d'équations différentielles, que le passé et l'avenir changent de place.

Si les forces appliquées et les interactions dans un système macroscopique dépendent essentiellement du sens de variation des paramètres d'état (les forces de frottement, par exemple), il s'agit d'un phénomène irréversible.

Soulignons que les phénomènes irréversibles aussi bien que les phénomènes réversibles peuvent être constitués d'une suite d'états équilibrés ou déséquilibrés des particules d'un milieu. On donnera plus bas, à l'appui de cette note, quelques exemples de phénomènes se déroulant dans les modèles concrets de milieux continus.

On remarquera en outre que pour les corps de dimensions finies un phénomène globalement irréversible peut coexister avec les processus réversibles se déroulant dans toutes les particules physiquement infinitésimales formant le corps considéré.

Rigoureusement parlant, tous les processus réels macroscopiques se déroulent à des vitesses finies, leurs sens sont essentiels et ils sont en fait irréversibles bien que nombre d'entre eux puissent être considérés thermodynamiquement réversibles.

---

tance (ne sont pas des arguments essentiels) peuvent être assimilés aux processus réversibles.

D'autre part, on peut citer l'exemple d'un processus irréversible se déroulant dans l'ensemble d'un système ; c'est le phénomène de la transmission permanente de la chaleur par conduction dans un milieu au repos, où les états de toutes les particules élémentaires du milieu peuvent être considérés comme équilibrés.

En théorie et en pratique il est possible dans certaines applications de simuler les phénomènes réels en recourant aux processus réversibles.

Exemple d'un processus quasi réversible. Ainsi qu'en témoignent les résultats de recherches, on peut considérer pratiquement réversible même le processus de l'écoulement très rapide de particules de gaz d'une tuyère d'un moteur à réaction, bien que la particule de gaz qui se trouve pratiquement au repos dans la chambre de combustion sous une pression de 70 atm acquière au bout de quelques millièmes de seconde un état de mouvement à la vitesse de 3000 m/s, avec une pression presque nulle dans l'espace libre.

L'écoulement des gaz se produit de cette manière lors du vol d'une fusée à haute altitude avec un moteur à réaction en fonctionnement. Au cours de ce processus les particules de gaz n'ont pas le temps d'échanger de l'énergie calorifique; néanmoins, les caractéristiques thermodynamiques variables sont reliées à l'intérieur d'une particule pratiquement comme à l'état d'équilibre.

Les états d'équilibre les plus probables. Considérons un certain ensemble de paramètres macroscopiques d'état introduits comme des moyennes statistiques des caractéristiques correspondantes du mouvement microscopique des molécules, par exemple la température T et la densité ρ. Il est clair qu'à chaque valeur concrète de T et de ρ on peut faire correspondre une multitude de distributions des caractéristiques du mouvement microscopique. On constate qu'aux valeurs équilibrées des paramètres macroscopiques correspond le plus grand nombre d'états microscopiques différents possibles. C'est pourquoi si le système thermodynamique est livré à lui-même, l'état le plus probable parmi tous ceux qu'il est sensé avoir est l'état d'équilibre. Il s'ensuit que tous les systèmes isolés tendent vers l'état d'équilibre s'ils ne s'y trouvent pas.

Caractéristiques microscopiques; probabilités des moyennes et irréversibilité. Notons encore que toutes les lois microscopiques connues décrivant les mouvements et les interactions des particules élémentaires, par exemple la loi d'attraction universelle de Newton et les lois d'interaction électromagnétique, sont réversibles. L'irréversibilité est le fait de lois statistiques valables pour de grands ensembles de particules et constitue en quelque sorte une rançon de la possibilité d'introduire au lieu d'un système compliqué à grand nombre de particules (dont les lois d'interaction et les conditions initiales ne sont connues qu'approximativement) un système simple avec un petit nombre de caractéristiques macroscopiques des états les plus probables.

Comme un grand nombre de particules s'accumulent dans des volumes pratiquement petits, la loi de probabilité admet un pic très aigu, ce qui signifie que seules les valeurs moyennes bien déterminées ont une chance de se réaliser.

Pour les processus irréversibles les lois de probabilité elles-mêmes sont en général fonctions du temps.

Notion de température. La température est l'une des caractéristiques d'état essentielles des corps physiques. Dans la vie quotidienne la notion de température d'un corps est directement liée aux perceptions sensorielles. On dit que le corps A a une température plus élevée que celle du corps B ($T_A > T_B$) si obligatoirement au contact des deux corps une transmission de chaleur du corps A vers le corps B a lieu. Mis en contact deux corps en état d'équilibre thermodynamique possèdent la même température s'ils n'échangent pas d'énergie calorifique. L'expérience montre que si l'on met en contact deux corps A et B, et si ensuite on laisse ce système livré à lui-même, il s'y passera un processus conduisant à l'égalisation des températures des corps A et B. Ce fait a rendu possible la création des thermomètres, appareils qui permettent l'évaluation quantitative de la température en échelle choisie, par exemple, en unités Celcius dont l'ébullition et la solidification de l'eau à pression atmosphérique fournissent les points caractéristiques.

La notion de température est vide de sens dans la mécanique analytique pour des systèmes à petit nombre de degrés de liberté. Dans la pratique, on peut introduire la température pour tous les corps composés d'un grand nombre de particules.

A la différence de la mécanique du point matériel et du solide parfait, en mécanique des milieux continus on ne peut en général pas se passer de la notion de température. L'expression du flux de chaleur extérieur $dq^{(e)}$ entre dans l'équation de la chaleur reçue et dans le principe de conservation de l'énergie ; il est donc indispensable d'étudier le mécanisme de la conduction de la chaleur et, par suite, d'introduire la notion de température. Une analyse détaillée et approfondie de la notion de température se fonde sur la théorie cinétique moléculaire. Toutefois il convient de noter à cet égard que la notion de température, ainsi que les méthodes de mesure ont été données, il y a longtemps, de manière pleinement satisfaisante, alors que la physique statistique n'avait pas encore élaboré de théorie approfondie.

Au paragraphe 5 on exposera une théorie macroscopique remarquable qui, grâce au second principe de la thermodynamique, conduit à une définition stricte de la température absolue des corps en état d'équilibre thermodynamique.

On sait par la théorie cinétique moléculaire que la température T peut être considérée comme une grandeur proportionnelle à l'éner-

gie moyenne du mouvement thermique chaotique des molécules par degré de liberté d'une molécule. Si les espèces différentes de particules élémentaires ont en moyenne des énergies différentes ou si les particules d'une même espèce ont des énergies moyennes différentes par différents degrés de liberté, et si les processus sont suffisamment lents, l'interaction entre les particules élémentaires conduit à l'égalisation des énergies moyennes. Pour des processus nettement déséquilibrés, lorsqu'à l'intérieur d'une particule macroscopiquement petite l'égalisation statistique des énergies entre les divers degrés de liberté de mêmes particules ou de particules d'espèces différentes n'a pas le temps de se produire, la notion de température de tout l'ensemble d'une particule macroscopique perd sa signification.

Dans le cas d'un milieu en état déséquilibré, on peut introduire parfois plusieurs températures, par exemple, celles des degrés de liberté d'oscillation, de rotation, de translation des molécules ou celles des ions et des électrons d'un plasma si les ions et les électrons isolés se trouvent en état d'équilibre, etc.

S'il y a équilibre thermodynamique, dans de petits volumes d'un corps la température pour de petites particules se définit univoquement. Cependant, même dans ce cas, la notion de température pour un corps de dimensions finies se vide de sens si l'équilibre thermique entre les différentes parties de ce corps fait défaut.

Par exemple, qu'entend-on par température du globe terrestre? A différents moments on peut parler de la température des tropiques, de la zone tempérée, des pôles, du centre de la terre. Mais il est difficile et parfois incohérent de définir la température de tout l'ensemble du globe terrestre.

On envisage d'ordinaire la température de parties suffisamment petites d'un corps et on étudie les flux de chaleur à l'intérieur du corps. Comme le montre l'expérience, on peut admettre l'équilibre thermodynamique des petits volumes d'un système dans bien des problèmes pratiques. Dans les applications l'irréversibilité et le déséquilibre s'expliquent simplement par l'absence d'équilibre dans de grands volumes des corps, étant donné la distribution non uniforme de la température et d'autres caractéristiques thermodynamiques (telles que la concentration des composantes chimiques d'un mélange, etc.) selon les particules.

§ 4. Milieux biparamétriques. Gaz parfait. Cycle de Carnot

On appelle milieu biparamétrique un milieu dont toutes les fonctions thermodynamiques ne dépendent que de deux paramètres thermodynamiques d'état. Si ces deux paramètres sont la pression p et la densité ρ, l'énergie interne spécifique de ce milieu doit s'exprimer par leur intermédiaire $U = U(p, \rho)$.

Equation de chaleur reçue pour un gaz parfait. Si le milieu est un fluide parfait compressible, le travail des forces surfaciques internes réparti par unité de masse est de la forme

$$\frac{1}{dm}\, dA^{(i)}_{\text{surf}} = p d\frac{1}{\rho}, \tag{1.12}$$

et l'équation de chaleur reçue, en supposant que $dq^{**} = 0$, s'écrit de la façon suivante:

$$dU + p d\frac{1}{\rho} = dq^{(e)}. \tag{4.1}$$

Equation d'état d'un gaz parfait. Dans un gaz parfait la pression, la densité et la température sont reliées entre elles par l'équation de Clapeyron

$$p = \rho R T, \tag{4.2}$$

R étant une certaine constante, dite constante des gaz, différente pour les gaz différents. L'équation du type (4.2) reliant la pression, la température, la densité et, éventuellement, d'autres caractéristiques physiques d'un milieu est appelée équation d'état. Pour l'air

$$R = 287{,}042\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2\cdot{}^\circ\text{C}}.$$

On peut introduire la constante des gaz parfaits R_0 (la même pour tous les gaz) et la constante de Boltzmann k conformément aux égalités

$$R = \frac{R_0}{\mathcal{M}} = \frac{k}{m}.$$

Ici m est la masse moyenne d'une molécule, en grammes, et $\mathcal{M}$ la masse moyenne d'une mole de gaz définie par la formule

$$n\mathcal{M} = n_1 M_1 + n_2 M_2 + \ldots + n_N M_N = \sum_{i=1}^{N} n_i M_i,$$

où n est le nombre total de moles dans un volume donné d'un mélange de N constituants, n_i le nombre de moles et M_i les masses correspondantes des moles de différentes sortes de gaz,

$$R_0 = 8{,}3144\cdot 10^7\ \frac{\text{erg}}{\text{mole}\cdot{}^\circ\text{C}}, \qquad k = 1{,}38\cdot 10^{-16}\ \frac{\text{erg}}{{}^\circ\text{C}}.$$

Energie interne d'un gaz parfait. On peut définir un gaz parfait comme un gaz dont les molécules n'entrent en interaction que pendant les chocs. On peut donc admettre que l'énergie interne d'un gaz monoatomique parfait représente l'énergie cinétique sommaire du mouvement chaotique des atomes.

Pour l'énergie interne U d'une unité de masse on peut écrire

$$U = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} + \text{const}$$

(M étant la somme des masses des atomes, m_i et v_i les masses et les vitesses des atomes par rapport à leur centre de masse commun, N le nombre des atomes dans un petit volume donné). En supposant identiques tous les atomes du gaz, on a $M = Nm$ et

$$U = \frac{v_{\text{moy}}^2}{2} + \text{const},$$

où v_{moy}^2 est la vitesse quadratique moyenne de translation des atomes dans le mouvement chaotique. En s'appuyant pour un gaz parfait sur la définition de la température comme caractéristique de l'énergie moyenne par degré de liberté dans un mouvement thermique chaotique des atomes, on peut représenter l'énergie interne U sous la forme

$$U = c_V T + \text{const}. \tag{4.3}$$

Ici c_V désigne un coefficient dimensionné de proportionnalité entre $\frac{1}{2} v_{\text{moy}}^2$ et T.

En donnant l'énergie interne U sous la forme (4.3) et en utilisant l'équation de Clapeyron on fixe un modèle déterminé de milieu continu, appelé gaz parfait. La confrontation avec les données expérimentales montre que le mouvement des gaz réels dans les conditions ordinaires est assez bien décrit par ce modèle.

Chaleur spécifique à volume constant et à pression constante. Relation de Mayer. A partir de l'équation de chaleur reçue (4.1) pour un gaz parfait effectuant un processus à volume spécifique constant ($d\frac{1}{\rho} = 0$), on obtient aisément que $(dq^{(e)})_{V=\text{const}} = dU = c_V dT$ ou

$$\left(\frac{dq^{(e)}}{dT}\right)_{V=\text{const}} = c_V.$$

On en déduit que c_V est la quantité de chaleur nécessaire à élever, à volume constant, la température de l'unité de masse d'un milieu de 1 °C; c'est pourquoi on l'appelle chaleur spécifique à volume constant *).

*) Si, au cours des chocs, le nombre de particules varie, la formule (4.3) se voit remplacer par

$$U = \int c_V(T)\, dT.$$

Lorsque la pression est constante, on tire de l'équation de chaleur reçue pour un gaz parfait

$$(dq^{(e)})_{p=\text{const}} = dU + pd\frac{1}{\rho} = c_V\,dT + d\frac{p}{\rho} = (c_V + R)\,dT. \quad (4.4)$$

La quantité de chaleur nécessaire pour élever, à pression constante, la température de l'unité de masse d'un milieu de 1 °C est appelée chaleur spécifique à pression constante ; on la désigne par c_p :

$$c_p = \left(\frac{dq^{(e)}}{dT}\right)_{p=\text{const}}.$$

Il découle alors de (4.4) pour un gaz parfait la relation suivante entre les chaleurs spécifiques à pression et à volume constants et la constante des gaz R :

$$c_p - c_V = R, \quad (4.5)$$

dite relation de Mayer.

L'équation de chaleur reçue contient, en général, l'apport extérieur de chaleur $dq^{(e)}$. Dans certains cas on se sert de l'équation de chaleur reçue pour déterminer soit l'apport nécessaire de chaleur, soit l'apport reçu si l'on connaît (ou l'on donne) le mouvement et la succession des états du milieu continu. Pour résoudre les problèmes où il s'agit de déterminer le mouvement et l'état d'un milieu, il faut connaître les lois régissant l'apport de chaleur extérieure.

Mécanismes physiques de la transmission de chaleur à un milieu. La transmission de la chaleur est associée à divers phénomènes physiques. Les mécanismes de la transmission de chaleur les plus importants dans les applications sont les suivants.

1. La conduction de chaleur. C'est le phénomène de l'échange de l'énergie calorifique moyenne entre les parties du milieu qui se trouvent en contact direct par interactions mécaniques et chocs lors du mouvement thermique des molécules, des atomes, des électrons et d'autres particules composant le milieu. La transmission de chaleur par conduction thermique est essentiellement liée à la distribution macroscopique irrégulière de la température dans le volume d'un corps.

2. Le rayonnement thermique et l'absorption du rayonnement. C'est le phénomène provoqué par un changement d'état éventuel des particules élémentaires (molécules, atomes, électrons, etc.) composant le milieu.

3. Le dégagement de chaleur pendant les processus de dissociation électrique, et, en particulier, celle provoquée par l'effet Joule qui accompagne le passage du courant électrique dans un corps.

4. Parfois, une condition supplémentaire permet de considérer comme un apport de chaleur extérieur $dq^{(e)}$ certaines fractions de

l'accroissement de l'énergie interne dU et du travail des forces internes $dA^{(i)}$ en transposant ces termes dans le second membre de l'équation de chaleur reçue. Par exemple, à la variation de l'énergie interne causée par les changements de phase ou les transformations chimiques provoquant le dégagement de la chaleur ou son absorption on peut substituer les apports de chaleur extérieurs en ne tenant alors compte que de la variation de l'énergie interne due à la variation de la température, des paramètres mécaniques et, éventuellement, d'autres propriétés variables du milieu.

La résolution des problèmes concrets à la base de l'équation de chaleur reçue tenant compte des lois régissant les apports de chaleur comporte, habituellement, de grandes difficultés d'ordre mathématique. Dans les applications on a souvent recours à des hypothèses supplémentaires et, en particulier, à l'utilisation des transformations parfaites suivantes.

Transformations adiabatiques. I. Ce sont les processus parfaits dans lesquels il n'y a ni «apport » de chaleur extérieure, ni échange de chaleur entre les particules voisines, i.e. $dQ^{(e)} = 0$. L'examen des corps thermiquement isolés ou des processus rapides (mais parfois réversibles) pendant lesquels l'échange de chaleur n'a pas le temps de se produire de manière notable a suggéré l'idée des transformations adiabatiques.

Transformations isothermes. II. Les processus parfaits au cours desquels l'échange de chaleur dû à la conduction ou au rayonnement s'effectue si rapidement et les changements d'état s'effectuent si lentement que la température peut être supposée constante dans tout le système sont appelés transformation isotherme.

L'équation d'une transformation isotherme a pour expression

$$\frac{dT}{dt} = 0.$$

Cette équation jointe à celle de l'état du milieu remplace l'équation de chaleur reçue, ce qui, en général, facilite sensiblement la résolution théorique du problème sur la détermination du mouvement d'un milieu.

L'équation de chaleur reçue permet de calculer la quantité de chaleur $dQ^{(e)}$ nécessaire à chaque particule pour réaliser une transformation isotherme.

Notons que la condition $\frac{dT}{dt} = 0$ indique uniquement la constance de la température dans le temps dans chaque particule du milieu, tandis que la température peut être différente pour des particules différentes. Toutefois, en disant qu'un processus est isotherme

on entend que la température est constante dans l'espace et dans le temps, c'est-à-dire que $T = \text{const}$.

Enfin, on appelle parfois transformation isotherme une transformation dans laquelle la température des particules peut varier dans le temps, mais reste la même pour toutes les particules. Dans ce cas l'égalité $\frac{dT}{dt} = 0$ est remplacée par la condition

$$\text{grad } T = 0 \text{ ou } T = f(t).$$

Il va de soi que si le problème est bien compris, l'éventualité d'une confusion liée à l'existence de différentes définitions des transformations isothermes est exclue.

III. Pour décrire une transformation dans un milieu biparamétrique on peut prendre directement, au lieu de l'équation de la chaleur reçue, une certaine relation entre la densité et la pression. Si cette relation est identique pour toutes les particules, le processus correspondant est dit barotrope.

Transformations polytropes. En particulier, une transformation est dite polytrope si on a l'égalité

$$p = C\rho^n,$$

où n est un nombre constant, indice de la polytrope, C est une constante.

L'équation de la chaleur reçue pour une fonction donnée $p = f(\rho)$ permet de déterminer aisément la quantité de chaleur venue de l'extérieur assurant cette relation.

Si le gaz est parfait et la transformation polytrope, on tire de l'équation de la chaleur reçue pour $n > 1$

$$dq^{(e)} = dU + C\rho^n d\frac{1}{\rho} = c_V\, dT - \frac{d\,RT}{n-1}.$$

D'où, en vertu de l'égalité de Mayer

$$R = c_p - c_V,$$

on obtient, pour R constant, une formule simple pour l'apport de chaleur

$$dq^{(e)} = c_V \frac{n - \frac{c_p}{c_V}}{n-1}\, dT = c^*\, dT.$$

Si $n > c_p/c_V > 1$ et la température augmente, on a $dq^{(e)} > 0$, c'est-à-dire que le système reçoit de la chaleur. Si $1 < n < c_p/c_V$, on a $dq^{(e)} < 0$ pour $dT > 0$, d'où il résulte que l'augmentation de la température s'accompagne d'une perte de chaleur. Si $n = c_p/c_V$, $dq^{(e)} = 0$, ce qui signifie que cette transformation polytrope est adiabatique. Les propriétés mentionnées caractérisent la signification physique de l'indice de la polytrope n.

Isothermes d'un gaz parfait. Considérons un espace des états d'un milieu biparamétrique introduit par les paramètres p et $V = 1/\rho$, par exemple celui d'un gaz parfait. Toutes les fonctions thermodynamiques d'un tel milieu et, en particulier, la température qu'on note θ doivent être fonctions de p et de $1/\rho$:

$$\theta = \theta\left(p, \frac{1}{\rho}\right).$$

Etudions les transformations équilibrées isothermes (θ = const) se déroulant dans ce milieu. Traçons, dans l'espace des états (p, $1/\rho$), des courbes θ = const (isothermes, fig. 30,a).

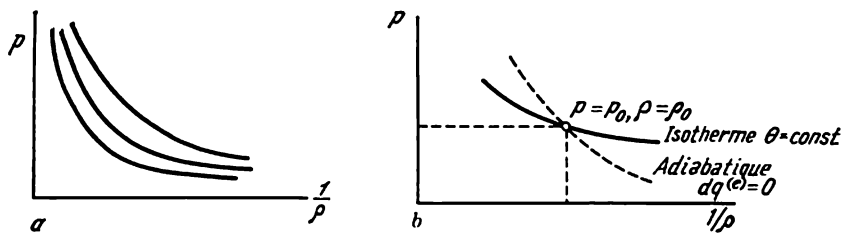


Fig. 30. a — isothermes d'un gaz parfait; b — disposition réciproque des adiabatiques de Poisson et des isothermes pour le gaz parfait

Dans le cas d'un gaz parfait les isothermes dans le plan (p, $1/\rho$) sont, évidemment, des hyperboles

$$\frac{p}{\rho} = \text{const}. \tag{4.6}$$

L'équation de la chaleur reçue

$$dU + pd\frac{1}{\rho} = dq^{(c)}$$

permet toujours de calculer la quantité de chaleur $dq^{(c)}$ qu'il est nécessaire de fournir au système pour que le processus soit isotherme. Cette quantité pour un gaz parfait vaut

$$(dq^{(c)})_{\text{isoth}} = pd\frac{1}{\rho} = R\theta\rho d\frac{1}{\rho}.$$

Pour un gaz parfait $dq^{(c)} > 0$ s'il y a dilatation isotherme et $dq^{(c)} < 0$ s'il y a compression isotherme. Pour un gaz quelconque l'aspect des isothermes dans le plan (p, $1/\rho$) dépend de celui de l'équation d'état.

Remarquons qu'une même isotherme θ = const peut comporter à la fois des points de solidification et d'ébullition de l'eau, par exemple, ces températures dépendant de la pression.

Adiabatique de Poisson. Dans le cas des transformations adiabatiques ($dq^{(c)} = 0$) l'équation de la chaleur reçue prend évidemment la forme suivante:

$$dU + pd\frac{1}{\rho} = 0. \tag{4.7}$$

D'où, si l'on connaît l'énergie interne $U(p, 1/\rho)$, on peut trouver p en fonction de ρ pour les transformations adiabatiques continues.

Pour un gaz parfait l'égalité (4.7) se met sous la forme

$$\frac{c_V}{R} d\frac{p}{\rho} + pd\frac{1}{\rho} = 0$$

ou encore, en introduisant le rapport $\gamma = c_p/c_V$,

$$\frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{dp}{\rho} + pd\frac{1}{\rho}\right) + pd\frac{1}{\rho} = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} dp + \gamma pd\frac{1}{\rho} = 0,$$

ce qui donne après intégration

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}. \tag{4.8}$$

Cette courbe rapportée au plan $(p, 1/\rho)$ s'appelle adiabatique de Poisson et on appelle $\gamma = c_p/c_V$ l'indice adiabatique ou le coefficient de Poisson. Il est évident que par chaque point p_0, $1/\rho_0$ du plan des états $(p, 1/\rho)$ passent une isotherme (4.6) et une adiabatique (4.8).

Dispositions relatives de l'isotherme et l'adiabatique d'un gaz parfait. Essayons d'établir maintenant comment est disposée, en chaque point du plan $(p, 1/\rho)$, une isotherme par rapport à une adiabatique de Poisson dans le cas d'un gaz parfait. Pour les points constituant l'isotherme passant par le point p_0, $1/\rho_0$, on a

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{p_{\text{isoth}}}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

et pour ceux de l'adiabatique passant par le même point

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{p_{\text{ad}}}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma.$$

L'indice adiabatique $\gamma = c_p/c_V > 1$, c'est pourquoi $p_{\text{isoth}} > p_{\text{ad}}$ pour $\rho/\rho_0 < 1$ et $p_{\text{isoth}} < p_{\text{ad}}$ pour $\rho/\rho_0 > 1$, c'est-à-dire qu'à droite du point p_0, $1/\rho_0$ l'isotherme dans le plan $(p, 1/\rho)$ passe au-dessus de l'adiabatique et à gauche de ce point elle passe au-dessous de l'adiabatique (fig. 30,*b*).

Notons que cette propriété des isothermes et des adiabatiques est établie pour un gaz parfait. Elle est valable pour de nombreux milieux mais l'eau n'y est pas conforme dans l'intervalle des températures de 0 °C à +4 °C.

Travail fourni par un système. Soulignons encore une fois que le travail des forces internes $\int p d 1/\rho$ peut toujours être calculé si l'on connaît la fonction $p(\rho)$, c'est-à-dire la courbe dans le plan $(p, 1/\rho)$. On entend par là que le travail des forces internes $\int p d 1/\rho$ peut être calculé pour un processus $\mathscr{L}_1$ quelconque reliant les points A et B dans le plan des états. Or, dans le cas d'un processus infiniment lent le travail des forces internes est égal au travail des forces extérieures appliquées au système, pris avec le signe contraire, ou bien au travail, muni du même signe, que le système lui-même effectue sur les corps extérieurs. Ainsi donc, l'intégrale

$$\int\limits_{AB(\mathscr{L}_1)} p d \frac{1}{\rho} = \frac{1}{m} A, \tag{4.9}$$

le long du chemin $\mathscr{L}_1$ dans le plan $(p, 1/\rho)$, représente lorsque $A > 0$ la somme des travaux que le système thermodynamique effectue sur les corps extérieurs pendant la durée du processus équilibré $\mathscr{L}_1$ ou, lorsque $A < 0$, la somme des travaux qu'il faut effectuer sur le système pour réaliser le processus $\mathscr{L}_1$.

Apport total de chaleur fourni au système de l'extérieur. De manière analogue, pour tout processus $\mathscr{L}_1$ $(p = p(1/\rho))$ si l'énergie interne du milieu $(U = U(p, 1/\rho))$ est donnée, on peut calculer l'apport total de chaleur

$$Q^{(e)} = \int\limits_{AB(\mathscr{L}_1)} dQ^{(e)} \tag{4.10}$$

que le système doit recevoir du milieu extérieur (si $Q^{(e)} > 0$) ou céder au milieu extérieur (si $Q^{(e)} < 0$) afin de réaliser le processus $\mathscr{L}_1$. D'après l'équation de la chaleur reçue on a

$$Q^{(e)} = \int\limits_{AB(\mathscr{L}_1)} \left(dU + p d \frac{1}{\rho}\right) dm = \int\limits_A^B dU_m + A = U_{mB} - U_{mA} + A. \tag{4.11}$$

Cycle de Carnot. Envisageons maintenant le très important processus équilibré réversible fermé dit cycle de Carnot réversible. Admettons qu'un gaz parfait ou tout autre milieu biparamétrique de paramètres p et $1/\rho$*) joue le rôle de l'agent thermique, c'est-à-dire

*) Au lieu de $1/\rho$ on peut utiliser une grandeur équivalente $V = m/\rho$, puisque tous les raisonnements s'appliquent à un volume substantiel V de masse m constante.

d'un milieu qui accomplit ce cycle. D'un point arbitraire M (p_0, $1/\rho_0$) de l'espace des états (fig. 31, *a*) le gaz qui subit une dilatation infiniment lente suivant l'isotherme θ_1 = const arrive au point N;

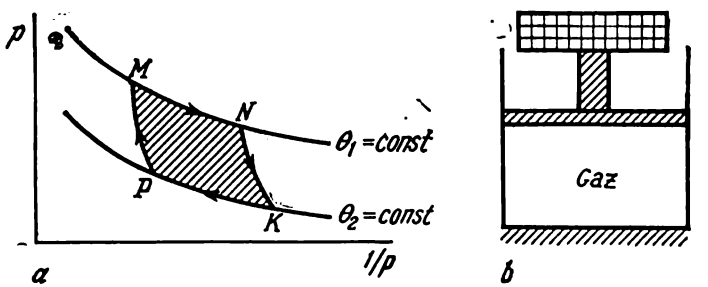


Fig. 31. *a* — cycle de Carnot; *b* — machine fonctionnant selon le cycle de Carnot

il se dilate ensuite adiabatiquement jusqu'à l'état K à la température $\theta_2 < \theta_1$ et de K il se comprime isothermiquement jusqu'à l'état P en partant duquel il peut atteindre l'état initial M en suivant l'adiabatique.

Exemple d'un moteur effectuant un cycle de Carnot réversible. Appelons moteur un système effectuant un cycle de Carnot. On peut l'imaginer sous forme du dispositif suivant. Prenons un volume de gaz à la température θ_1 et enfermons-le dans un cylindre dont un fond est immobile et l'autre représente un piston mobile en équilibre à l'instant initial (fig. 31, *b*). Il faut d'abord imprimer au gaz une dilatation dans le cylindre de M à N avec θ_1 = const. Il faut à cet effet que les parois latérales du cylindre et le piston soient thermiquement isolés et que le fond du cylindre soit en contact avec une source chaude, qui est un corps de très grande capacité calorifique et de température constante θ_1. Effectuons la dilatation du gaz en délestant le piston de charges infiniment petites en sorte que le piston monte infiniment lentement et que la température θ du gaz ait le temps d'égaler la température θ_1 de la source chaude, restant égale à θ_1 à tout instant du mouvement du piston. Pendant cette étape la pression p diminue, tandis que le volume du gaz augmente. Arrivés à l'état N, retirons le cylindre de la source chaude, posons sur le fond un couvercle supplémentaire en isolant thermique et procédons de nouveau, en délestant le piston de charges infinitésimales, à la dilatation adiabatique du gaz jusqu'à l'état K; reposons ensuite le cylindre sur le corps à la température constante θ_2 et, en mettant sur le piston des charges infiniment petites, comprimons le gaz jusqu'à l'état P. Pendant cette étape la température du gaz tend

à augmenter, mais on la diminue à l'aide du corps à la température θ_2, qui travaille maintenant non pas comme une source chaude mais comme une source froide. Arrivés à l'état P, comprimons adiabatiquement le gaz en mettant lentement sur le piston la charge initiale de façon à retrouver l'état M. Le cycle de Carnot ainsi obtenu peut s'effectuer soit dans un sens ($MNKPM$), soit dans l'autre ($MPKNM$). C'est un cycle parfait réversible infiniment lent.

En général, on peut considérer les deux cycles, réversible et irréversible. Un cycle de Carnot réversible peut se dérouler en deux sens.

Système effectuant le cycle de Carnot en moteur thermique ou en machine frigorifique. Intégrons l'équation de la chaleur reçue (4.1) (pour $dq^{**} = 0$) sur tout le cycle de Carnot. L'énergie interne étant fonction univoque de l'état, on a $\oint dU = 0$ et

$$\oint p d\frac{1}{\rho} = \oint dq^{(e)}$$

ou

$$A = Q^{(e)}, \tag{4.12}$$

où A est le travail total « effectué » par le système au cours du cycle de Carnot, $Q^{(e)}$ est la quantité de chaleur fournie au système de l'extérieur.

Comme la densité de travail mécanique A/m d'un milieu biparamétrique effectuant un cycle fermé vaut $\oint p d1/\rho$, elle est numériquement égale à l'aire de la surface limitée par les courbes figurant les processus du cycle dans le plan des états (p, $1/\rho$) et, par conséquent, d'une façon générale elle n'est pas nulle. Dans le cycle de Carnot considéré la densité de travail A/m vaut l'aire $MNKPM$; $A > 0$ si le cycle a lieu dans le sens $MNKPM$ et $A < 0$ s'il a lieu dans le sens inverse. Si $A > 0$, le système fournit du travail mécanique au cours du cycle, or, d'après (4.12), ce travail est assuré par la chaleur $Q^{(e)}$ qu'il faut amener au système. On a ainsi un moteur thermique qui fonctionne d'après le cycle de Carnot, empruntant de la chaleur à l'extérieur et fournissant du travail mécanique. Si $A < 0$, les forces extérieures effectuent un travail sur le système et, d'après (4.12), le système perd de la chaleur. Le long des parties adiabatiques NK et PM on a $dq^{(e)} = 0$. Le système n'échange de la chaleur avec l'extérieur que lorsque le processus suit les parties MN et KP des isothermes.

On a établi plus haut que le système gagne ou perd de la chaleur selon que le gaz se dilate ou se comprime. C'est pourquoi sur la partie de l'isotherme MN où le gaz se dilate il faut lui fournir la chaleur que nous désignons par $Q_1 > 0$ et sur la partie de compression KP

il faut lui ôter la quantité de chaleur $Q_2 > 0$, ce qui équivaut à lui fournir une quantité de chaleur $-Q_2 < 0$. Les parties NK et PM étant les adiabatiques, il s'ensuit que la quantité totale de la chaleur $Q^{(c)}$ fournie au gaz au cours de tout le cycle de Carnot se déroulant dans le sens de l'aiguille d'une montre est égale à

$$Q^{(c)} = Q_1 - Q_2.$$

Conformément à (4.12) on peut écrire

$$A = Q^{(c)} = Q_1 - Q_2. \tag{4.13}$$

Le système effectuant le cycle de Carnot constitue dans ce cas le moteur thermique qui, en empruntant une quantité de chaleur Q_1 à une source chaude et en cédant une partie Q_2 à une source froide, transforme la quantité $Q_1 - Q_2$ en travail mécanique. Si le cycle de Carnot est parcouru en sens inverse, la partie PK correspond à la quantité de chaleur $Q_2 > 0$ fournie et la partie MN à la quantité négative de chaleur fournie : $-Q_1 < 0$. La quantité totale de chaleur fournie au cours du cycle inverse est $Q^{(c)} = A_1 < 0$ (négative) et se définit par l'égalité

$$A_1 = Q^{(c)} = Q_2 - Q_1 < 0.$$

Dans ce cas la machine fonctionnant d'après le cycle de Carnot est une machine frigorifique ; cette machine extrait la chaleur Q_2 d'une source froide et grâce au travail mécanique reçu de l'extérieur cède la quantité de chaleur

$$Q_1 = Q_2 - A_1$$

à la source chaude.

§ 5. Second principe de la thermodynamique et notion d'entropie

Etudions maintenant le second principe de la thermodynamique qui représente tout comme le premier principe une proposition universelle confirmée par toutes les données expérimentales connues et toutes les conceptions théoriques sur les mécanismes des phénomènes physiques. En vertu du second principe de la thermodynamique, il n'est pas de dispositif susceptible de transférer la chaleur d'un corps à température plus basse à un corps à température plus élevée sans produire de changements dans d'autres corps.

On peut énoncer le second principe de la thermodynamique d'une autre façon : il est impossible de construire un soi-disant moteur perpétuel de seconde espèce, c'est-à-dire une machine qui, fonctionnant en accord avec le premier principe d'après un certain cycle, fournirait périodiquement du travail par refroidissement d'une même source de chaleur quelconque à température constante (par emprunt de la chaleur à la source à température constante).

On montrera plus bas que ces deux énoncés du second principe de la thermodynamique sont équivalents.

Essayons tout d'abord de dégager quelques conséquences importantes et un énoncé quantitatif du second principe de la thermodynamique en analysant le cycle de Carnot.

Rendement d'un cycle de Carnot. Introduisons la notion de rendement η d'une machine thermique fonctionnant d'après le cycle de Carnot. Par définition, le rendement η d'un cycle de Carnot est le rapport du travail mécanique $A > 0$, produit au cours du cycle, sur la quantité de chaleur $Q_1 > 0$ reçue par le système au cours de ce cycle. D'après (4.13) on obtient pour η d'un cycle de Carnot la formule suivante:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1. \tag{5.1}$$

La propriété obtenue $\eta < 1$ pour un cycle de Carnot est une conséquence du premier principe de la thermodynamique.

Théorème de Carnot. Le théorème de Carnot sur les propriétés du rendement η d'un cycle de Carnot représente une conséquence remarquable du second principe de la thermodynamique.

Pour tout cycle de Carnot réversible la valeur de η ne dépend ni des propriétés de l'agent thermique utilisé dans le cycle (le gaz parfait pourrait servir, dans l'exemple analysé précédemment, d'agent thermique), ni du mode de production du cycle lequel est défini, par exemple, par le volume de l'agent thermique et par le degré de dilatation le long des isothermes. Elle ne dépend que des températures θ_1 et θ_2 données sur les isothermes MN et KP (fig. 32).

Démontrons que η ne dépend que de θ_1 et θ_2 et est une caractéristique absolue du cycle de Carnot réversible; c'est-à-dire une fonction universelle $\eta(\theta_1, \theta_2)$. En même temps nous montrerons que si les températures θ_1 et θ_2 sont fixes, le rendement η' d'une machine fonctionnant en cycle de Carnot irréversible (de toute machine thermique cyclique fonctionnant d'après le schéma de la figure 31, *a*, machine ne puisant de la chaleur que dans des sources aux températures constantes θ_1 et θ_2) ne peut pas dépasser le rendement η d'une machine fonctionnant en cycle de Carnot correspondant réversible, c'est-à-dire que

$$\eta' \leqslant \eta. \tag{5.2}$$

Ainsi donc, le rendement d'un cycle de Carnot est maximal dans un processus réversible et il est impossible de le rendre égal à l'unité par quels que procédés que ce soit, puisque pour produire un travail mécanique A il faut non seulement extraire de la chaleur Q_1 du milieu extérieur pour effectuer une dilatation isotherme mais aussi

restituer au milieu extérieur une partie Q_2 de la chaleur empruntée au cours de la compression isotherme.

Démontrons tout d'abord la proposition (5.2). Pour ce faire supposons qu'il y ait deux cycles de Carnot : l'un irréversible, de rendement η', et l'autre réversible, de rendement η, les sources chaude et froide ayant dans les deux cycles les mêmes températures θ_1 et θ_2, $\theta_1 > \theta_2$. Supposons que $\eta' > \eta$ et démontrons que cela contredit le second principe de la thermodynamique. En effet, supposons que la machine thermique à η' fonctionne dans le sens direct et fournisse un travail mécanique A'. Imprimons à la seconde machine thermique (réversible) le sens inverse de fonctionnement, c'est-à-dire utilisons-la comme une machine frigorifique. On a alors pour la machine à η' : $Q'_1 > 0$, $Q'_2 > 0$ et $A' = Q'_1 - Q'_2 > 0$, tandis que pour η on a : $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ et $A = Q_2 - Q_1 < 0$ ($-A > 0$ est le travail produit sur la machine frigorifique).

Choisissons un cycle de Carnot réversible en sorte qu'on ait l'égalité *) $-A = A'$, donc $Q'_1 - Q'_2 = Q_1 - Q_2$ et réunissons ces deux machines. Pour la machine ainsi obtenue on a

$$A_0 = A' + A = Q'_1 + Q_2 - Q_1 - Q'_2 = 0.$$

Le seul effet produit par cette machine composée consiste en la redistribution de chaleur entre les corps servant de source chaude et de source froide.

Une quantité de chaleur $(Q_1 - Q'_1) = (Q_2 - Q'_2)$ est extraite de l'un de ces corps pour être transmise à l'autre. On a choisi les cycles réversible et irréversible tels que $|A| = A'$. Par conséquent $\eta Q_1 = \eta' Q'_1$. Il en découle que l'hypothèse $\eta' > \eta$ conduit à l'inégalité

$$Q'_1 < Q_1$$

ou

$$(Q_1 - Q'_1) = (Q_2 - Q'_2) > 0. \tag{5.3}$$

La quantité positive $(Q_2 - Q'_2)$ est égale à la quantité totale de chaleur extraite de la source à température θ_2, et la quantité positive de chaleur $(Q_1 - Q'_1)$, égale à la première, est la chaleur transmise à une source à température plus élevée $\theta_1 > \theta_2$. Ainsi donc, la machine composée effectue un transfert de la chaleur d'une source froide à une source chaude sans apport de l'énergie extérieure. Or cela est impossible d'après le second principe de la thermodynamique.

Ainsi donc, la supposition $\eta' > \eta$ contredit le second principe de la thermodynamique et doit être rejetée. Seules les possibilités

---

*) Il est toujours possible de choisir une machine réversible au même rendement η. Il suffit seulement de choisir le volume de l'agent thermique, les valeurs du travail et de la chaleur étant proportionnelles, dans le cas considéré, à la masse de l'agent.

suivantes peuvent être admises

$$\eta' < \eta \text{ ou } \eta' = \eta. \tag{5.4}$$

Si la machine à η' est également réversible, on a, en changeant de place η' et η dans les raisonnements précédents,

$$\eta < \eta' \quad \text{ou} \quad \eta' = \eta. \tag{5.5}$$

Les relations (5.4) et (5.5) ne sont compatibles que si

$$\eta' = \eta.$$

Dès lors l'égalité des rendements de deux cycles de Carnot réversibles quelconques aux températures identiques θ_1 et θ_2 est démontrée. Si une machine à η' est irréversible, il est impossible de la faire fonctionner dans le sens inverse de façon à obtenir les mêmes résultats, c'est pourquoi on ne peut pas donner une démonstration semblable de l'égalité (5.5).

Par conséquent, si le cycle à η' est irréversible, seule l'inégalité

$$\eta' \leqslant \eta$$

a lieu. Le coefficient η caractérise l'efficacité de l'utilisation de l'énergie thermique Q_1 reçue par la machine de la source chaude; seule la partie η de cette énergie est transformée par la machine en travail mécanique. La machine réversible est plus profitable puisqu'une machine irréversible a, en général, $\eta' < \eta$. On interprète parfois l'irréversibilité comme une perte supplémentaire de l'énergie utilisée.

On constate que la démonstration de l'égalité des rendements de tous les cycles de Carnot réversibles ne fait appel ni aux propriétés de l'agent thermique, ni aux particularités d'un cycle. Il s'ensuit alors que le rendement d'un cycle de Carnot réversible est indépendant de l'agent thermique et du degré de dilatation. Il ne dépend que des températures θ_1 et θ_2 et en est une fonction universelle $\eta = \eta(\theta_1, \theta_2)$.

Trouvons maintenant cette fonction universelle $\eta(\theta_1, \theta_2)$. Par définition, le rendement du cycle de Carnot

$$\eta(\theta_1, \theta_2) = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Remplaçons $\eta(\theta_1, \theta_2)$ par la fonction

$$f(\theta_1, \theta_2) = 1 - \eta(\theta_1, \theta_2),$$

soit

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Etablissons une équation fonctionnelle pour $f(\theta_1, \theta_2)$. Introduisons à cet effet trois corps de grande capacité calorifique aux tempéra-

tures θ_1, θ_2, θ_3 et trois cycles de Carnot réversibles où ces corps servent de sources chaudes ou de sources froides. Il est évident que

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_3}\frac{Q_3}{Q_1} = f(\theta_3, \theta_2) \cdot f(\theta_1, \theta_3), \tag{5.6}$$

où, par exemple, $f(\theta_3, \theta_2) = 1 - \eta(\theta_3, \theta_2)$ pour un cycle de Carnot utilisant comme source chaude le corps à température θ_3 et comme source froide celui à température θ_2, etc. Notons que l'ordre d'énumération des arguments de la fonction importe, à savoir la température de la source chaude vient toujours en premier lieu et celle de la source froide pour le cycle de Carnot considéré vient en second lieu.

Dans le cas où $\theta_1 = \theta_2$ l'équation (5.6) se ramène à la condition

$$1 = f(\theta_3, \theta_1) \cdot f(\theta_1, \theta_3),$$

c'est-à-dire que la fonction f se transforme en $1/f$ lorsque les arguments sont permutés. En vertu de cette propriété de la fonction f on tire de l'équation (5.6) que

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(\theta_1, \theta_2) = \frac{f(\theta_3, \theta_2)}{f(\theta_3, \theta_1)}. \tag{5.7}$$

Il découle de l'équation (5.7) que le rapport Q_2/Q_1 est indépendant de θ_3, n'étant fonction que des températures θ_1 et θ_2. La solution de l'équation fonctionnelle (5.7) a la forme

$$f(\theta_1, \theta_2) = \frac{\omega(\theta_2)}{\omega(\theta_1)}.$$

Par conséquent, θ_3 pouvant être considérée comme une constante pour toutes les θ_2 et θ_1 possibles, on a

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\omega(\theta_2)}{\omega(\theta_1)}.$$

En appelant température absolue T la valeur de la fonction $\omega(\theta)$ on a *)

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}, \tag{5.8}$$

c'est-à-dire que le rapport de la quantité de chaleur Q_2 cédée par le système thermodynamique à la source froide au cours d'un cycle de Carnot réversible sur la quantité de chaleur Q_1 reçue par le système à partir de la source chaude est égal à celui des températures

*) Il est aisé de vérifier par un calcul direct que si l'agent thermique dans un cycle de Carnot est le gaz parfait satisfaisant à l'équation d'état $p = R\rho T$ (T est la température en échelle Kelvin), $Q_2/Q_1 = T_2/T_1$. Par conséquent, la température absolue qu'on introduit ici est proportionnelle à la température en échelle Kelvin.

absolues de la source froide et de la source chaude. Ainsi s'établit une liaison entre la notion de température en tant que caractéristique des isothermes, l'énergie reçue et l'énergie cédée au cours du cycle de Carnot correspondant.

Enoncé quantitatif du second principe de la thermodynamique appliqué au cycle de Carnot réversible. Récrivons la relation (5.8) pour un processus réversible sous la forme

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Ensuite, en nous référant aux définitions générales, convenons de compter positive la quanité de chaleur $Q_1 = Q_1^{(c)}$ reçue par le système et négative la quantité de chaleur $-Q_2 = Q_2^{(c)}$ cédée par le système; dans ce cas l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{Q_1^{(c)}}{T_1} + \frac{Q_2^{(c)}}{T_2} = 0. \tag{5.9}$$

Cette affirmation universelle découle du second principe de la thermodynamique et peut être prise comme son énoncé quantitatif pour tout cycle de Carnot réversible dont l'agent thermique est un milieu biparamétrique arbitraire.

Enoncé quantitatif du second principe de la thermodynamique appliqué à un cycle réversible quelconque. Envisageons (fig. 32, *a*) un certain cycle réversible $\mathscr{L}$ figuré, dans l'espace des états p, $1/\rho$,

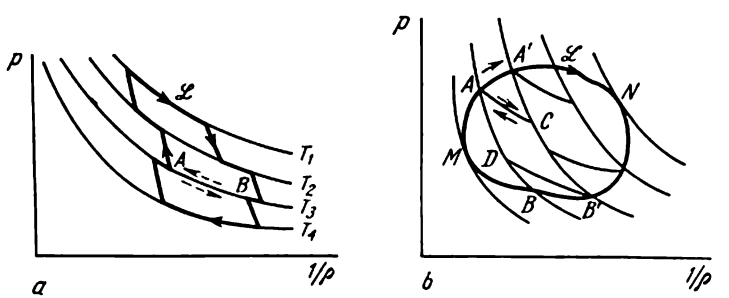


Fig. 32. *a* — processus $\mathscr{L}$ se confondant avec la frontière extérieure de la somme des cycles de Carnot; *b* — cycle réversible arbitraire

par une courbe brisée qui se confond avec la frontière extérieure de la somme des cycles de Carnot réversibles. Etant donné que l'égalité (5.9) est valable pour chacun des cycles de Carnot pris à part, on obtient en faisant la somme de toutes ces égalités pour tous les

cycles de Carnot

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0.$$

Les termes Q_i/T_i correspondant aux trajets internes à $\mathscr{L}$ s'éliminent, puisque chacun de ces trajets, par exemple AB, est parcouru deux fois, dans un sens puis dans l'autre, le corps à température T_i étant source froide la première fois et source chaude la seconde fois. Par suite, on a finalement

$$\sum \frac{Q_i}{T_i} = 0; \tag{5.10}$$

la somme ne comprend que les flux de chaleur Q_i qui sont figurés par la courbe brisée limitant le cycle résultant $\mathscr{L}$.

Soit maintenant $\mathscr{L}$ un cycle réversible quelconque effectué par un système thermodynamique biparamétrique. Pour réaliser ce cycle on a besoin d'un grand nombre de sources de chaleur à des températures sensiblement voisines, différant infiniment peu l'une de l'autre. Le système est successivement mis en contact avec les sources dont la température coïncide avec celle du système sur l'étape de cycle donnée, tout en étant soumis à une compression ou à une dilatation infiniment lente. Supposons que sur un segment infinitésimal AA' de la courbe $\mathscr{L}$ (fig. 32, *b*) le système reçoive une quantité élémentaire de chaleur $\Delta Q^{(c)}$. Menons par le point A une isotherme AC et par le point A' une adiabatique $A'C$; désignons par ΔQ_{isoth} la quantité de chaleur qu'aurait reçue le système s'il avait subi une transformation isotherme infinitésimale AC. En étudiant le petit cycle $AA'CA$ on peut dégager la relation entre $\int_{AA} dQ^{(c)} = \Delta Q^{(c)}$ et ΔQ_{isoth}. Appliquons à ce cycle le principe de conservation de l'énergie $\Delta Q^{(c)} - \Delta Q_{\text{isoth}} = \Delta A$ (le segment d'isotherme AC du cycle $AA'CA$ étant parcouru dans le sens CA, on a $-\Delta Q_{\text{isoth}}$ dans l'expression de la loi de conservation de l'énergie pour le cycle $AA'CA$). Les quantités de chaleur $\Delta Q^{(c)}$ et ΔQ_{isoth} sont des infiniment petits du premier ordre dans les éléments infinitésimaux du cycle; le travail ΔA fourni au cours d'un petit cycle est représenté par l'aire $AA'CA$ et est donc un infiniment petit du second ordre, c'est-à-dire qu'il est infiniment petit par rapport à $\Delta Q^{(c)}$ et ΔQ_{isoth}. Prolongeons l'adiabatique $A'C$ jusqu'à l'intersection avec $\mathscr{L}$ dans un second point B' et menons une adiabatique par le point A. Alors, la quantité de chaleur $\Delta Q^{(c)}$ reçue par le système sur la portion BB' du processus $\mathscr{L}$ est égale, au même degré d'approximation près, à la quantité de chaleur correspondant au segment d'isotherme $B'D$. Il est clair que deux éléments de chaleur $\Delta Q^{(c)}$ sur les segments AA' et BB' du processus sont égaux, aux

infiniment petits du second ordre près, aux quantités de chaleur ΔQ_{isoth} que recevrait le système de la source chaude et de la source froide s'il était l'agent thermique d'une machine de Carnot effectuant un cycle de Carnot réversible $ACB'DA$.

Si l'on divise toute la surface interne à $\mathscr{L}$ en bandes de surface à l'aide d'un système d'adiabatiques (fig. 32, *b*) et si l'on mène des isothermes correspondantes, il en résultera un processus $\mathscr{L}'$ figuré, dans l'espace des états, par une courbe brisée composée de segments d'adiabatiques et d'isothermes. On peut appliquer à ce processus l'égalité (5.10)

$$\sum_i \frac{\Delta Q_{i\,\text{isoth}}}{T_i} = 0, \tag{5.11}$$

où sont sommés les apports de chaleur $\Delta Q_{i\text{isoth}}$ le long de la frontière de $\mathscr{L}'$.

Si le nombre d'adiabatiques tracées tend vers l'infini en même temps que les segments du cycle $\mathscr{L}$ par les extrémités desquels passent les adiabatiques tendent vers zéro, il vient que $\mathscr{L}' \to \mathscr{L}$ et

$$\Delta Q_{\text{isoth}} \to \Delta Q^{(e)}.$$

Comme la différence $\Delta Q^{(e)} - \Delta Q_{\text{isoth}}$ est un infiniment petit du second ordre (l'aire d'un triangle courbe infiniment petit), on obtient à partir de (5.11) une relation limite

$$\oint_{\mathscr{L}} \frac{dQ^{(e)}}{T} = 0, \tag{5.12}$$

qui est une égalité exacte pour tout cycle réversible effectué par un milieu biparamétrique.

Il découle de l'égalité

$$\oint_C \frac{dQ^{(e)}}{T} = 0,$$

valable pour tout cycle réversible C, que $\int\limits_{AB(\mathscr{L})} \frac{dQ^{(e)}}{T}$ est indépendant du contour d'intégration $\mathscr{L}$ entre les états A et B quel que soit le processus réversible $\mathscr{L}$.

Introduction de l'entropie par processus réversibles pour un milieu biparamétrique. Soit A le point d'état initial d'un milieu biparamétrique à partir duquel on peut atteindre un état B quelconque du système par des transformations réversibles. On peut introduire

une fonction des paramètres d'état, coordonnées du point B,

$$S(B)=S\left(p,\ \frac{1}{\rho}\right)=\int_A^B \frac{dQ^{(e)}}{T}+S(A), \tag{5.13}$$

appelée entropie. D'après (5.13) l'entropie est définie à une constante additive $S(A)$ près. On obtient de (5.13) que, pour toute variation des coordonnées du point B, l'accroissement de l'entropie est donné par la formule

$$dS=\frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

Ainsi donc, bien que l'apport élémentaire de chaleur exprimé au moyen des paramètres d'état et de leurs différentielles ne soit pas, en général, une différentielle totale, il existe pour lui un facteur intégrant $1/T\ (p,\ 1/\rho)$, grandeur inverse de la température absolue.

Compte tenu de l'équation de la chaleur reçue on obtient pour la différentielle de l'entropie l'expression suivante:

$$dS=\frac{dQ^{(e)}}{T}=\frac{dU_m+dA^{(1)}}{T} \tag{5.14'}$$

ou, rapportée à l'unité de masse,

$$ds=\frac{dq^{(e)}}{T}=\frac{dU+pd\frac{1}{\rho}}{T}, \tag{5.14}$$

pouvant servir à calculer l'entropie d'un milieu biparamétrique si l'on connaît l'énergie interne U du milieu en fonction des paramètres d'état.

Entropie d'un gaz parfait. En ce qui concerne le gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes ($p=\rho RT$, $U=c_VT$), on aura

$$ds=\frac{c_V\,dT}{T}+\frac{Rd\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\rho}},$$

ou

$$s=c_V\ln\frac{T}{\rho^{\gamma-1}}+\text{const}=c_p\ln\frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}+\text{const}_1=$$

$$=c_V\ln\frac{p}{\rho^{\gamma}}+\text{const}_2=c_V\ln\frac{p}{\rho^{\gamma}}-c_V\ln\frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}}+s_0, \tag{5.15}$$

où p_0, ρ_0, s_0 sont des constantes correspondantes.

Conditions imposées par l'entropie à la forme de l'équation d'état. L'égalité (5.14) impose des restrictions à la forme des fonctions $U(p, \rho)$ et $T(p, \rho)$, qui sont les fonctions principales d'état d'un milieu. Comme ds doit être une différentielle totale, la condition d'intégrabilité de (5.14) est de la forme

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial p}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial U}{\partial \rho}-\frac{p}{\rho^2 T}\right)$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial \rho}\frac{\partial U}{\partial p}=\frac{\partial T}{\partial p}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}-\frac{p}{\rho^2}\right)+\frac{T}{\rho^2}. \tag{5.16}$$

La fonction $U(p, \rho)$ étant donnée, les fonctions $T(p, \rho)$ doivent être solutions de (5.16) et, par conséquent, elles ne sont pas arbitraires bien qu'il existe quantité de solutions de l'équation (5.16) en dérivées partielles.

Présentons maintenant l'énoncé du second principe de la thermodynamique pour un cycle de Carnot irréversible.

Enoncé quantitatif du second principe de la thermodynamique pour un cycle de Carnot irréversible. Soient deux sources aux températures T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$) servant de source chaude et de source froide dans deux cycles de Carnot dont l'un est réversible (rendement η) et l'autre irréversible (rendement η').

Alors, puisque $\eta' \leqslant \eta = 1 - T_2/T_1$, il vient que

$$1-\frac{Q_2'}{Q_1'}\leqslant 1-\frac{T_2}{T_1} \quad \text{ou} \quad \frac{Q_2'}{Q_1'}\geqslant\frac{T_2}{T_1},$$

d'où $\frac{Q_1'}{T_1}-\frac{Q_2'}{T_2}\leqslant 0$.

En admettant que la quantité de chaleur Q_1' reçue par le système est positive et que la quantité Q_2' cédée est négative on a

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{Q_i'}{T_i}\leqslant 0. \tag{5.17}$$

On a là l'énoncé quantitatif du second principe de la thermodynamique pour le cycle de Carnot irréversible.

Exemple illustrant le caractère de variation de l'entropie dans les processus irréversibles. Considérons un exemple particulier permettant d'introduire l'entropie pour l'ensemble du système et d'analyser la variation de l'entropie dans le cas de processus irréversibles.

Soient deux volumes infinitésimaux I et II d'un fluide incompressible aux mêmes pressions et à des températures différentes. Soit T_1 la température du volume I et T_2 celle du volume II ($T_2 > T_1$).

Mis en contact, ces deux volumes échangent de la chaleur et l'on peut associer, à chaque instant, une certaine température à chacun des volumes I et II (puisqu'ils sont petits).

La transmission de la chaleur de II à I est irréversible, car, selon le second principe de la thermodynamique, s'il n'y a pas d'apport de l'énergie extérieure, la chaleur peut être transférée de la particule à température T_2 à la particule à température T_1 si $T_2 > T_1$.

Désignons par dQ une quantité de chaleur positive transmise de la particule II à la particule I au bout du temps dt. Considérons, pour simplifier, le cas où le système composé des particules I et II n'échange pas de chaleur avec l'extérieur. Si l'irréversibilité se rapporte uniquement au processus d'échange de chaleur entre les particules, tandis que les états et les processus dans chaque particule isolée peuvent être supposés réversibles, on peut écrire pour des particules isolées

$$dS_{\mathrm{I}} = \frac{dQ}{T_1}, \quad dS_{\mathrm{II}} = \frac{-dQ}{T_2}.$$

Il est possible de calculer la variation de l'entropie de tout le système I + II en supposant que l'entropie totale soit une fonction additive, c'est-à-dire que

$$S = S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}},$$

et, par conséquent,

$$dS = dS_{\mathrm{I}} + dS_{\mathrm{II}} = dQ\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} > 0.$$

Ainsi donc, malgré l'absence, dans l'exemple traité, d'un apport de chaleur extérieur vers le système I + II, l'entropie de celui-ci croît par suite d'un processus interne irréversible.

Enoncé quantitatif du second principe de la thermodynamique appliqué à un milieu multiparamétrique. Plus haut, en partant du cycle de Carnot, on n'a introduit l'entropie comme fonction d'état que pour un milieu biparamétrique. Essayons maintenant d'introduire l'entropie pour des milieux dont l'état est déterminé par n paramètres de définition variables $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n$ et démontrons que, dans le cas d'un cycle irréversible quelconque C pour lequel on peut définir la température T de tout état intermédiaire du système, a lieu l'inégalité

$$\oint_C \frac{dQ^{(e)}}{T} \leqslant 0.$$

Décomposons à cet effet un cycle arbitraire (éventuellement irréversible) C effectué par un système quelconque en éléments infinitésimaux dl_i qui ont chacun la température T_i du système supposée

constante. Désignons par dQ_i la quantité de chaleur reçue par le système au cours du processus dl_i. Dans chaque processus élémentaire dl_i le système multiparamétrique peut servir de source de chaleur pour un cycle de Carnot élémentaire effectué par un milieu biparamétrique auxiliaire; on peut choisir ces cycles de Carnot en sorte que dans chacun de ceux-ci le milieu biparamétrique auxiliaire restitue une quantité de chaleur dQ_i au milieu multiparamétrique considéré. On peut donc imaginer que le milieu biparamétrique auxiliaire en contact avec le milieu multiparamétrique fournit à ce dernier toute la chaleur extérieure au cours du processus C. Prenons un certain corps à température constante T_0 comme seconde source de chaleur pour tous les cycles de Carnot auxiliaires.

Pour chaque cycle de Carnot élémentaire on a

$$-\frac{dQ_i^{(e)}}{T_i}+\frac{dQ_0}{T_0}=0, \tag{5.18}$$

$(-dQ_i^{(e)})$ et dQ_0 étant les quantités de chaleur reçues par le milieu biparamétrique lors des étapes décrites par les isothermes T_i et T_0 respectivement. En intégrant (5.18) sur tout le cycle C on obtient

$$Q_0=\oint_C dQ_0=T_0\oint_C \frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

Envisageons maintenant un système thermodynamique composé d'un ensemble de milieux bi- et multiparamétriques. La chaleur ne lui est transmise que par la source T_0. La chaleur totale reçue par le système multiparamétrique de l'extérieur au cours du cycle C est égale à Q_0.

En vertu du principe de conservation de l'énergie, l'énergie calorifique Q_0 reçue par le système composé est égale au travail A produit par ce système sur les corps extérieurs

$$Q_0=T_0\oint_C \frac{dQ^{(e)}}{T}=A.$$

Equivalence des énoncés du second principe de la thermodynamique. Le travail A ne saurait être positif, sinon on aurait une machine cyclique effectuant un travail mécanique A sur les corps extérieurs uniquement aux dépens de l'apport de chaleur provenant d'une source à température fixe T_0. L'un des énoncés du second principe de la thermodynamique stipule qu'il est impossible de réaliser une telle machine. Cet énoncé est équivalent à la proposition affirmant que la chaleur ne peut pas être transmise d'un corps moins chaud à un corps plus chaud sans apport de l'énergie extérieure.

En effet, si $A>0$, le travail obtenu pourrait être utilisé dans la machine frigorifique fonctionnant d'après le cycle de Carnot pour

transmettre de la chaleur d'une source à température $T^* < T_0$ à une source à température T_0.

Comme il découle de l'équation

$$A = Q_1 - Q_2 = Q_0 > 0,$$

cette machine aurait extrait une quantité de chaleur Q_2 de la source à température T^* et aurait transmis une quantité de chaleur $Q_1 > Q_0$ à la source à température T_0. Comme $Q_1 - Q_0 > 0$ et $Q_2 > 0$, il y aurait en fin de compte dans le système thermodynamique composé de cette machine frigorifique et de la machine considérée précédemment effectuant un travail A un transfert de chaleur d'un corps à basse température T^* à un corps à température élevée T_0 sans participation d'une énergie extérieure. Or, cela est impossible.

Pour compléter nos considérations sur l'équivalence des deux énoncés du second principe de la thermodynamique il faut noter que si l'on admettait la réciproque, c'est-à-dire le transfert de chaleur d'un corps froid vers un corps chaud sans dépense de travail extérieur, on en arriverait à la possibilité de la création d'un moteur perpétuel de seconde espèce.

En effet, supposons réalisable la transmission de chaleur d'un corps à température T_2 à un corps à température T_1 ($T_1 > T_2$) sans dépense de travail extérieur. Utilisons une certaine quantité de chaleur Q_1 transférée du corps à température T_2 vers le corps à température T_1 dans une machine thermique fonctionnant, par exemple, d'après le cycle de Carnot. Cette machine extrait cette quantité de chaleur Q_1 du corps à température T_1, puis en restitue une partie Q_2 ($Q_2 < Q_1$) au corps à température T_2 et produit un certain travail mécanique $A > 0$.

Si l'on considère les deux processus en question (l'un spontané et l'autre dans la machine thermique) comme un seul, il en résulte un travail mécanique produit périodiquement uniquement aux dépens de la quantité de chaleur $Q_1 - Q_2$ empruntée à l'unique source de chaleur à température T_2. Or, cela contredit le second énoncé du second principe de la thermodynamique.

Enoncé quantitatif du second principe de la thermodynamique appliqué aux processus irréversibles dans un milieu quelconque. Ainsi donc, on a démontré plus haut que l'hypothèse

$$\oint_C \frac{dQ^{(e)}}{T} > 0$$

contredit le second principe de la thermodynamique et doit être remplacée par la relation

$$\oint_C \frac{dQ^{(e)}}{T} \leqslant 0$$

pour tout cycle C effectué par n'importe quel milieu (y compris biparamétrique).

Enoncé quantitatif du second principe de la thermodynamique appliqué aux processus réversibles dans un milieu quelconque. Si le cycle principal C est réversible, en reprenant les raisonnements pour un cycle C effectué dans le sens inverse on arrive à la conclusion que la supposition $A < 0$ contredit également le second principe de la thermodynamique. Pour un cycle réversible C effectué par tout milieu il ne subsiste qu'une seule possibilité, à savoir

$$\oint_C \frac{dQ^{(e)}}{T} = 0.$$

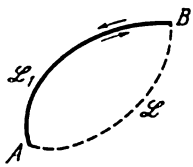


Fig. 33. Sur la notion d'entropie introduite à l'aide de processus réversibles

Introduction de l'entropie pour un milieu multiparamétrique à l'aide des processus réversibles. Il découle de l'égalité précédente que dans le cas des processus réversibles l'intégrale $\int_A^B \frac{dQ^{(e)}}{T}$ est indépendante du chemin d'intégration, n'étant fonction pour un état initial fixe (A) du milieu que de l'état final (B). Par conséquent, en recourant aux processus réversibles pour un milieu multiparamétrique de même qu'on a recouru aux processus réversibles pour un milieu biparamétrique, on peut introduire une fonction d'état univoque

$$S(B) = \int_A^B \frac{dQ^{(e)}}{T} + \text{const},$$

appelée entropie.

Si, en passant de l'état A à l'état B, le système subit un processus irréversible $\mathscr{L}$, alors l'entropie de l'état B peut être calculée d'après un processus réversible quelconque *) $\mathscr{L}_1$ entre A et B si seulement ce processus réversible existe (fig. 33). Cela donnera

$$S(B) - S(A) \geqslant \int_{AB(\mathscr{L})} \frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

En effet, soient deux états A et B d'un certain milieu biparamétrique. Supposons qu'on peut réaliser entre ces deux états un processus réversible ($\mathscr{L}_1$) et un processus irréversible ($\mathscr{L}$).

*) Il est évident que la valeur de la différence $S(B) - S(A)$ est la même pour tous les différents parcours réversibles réalisables entre les états A et B.

En s'aidant du processus réversible $\mathcal{L}_1$ on peut calculer l'entropie

$$S_B - S_A = \int\limits_{AB(\mathcal{L}_1)} \frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

Le cycle $C = A\mathcal{L}B\mathcal{L}_1A$ est de toute évidence irréversible et

$$\oint\limits_C \frac{dQ^{(e)}}{T} \leqslant 0,$$

c'est pourquoi

$$S_B - S_A \geqslant \int\limits_{AB(\mathcal{L})} \frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

Soulignons que la dernière intégrale est prise sur le parcours irréversible $\mathcal{L}$.

Chaleur non compensée. Pour un processus irréversible reliant deux états A et B infiniment proches on a

$$dS > \frac{dQ^{(e)}}{T}.$$

Ainsi donc, dans le cas des processus irréversibles

$$T\,dS > dQ^{(e)}$$

ou

$$T\,dS = dQ^{(e)} + dQ',$$

où la quantité dQ' appelée chaleur non compensée est toujours supérieure ou égale à zéro. Pour les processus réversibles

$$dQ' = 0.$$

Soulignons toutefois que $dQ' = 0$ peut avoir également lieu dans les processus irréversibles.

Travail d'un moteur thermique lorsque $dQ^{**} \neq 0$. Essayons d'obtenir maintenant l'équation énergétique fondamentale d'un moteur thermique fonctionnant dans le régime $dQ^{**} \neq 0$. Un exemple de cette machine nous est fourni par un dispositif fondé sur l'effet magnétothermique. On sait que l'aimantation et la désaimantation des paramagnétiques sont analogues à la compression et à la dilatation adiabatiques d'un milieu biparamétrique comme le gaz parfait. L'aimantation adiabatique se produit grâce à l'emprunt de l'énergie extérieure dQ^{**}. Au cours de ce processus l'énergie interne du milieu augmente ainsi que la température. La désaimantation adiabatique s'accompagne d'une perte de chaleur dQ^{**}

ainsi que de la diminution de l'énergie interne et de la température du système.

L'effet magnétothermique permet d'obtenir des températures très basses (jusqu'à 0,0044 °K).

Lorsque $dQ^{**} \neq 0$, l'équation de la chaleur reçue a la forme

$$dU_m = -dA^{(i)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}.$$

Pour un cycle fermé C on a

$$\oint_C (dA^{(i)} - dQ^{**}) = \oint_C dQ^{(e)} = Q^{(e)}, \tag{5.19}$$

où $Q^{(e)}$ désigne toute la chaleur reçue par l'agent thermique de la machine.

Le théorème des forces vives $dE = dA^{(i)} + dA^{(e)}$ appliqué à un cycle fermé $\left(\oint dE = 0\right)$ fournit

$$\oint_C dA^{(i)} = -\oint_C dA^{(e)}.$$

Cela étant, l'égalité (5.19) peut s'écrire de la façon suivante:

$$-\oint_C (dA^{(e)} + dQ^{**}) = Q^{(e)}.$$

Cette relation se trouve être l'équation énergétique décrivant le fonctionnement d'un moteur thermique quand, en effectuant un cycle fermé, il reçoit de la chaleur extérieure $Q^{(e)}$ qu'il peut dépenser non seulement pour produire un travail mécanique sur les corps extérieurs mais aussi pour leur communiquer une énergie de nature non mécanique (différente du travail des forces macroscopiques) et non calorifique.

On voit que les conclusions concernant le fonctionnement des machines thermiques sont applicables même si $dQ^{**} \neq 0$ à condition de supposer que dA soit une somme $dA^{(e)} + dQ^{**}$, c'est-à-dire que

$$A = \oint_C (dA^{(e)} + dQ^{**}).$$

Les états aux énergies internes égales et aux entropies différentes. Signalons, enfin, l'existence éventuelle de processus n'entraînant que la variation de l'entropie du système sans modifier son énergie interne. Cela part du fait que l'énergie interne et l'entropie peuvent dépendre de paramètres thermodynamiques différents, le processus pouvant être fermé pour les paramètres énergétiques et ouvert pour les paramètres de l'entropie.

En ce qui concerne le gaz parfait, par exemple, on a

$$U = c_V T, \quad s = c_p \ln \frac{T}{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} + \text{const},$$

ce qui permet d'affirmer que tout processus s'effectuant entre deux états à température constante et pression variable se rapporte à ce genre de processus.

Ainsi donc, si un gaz primitivement enfermé dans un récipient sous une grande pression p_0 échappe dans l'atmosphère à température constante, son énergie interne ne variera pas, tandis que s augmentera (à cause de la diminution de p) (fig. 34). Au cours de ce processus le gaz cède de l'énergie sous forme du travail mécanique en recevant une quantité égale d'énergie thermique.

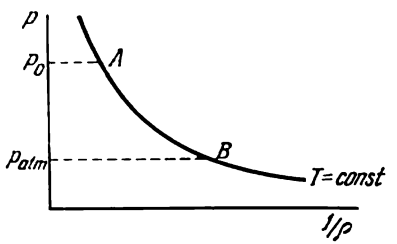


Fig. 34. AB — processus où U=const et s varie

Notons qu'une même quantité d'énergie peut être d'efficacité variable du point de vue de son application pratique, cette efficacité étant définie justement par la valeur de l'entropie (plus l'entropie est grande moins l'énergie utilisée est efficace). En effet, lorsque le gaz passe de l'état A à l'état B suivant une isotherme, il fournit du travail sur chaque élément d'isotherme et y reçoit une quantité égale de chaleur.

Or, l'énergie calorifique est la forme d'énergie la moins efficace. D'après le second principe de la thermodynamique elle ne peut pas être totalement transformée en aucune autre espèce d'énergie. Au contraire, d'autres formes d'énergie (par exemple, le travail mécanique) peuvent se transformer mutuellement et être transformées également en chaleur.

Introduction de l'entropie par voie statistique. L'entropie s peut être introduite statistiquement. La valeur de l'entropie est liée à la probabilité de l'état correspondant. Dans la physique statistique, Boltzmann a établi pour l'entropie la formule suivante

$$s = k \ln P, \tag{5.20}$$

où k est la constante de Boltzmann, P la mesure de probabilité de l'état envisagé, déterminée par le nombre des états microscopiques probables correspondant à un même état macroscopique (les caractéristiques macroscopiques ne se distinguent pas pour nombre de différents états microscopiques).

Additivité de l'entropie. La formule (5.20) conduit à l'additivité de l'entropie si la probabilité d'état du système entier est égale au produit de celles des parties du système.

Il en est ainsi, évidemment, si l'on peut supposer indépendantes les probabilités d'état des parties du système.

La croissance de l'entropie lorsque le système tend vers l'équilibre. L'expression (5.20) peut être considérée comme la définition de l'entropie valable pour les processus tant réversibles qu'irréversibles. Comme tous les états pratiquement réalisables correspondent aux états les plus probables, il s'ensuit de (5.20) que lorsque le système isolé tend vers l'équilibre, l'entropie croît.

Processus adiabatiques réversibles et irréversibles. Si le système est thermiquement isolé mais peut être soumis à l'action d'une force quelconque, les processus auxquels participe ce système sont dits processus adiabatiques.

Dans ce cas l'apport extérieur de chaleur est nul ($dQ^{(e)} = 0$). Si le processus adiabatique est réversible, on a

$$T\,ds = 0,$$

on en déduit

$$s = \text{const}.$$

Les processus adiabatiques réversibles sont isentropiques.

Inversement, si le processus réversible est isentropique, c'est-à-dire que $S = \text{const}$, alors $dQ^{(e)} = 0$ et il est adiabatique.

Dans le cas d'un processus adiabatique et irréversible on a $dS \geqslant 0$ et l'entropie, si elle varie, ne peut que croître, car $dQ' \geqslant 0$.

Dans les processus non adiabatiques irréversibles l'entropie peut croître et décroître, puisque le signe de

$$T\,dS = dQ^{(e)} + dQ'$$

peut être quelconque. Il découle du second principe de la thermodynamique que dQ' n'est pas négatif.

Lorsqu'on construit les modèles concrets des milieux continus dans lesquels les processus irréversibles ne sont pas exclus, il faut recueillir l'information sur dQ' à partir d'expériences spéciales, d'hypothèses ou de résultats de la physique statistique.

On peut donc dire que le second principe de la thermodynamique définit le sens des processus réels. Les processus adiabatiques irréversibles se produisent dans le sens de l'accroissement de l'entropie; les processus non adiabatiques s'accomplissent de façon à avoir dQ' non négatif.

Principe de non-décroissement de l'entropie des systèmes isolés et condition d'équilibre. Dans tous les processus (en réalité irréver-

sibles) d'un système isolé l'entropie ne peut que croître; manifestement, les états où l'entropie d'un système isolé a un maximum sont ceux de l'équilibre. Ainsi donc, pour les processus internes dans les systèmes isolés, la condition de maximum de l'entropie constitue celle de l'équilibre.

§ 6. Potentiels thermodynamiques des milieux biparamétriques

Examinons encore un problème important de la thermodynamique des milieux biparamétriques effectuant, en général, des processus réversibles (dq^{**} est posé nul).

On a indiqué plus haut que les trois fonctions d'état U, s et T d'un milieu biparamétrique ne peuvent pas être indépendantes. Par exemple, si l'énergie interne U est donnée comme une fonction de p et de ρ, la fonction $T(p, \rho)$ doit satisfaire à la condition (5.16), cette dernière étant considérée, pour $U(p, \rho)$ donné, comme l'équation linéaire différentielle aux dérivées partielles du premier ordre pour $T(p, \rho)$.

On sait que cette équation différentielle a beaucoup de solutions, c'est-à-dire de relations diverses $T(p, \rho)$ pour $U(p, \rho)$ donné. Par conséquent, les propriétés thermodynamiques du milieu ne sont pas définies univoquement. Pour éliminer cette non-univocité il faut se donner l'une des solutions particulières de l'équation (5.16), c'est-à-dire choisir une forme concrète de l'équation d'état $T = T(p, \rho)$. Cela fait, on détermine l'entropie (à la constante additive près) à partir de (5.14).

En tant que paramètres de définition thermodynamiques variables d'un milieu biparamétrique on peut choisir, et souvent avec un grand profit, l'un des couples de variables suivants: ρ et s, p et s, ρ et T, etc. Une question se pose alors: est-il possible de donner l'énergie interne U en fonction des variables telles que les autres fonctions thermodynamiques se trouvent définies complètement et de façon univoque? Or, cela s'avère possible.

Energie interne et entropie comme potentiels thermodynamiques. Soit donné U en fonction de ρ et s. En appliquant la règle de dérivation et à partir de l'équation de chaleur reçue (5.14) pour les processus irréversibles, compte tenu du second principe de la thermodynamique, on a

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho ds + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_s d\rho = T\,ds - p\,d\frac{1}{\rho}. \tag{6.1}$$

Il en découle, en raison de l'arbitraire de ds et $d\rho$ que

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho, \quad p = \rho^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_s, \tag{6.2}$$

c'est-à-dire que T et p, fonctions de ρ et s, sont définies univoquement. L'énergie interne U est appelée dans ce cas potentiel thermodynamique. Il résulte également de (6.1) qu'en donnant l'entropie s en fonction de U et ρ on obtient

$$\frac{1}{T}=\left(\frac{\partial s}{\partial U}\right)_\rho, \quad \frac{p}{T}=\left(\frac{\partial s}{\partial 1/\rho}\right)_U,$$

c'est-à-dire dans ce cas pour les variables U et ρ l'entropie représente le potentiel thermodynamique.

Energie libre. Si les variables thermodynamiques de définition sont ρ et T, il est plus commode d'écrire l'égalité (6.1) sous la forme

$$d(U-Ts)=-s\,dT+\frac{p}{\rho^2}\,d\rho$$

ou

$$dF=-s\,dT+\frac{p}{\rho^2}\,d\rho, \tag{6.3}$$

où l'on a désigné par F la fonction d'état

$$F\equiv U-Ts, \tag{6.4}$$

appelée énergie libre. Si l'on connaît F en fonction de ρ et T, alors p et s sont déterminés univoquement à partir de (6.3). En effet, il découle de (6.3) que

$$s=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\rho, \quad p=\rho^2\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_T. \tag{6.5}$$

Si l'on utilise les variables ρ et T, l'énergie libre $F(\rho, T)$ est le potentiel thermodynamique.

Enthalpie. D'une façon analogue, si les paramètres de définition sont la pression p et l'entropie s, la relation (6.1) se met sous une forme plus commode

$$d\left(U+\frac{p}{\rho}\right)=T\,ds+\frac{dp}{\rho}$$

ou

$$di=T\,ds+\frac{dp}{\rho}. \tag{6.6}$$

La fonction d'état

$$i(p, s)\equiv U+p/\rho, \tag{6.7}$$

appelée enthalpie, est le potentiel thermodynamique, puisque

$$T=\left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_p, \quad \frac{1}{\rho}=\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_s. \tag{6.8}$$

Potentiel thermodynamique de Gibbs. Si, enfin, les paramètres de définition sont la pression p et la température T, la relation (6.1)

peut être présentée comme suit :

$$d\left(U-Ts+\frac{p}{\rho}\right)=-s\,dT+\frac{dp}{\rho}$$

ou

$$d\Psi=-s\,dT+\frac{dp}{\rho}.$$

La fonction d'état

$$\Psi(p,\,T)\equiv U-Ts+p/\rho, \tag{6.9}$$

appelée simplement potentiel thermodynamique ou potentiel thermodynamique de Gibbs, permet de définir univoquement ρ et s:

$$s=-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial T}\right)_p,\quad \frac{1}{\rho}=\left(\frac{\partial\Psi}{\partial p}\right)_T. \tag{6.10}$$

L'énergie interne et l'entropie sont définies à une constante additive près, tandis que l'énergie libre F et le potentiel thermodynamique Ψ sont définis à une fonction linéaire de température près.

Il est évident que dans les cas envisagés ci-dessus l'introduction des variables indiquées permet de ramener le problème de la détermination de toutes les fonctions d'état à la détermination d'un seul potentiel correspondant. Pour les variables p et ρ ou T et s on ne peut pas indiquer de potentiel thermodynamique.

Définir un milieu c'est donner les potentiels thermodynamiques en fonction des variables correspondantes. Ainsi donc, les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un milieu parfait biparamétrique sont complètement définies par la donnée d'une des fonctions $U(\rho,\,s)$, $i(p,\,s)$, $F(\rho,\,T)$ ou $\Psi(p,\,T)$. La donnée de U, i, F, Ψ respectivement en fonction d'autres variables ne suffit pas pour définir complètement un milieu; dans ces cas il est indispensable de donner des relations supplémentaires, par exemple, l'équation d'état comme une solution d'une équation déterminée aux dérivées partielles.

Détermination expérimentale des potentiels thermodynamiques. Les données expérimentales (calorimétriques et mécaniques) ou les données de la physique statistique recueillies en observant les modèles physiques correspondants par rapport auxquels on admet certaines hypothèses simples permettent de définir les potentiels thermodynamiques des fluides réels.

En particulier, on attache une grande importance à la mesure de la chaleur spécifique. La chaleur spécifique, comme on sait, est la quantité de chaleur nécessaire à élever la température de l'unité de masse d'un degré Celsius (si la température est mesurée en degrés Celsius).

La chaleur spécifique d'un milieu biparamétrique dépend essentiellement de la variation des deux paramètres variables. La chaleur spécifique n'est définie univoquement que si l'on donne complètement le processus accompagné d'augmentation de température.

Pour un milieu compressible une grande importance est attachée aux chaleurs spécifiques c_p et c_V qui sont l'une la chaleur spécifique à pression constante et l'autre, à volume constant. On a pour c_p et c_V les formules suivantes:

$$c_p = \left(\frac{dq}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p =$$
$$= \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \tag{6.11}$$

et

$$c_V = \left(\frac{dq}{dT}\right)_\rho = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho = \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho + \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho. \tag{6.12}$$

Il découle des formules (6.11) et (6.12) les expressions de la différence $c_p - c_V$

$$c_p - c_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T - \frac{p}{\rho^2}\right]\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p =$$
$$= -\left[\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T - \frac{1}{\rho}\right]\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho. \tag{6.13}$$

(6.13) et l'équation de chaleur reçue conduisent à une autre égalité

$$c_p - c_V = -\frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \tag{6.14}$$

qui, en vertu de l'égalité

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p,$$

découlant de la formule

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho dT + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T d\rho,$$

se ramène à la forme

$$c_p - c_V = \frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p^2. \tag{6.15}$$

Les égalités (6.13) à (6.15) sont valables pour des milieux biparamétriques quelconques. En se servant des résultats de la mesure des chaleurs spécifiques c_p et c_V, de ceux de la mesure des coefficients de variation thermique de densité à pression constante $(\partial\rho/\partial T)_p = k_\rho$ et des coefficients d'augmentation de pression à volume constant $(\partial p/\partial T)_\rho = k_p$ on peut définir les dérivées de l'éner-

gie interne et de l'enthalpie par les formules

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T &= \frac{c_p - c_V}{k_\rho} + \frac{p}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2}\left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho - p\right],\\ \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho &= c_V\end{aligned}\right\} \tag{6.16}$$

et

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p &= c_p,\\ \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T &= -\frac{c_p - c_V}{k_p} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho^2}\left[T\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p + \rho\right].\end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

On doit avoir en même temps, comme conséquence du premier et du second principes de la thermodynamique, les conditions d'intégrabilité suivantes :

$$-\frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_\rho = \left(\frac{\partial c_V}{\partial \rho}\right)_T \tag{6.18}$$

et

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{\rho}}{\partial T^2}\right)_p, \tag{6.19}$$

que l'on peut utiliser dans le but de réduire le nombre de mesures ou de vérifier les résultats de mesure.

Dans les paragraphes précédents de ce chapitre il a été établi qu'à tout système thermodynamique on peut toujours associer deux fonctions thermodynamiques d'état, à savoir l'énergie interne U et l'entropie s, et dans le cas de processus réversibles on peut ajouter encore une fonction d'état, la température absolue T. On a obtenu une nouvelle équation universelle, l'équation de chaleur reçue

$$dU = \frac{p^{ij}}{\rho}\nabla_j v_i\, dt + dq^{(e)} + dq^{**} \tag{6.20}$$

ou

$$dU = \frac{p^{ij}}{\rho} e_{ij}\, dt + dq^{(e)} + dq^{**} \quad \text{pour } p^{ij} = p^{ji}$$

et l'on a envisagé le second principe de la thermodynamique

$$T\, dS = dQ^{(e)} + dQ',$$
$$dQ' \geqslant 0,$$

ou (pour l'unité de masse)

$$T\, ds = dq^{(e)} + dq',$$
$$dq' = \frac{dQ'}{dm} \geqslant 0, \tag{6.21}$$

dont on a généralement besoin pour construire les modèles concrets de milieux continus.

Appliquons maintenant ces résultats à la construction des modèles concrets de milieux continus.

§ 7. Exemples de milieux parfaits et de milieux visqueux. Leurs propriétés thermodynamiques. Conductivité thermique

Pour pouvoir appliquer le système d'équations universel obtenu précédemment (composé d'équations de continuité, des impulsions, des moments cinétiques — dans le cas classique $p^{ij} = p^{ji}$, d'équations de la chaleur reçue et du second principe de la thermodynamique) aux problèmes particuliers sur le mouvement du milieu continu il faut lui adjoindre des relations définissant les propriétés du modèle concret du milieu.

Etudions maintenant certains modèles importants de milieux continus en tenant compte des propriétés thermodynamiques.

a) Modèle d'un fluide parfait incompressible

Il découle de la condition d'incompressibilité que pour chaque particule

$$\rho = \rho_0 = \text{const.}$$

Dans un fluide non homogène la densité ρ peut être considérée comme une fonction donnée des coordonnées lagrangiennes ξ^1, ξ^2, ξ^3; dans un fluide homogène la densité est la même pour toutes les particules.

Conformément à la définition donnée précédemment, un fluide est parfait si $p^{ij} = -pg^{ij}$.

Comme on sait, dans le cas d'un fluide parfait homogène incompressible le système de quatre équations scalaires comportant l'équation de continuité

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

et trois équations d'Euler

$$a_i = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i}$$

est un système complet qui permet de déterminer la pression $p\,(x^i, t)$ et le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}\,(x^i, t)$. Si le fluide parfait incompressible est non homogène, il faut ajouter à ces équations une cinquième

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

servant à déterminer la fonction $\rho\,(x^1, x^2, x^3, t)$ du point de vue d'Euler.

Le travail des forces internes de la pression dans un fluide parfait incompressible étant toujours nul, ce qu'on écrit comme

$$dA^{(i)} = -\frac{p^{ij}}{\rho} e_{ij}\, dt = \frac{p}{\rho} g^{ij} e_{ij}\, dt = \frac{p}{\rho} e^{i}_{\cdot i}\, dt = \frac{p}{\rho} \operatorname{div} v\, dt = 0,$$

l'équation de la chaleur reçue $dU = dq^{(e)}$ peut être envisagée comme l'équation permettant de déterminer la densité de l'énergie interne U ou la propagation de la chaleur dans un flux de fluide.

Entropie et énergie interne d'un fluide parfait incompressible. La définition du modèle d'un fluide parfait incompressible comprend également la supposition selon laquelle tous les processus mécaniques dans ce modèle sont réversibles et, donc,

$$dq^{(e)} = T\, ds, \quad dq' = 0. \tag{7.1}$$

L'équation de la chaleur reçue avec le concours de (7.1) fournit

$$dU = T\, ds.$$

Il s'ensuit que $U = \text{const}$, si $s = \text{const}$; c'est pourquoi U n'est fonction que de s, $U = U(s)$. Comme, d'autre part,

$$\frac{dU}{ds} = T,$$

il est évident que $T = T(s)$ ou $U = U(T)$ et $s = s(T)$.

La chaleur spécifique c d'un fluide incompressible peut s'écrire

$$c = \frac{dq^{(e)}}{dT} = \frac{dU}{dT} = c(T).$$

L'entropie et l'énergie interne d'un fluide parfait incompressible sont définies au moyen de la chaleur spécifique $c(T)$, donnée comme une fonction de la température, d'après les formules

$$U = \int c(T)\, dT, \quad s = \int \frac{c(T)\, dT}{T}. \tag{7.2}$$

Si $c = \text{const}$, on a

$$U = cT + \text{const}, \quad s = c \ln T + \text{const}.$$

L'équation de la chaleur reçue

$$\frac{dq^{(e)}}{dt} = c(T) \frac{dT}{dt} = c(T) \left[\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} \right] \tag{7.3}$$

peut servir à déterminer la distribution de la tempérmture.

Ainsi donc, du point de vue de la mécanique des milieux continus, un fluide parfait incompressible est complètement donné par la valeur de la densité et par la chaleur spécifique $c(T)$.

En outre, la résolution des problèmes concrets nécessite la donnée des forces massiques extérieures F, l'apport de chaleur $dq^{(e)}$ et quelques conditions complémentaires: initiales, aux limites ou d'autres, indispensables à choisir parmi les solutions du système

d'équations aux dérivées partielles celle qui résout le problème considéré.

Indépendance du problème mécanique du problème thermique et relation entre le problème thermique et le problème mécanique dans le cas du mouvement d'un fluide parfait incompressible. Notons en conclusion que la solution du problème mécanique sur le mouvement d'un fluide parfait incompressible, soumis à l'action des forces données, est indépendante de la solution du problème sur la distribution de la température dans le volume du fluide et n'exige pas la connaissance de l'énergie interne.

Au contraire, l'équation (7.3) pour la distribution de la température T, l'apport de chaleur étant connu, ne cesse d'être indéterminée que lorsqu'on connaît la distribution des vitesses $v(x^i, t)$, or, pour la connaître, il faut résoudre le problème mécanique.

On en conclut que s'il y a mouvement du milieu, la solution du problème thermique dépend de celle du problème mécanique.

b) Modèle d'un gaz parfait ou d'un fluide parfait compressible

Modèle d'un gaz parfait*). En premier lieu, définissons un gaz parfait comme un milieu où le tenseur des contraintes est sphérique

$$p^{ij} = -pg^{ij};$$

en second lieu, comme un milieu biparamétrique où l'énergie interne n'est fonction que de deux paramètres, par exemple, de ρ et s:

$$U = U(\rho, s),$$

et, en troisième lieu, comme un milieu dans lequel tous les processus mécaniques sont réversibles **) pour les mouvements *continus* et, donc,

$$dq' = 0.$$

Si $U(\rho, s)$ est donné, ces trois hypothèses fixent complètement le modèle d'un gaz parfait ou d'un fluide parfait compressible tant du point de vue thermodynamique que physique.

En effet, si les forces massiques F et l'apport de chaleur extérieur $dq^{(e)}$ sont donnés, deux équations (6.2), dites équations d'état,

---

*) Dans la présente traduction le terme gaz parfait est employé dans deux sens. L'un est défini aux pages 219—220 en présence et en l'absence de viscosité, l'autre correspond à un gaz mécanique parfait, de propriétés arbitraires, défini à la page 162. En russe, à ces deux sens correspondent deux termes différents. *Note du traducteur.*

**) Dans un gaz parfait, on étudie parfois des processus physico-chimiques irréversibles, les réactions chimiques par exemple. Dans ce cas dq', lié à l'irréversibilité de ces processus, peut être non nul.

le second principe de la thermodynamique

$$T\,ds = dq^{(e)}$$

ou l'équation de la chaleur reçue

$$dU = -p\,d\frac{1}{\rho} + dq^{(e)},$$

l'équation de continuité

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} v = 0$$

et trois équations d'Euler

$$a_i = F_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i}$$

représentent un système complet pour la détermination de sept fonctions inconnues: ρ, v_i, p, s et T.

Notons que les équations d'état (6.2) sont valables pour tous les processus. Au lieu de la fonction $U(\rho, s)$ on peut donner n'importe lequel des potentiels $F(\rho, T)$, $i(p, s)$, $\Psi(p, T)$.

Système complet d'équations du mouvement d'un gaz parfait dans un processus adiabatique. Si dans chaque élément d'un corps on a un processus réversible et adiabatique, alors $dq' = 0$ et $dq^{(e)} = 0$; par conséquent

$$s = f(\xi^1, \xi^2, \xi^3),$$

c'est-à-dire que l'entropie se conserve pour chaque particule de matière. La valeur de l'entropie dans les particules, tout comme celle de la densité d'un fluide incompressible non homogène, doit être donnée ou définie à partir des conditions complémentaires suggérées par la position du problème concret.

Si dans un processus adiabatique l'entropie s est la même pour toutes les particules, $s = \text{const}$, il découle des équations d'état (6.2) que la pression p et la température T ne dépendent que de ρ, c'est-à-dire que le processus est barotrope, et le système d'équations *mécaniques* devient complet si l'on connaît la fonction $U(\rho, s)$.

Système complet d'équations du mouvement d'un gaz parfait dans une transformation isotherme. Si les variations thermodynamiques indépendantes sont ρ et T, il est plus avantageux, pour définir un modèle d'un milieu continu, de donner l'énergie libre $F(\rho, T) = U - Ts$. Les équations d'états seront dans ce cas de la forme (6.5). Elles sont également valables pour toutes les transformations, mais cette forme est surtout commode pour l'étude des transformatinos isothermes.

En effet, lorsque $T(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ est donné ou $T = \text{const}$, les équations (6.5) fournissent immédiatement pour chaque particule p une fonction de ρ, p n'étant fonction que de ρ (et ne dépend pas des ξ^i) si grad $T = 0$. Le système d'équations *mécaniques* est alors fermé si l'on connaît la fonction $F(\rho, T)$.

Dans ce cas l'entropie est donnée par la première équation (6.5), tandis que l'équation de la chaleur reçue que l'on peut écrire sous la forme

$$dq^{(e)} = -Td\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_\rho \tag{7.4}$$

permet de calculer la quantité de chaleur extérieure nécessaire à maintenir la transformation isotherme.

Modèle d'un gaz thermodynamiquement parfait. L'exemple d'un modèle d'un fluide parfait compressible est fourni par le modèle d'un gaz parfait. Pour le gaz parfait la densité ρ, la pression p et la température absolue T sont reliées par l'équation de Clapeyron

$$p = \rho RT, \tag{7.5}$$

où R est la constante des gaz parfaits. En s'appuyant sur l'équation de Clapeyron et celle de la chaleur reçue, compte tenu du second principe de la thermodynamique, on a pour les processus réversibles dans les milieux parfaits (6.1)

$$dU = Td(s + R\ln\rho). \tag{7.6}$$

Par conséquent, pour les gaz satisfaisant à l'équation de Clapeyron, la combinaison $s + \int R\frac{d\rho}{\rho}$ ne dépend que de U et, comme $\frac{dU}{d(s+R)\ln\rho} = T$ n'est fonction que de U, il s'ensuit que l'énergie interne U et la somme $s + \int R\frac{d\rho}{\rho}$ ne peuvent dépendre que de la température et sont indépendantes de la densité. Il est évident que ce résultat reste valable également dans le cas où l'on a l'équation d'état dans la forme (7.5), mais dans laquelle, à la différence de l'équation de Clapeyron, R est une fonction arbitraire de la densité ρ.

Posant $dU = c_V(T)\,dT$, on tire de (7.6) que

$$s = \int \frac{c_V(T)\,dT}{T} - R\ln\rho. \tag{7.7}$$

Pour définir le modèle d'un gaz parfait il est nécessaire de donner la constante R dans l'équation de Clapeyron et l'énergie interne spécifique en fonction de la température T. Donner l'énergie interne spécifique équivaut, à une constante près, à donner la chaleur spécifique à volume constant en fonction de la température T. Puisque l'équation (7.5) et les résultats suivants ne dépendent pas de la

masse de la particule, il est aisé d'obtenir, en s'appuyant sur les définitions du paragraphe 6 concernant une particule homogène de masse m d'un gaz parfait à R = const, toutes les formules pour l'entropie et les potentiels thermodynamiques.

Ces formules sont

$$\left.\begin{aligned}
U_m &= m\left(U_0+\int_{T_0}^{T} c_V\,dT\right),\\
S &= m\left(s_0+\int_{T_0}^{T}\frac{c_p\,dT}{T}-R\ln\frac{p}{p_0}\right),\\
i_m &= m\left(i_0+\int_{T_0}^{T} c_p\,dT\right),\\
F_m &= m\left(U_0-Ts_0+\int_{T_0}^{T} c_V\,dT-T\int_{T_0}^{T}\frac{c_V}{T}\,dT-RT\ln\frac{\rho_0}{\rho}\right),\\
\Psi_m &= m\left(i_0-Ts_0+\int_{T_0}^{T} c_p\,dT-T\int_{T_0}^{T}\frac{c_p}{T}\,dT+RT\ln\frac{p}{p_0}\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(7.8)$$

Ici les chaleurs spécifiques $c_V(T)$ et $c_p(T)$ sont rapportées à l'unité de masse. Les constantes U_0, s_0, i_0 correspondent aux valeurs de U, s et i à température T_0, à la pression p_0 et à la densité ρ_0. Pour nombre de gaz les quantités U_0, s_0, i_0, c_p, c_V et R peuvent être considérées inversement proportionnelles à la masse molaire M.

Les formules (7.8) deviennent très simples dans un cas pratique important où l'on peut admettre que la chaleur spécifique c_V est constante, c'est-à-dire ne dépend pas de la température. Il découle alors de la relation de Mayer (4.5)

$$R = c_p - c_V$$

que la chaleur spécifique c_p est également constante. Dans le cas d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques c_V et c_p constantes la formule (7.8) fournit

$$\left.\begin{aligned}
&U_m = mc_VT+\text{const},\qquad i_m = mc_pT+\text{const},\\
&S = m\left(c_V\ln\frac{T\rho_0^{\gamma}}{T_0\rho^{\gamma}}+s_0\right) = m\left(c_V\ln\frac{p\rho_0^{\gamma}}{p_0\rho^{\gamma}}+s_0\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(7.9)$$

D'où

$$\left.\begin{aligned}
&p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} e^{\frac{s-s_0}{c_V}},\\
&\frac{U_m}{m} = U = c_VT_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} e^{\frac{s-s_0}{c_V}}+\text{const},
\end{aligned}\right\}\qquad(7.10)$$

$\gamma = c_p/c_V$ étant le coefficient de Poisson. La relation (7.10) entre s, ρ et p, ou une relation correspondante entre s, T et ρ, peut être interprétée dans toutes les transformations comme l'équation d'état analogue à l'équation de Clapeyron $p = \rho RT$. Il est évident que pour décrire complètement le modèle d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes il suffit de donner seule la fonction $U(\rho, s)$:

$$U = c_V T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} e^{\frac{s-s_0}{c_V}} + \text{const.} \tag{7.11}$$

L'équation d'état de Clapeyron n'est plus conforme à la réalité dans le cas des gaz fortement comprimés lorsque la densité est très grande. Cette équation est également incorrecte pour les états voisins du point de liquéfaction des gaz et pour les liquides. Notons également qu'aux températures très basses, proches du zéro absolu, l'équation de Clapeyron et les formules (7.8) cessent de suivre les principes généraux de la thermodynamique (le second principe, le théorème de Nernst et ses conséquences sur le comportement de la substance à l'approche du zéro absolu).

Gaz de Van der Waals. Etudions un gaz parfait vérifiant l'équation d'état de Van der Waals

$$p = \frac{\rho RT}{1 - b\rho} - a\rho^2, \tag{7.12}$$

où R, b et a sont des constantes physiques positives. L'équation (7.12) est une précision de l'équation de Clapeyron. Elle décrit les transformations au voisinage des points de liquéfaction des gaz ainsi que les liens réels dans certains intervalles de phase liquide. L'introduction du dénominateur $1 - b\rho = 1 - \frac{\rho}{\rho^*}$ dans l'équation (7.12) rend compte d'une brusque augmentation de la pression lorsque la densité ρ s'approche de la valeur ρ^* laquelle est choisie grande. Le terme complémentaire $-a\rho^2$ est également notable seulement si la densité ρ est grande. Ce terme rend compte des forces de répulsion entre les molécules, forces n'apparaissant que lorsque les molécules se rapprochent, donc lorsque la densité devient grande.

Il découle de l'équation d'état (7.12) et des formules (6.16) que

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_T = -a \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\rho = c_V(T). \tag{7.13}$$

En dérivant la première de ces égalités par rapport à T, on voit que la chaleur spécifique c_V pour le milieu de Van der Waals ne dépend que de la température. La fonction $c_V(T)$ est définie par les propriétés du milieu. En créant le modèle d'un milieu on doit, outre l'équation d'état (7.12), donner la forme de cette fonction.

D'après (7.13), l'énergie interne du gaz de Van der Waals s'écrit ainsi

$$U=\int_{T_0}^{T} c_V(T)\,dT-a\rho+\text{const}=\Phi\left[\frac{1}{\rho}(\rho+a\rho^2)(1-b\rho)\right]-a\rho. \quad (7.14)$$

La fonction $\Phi(T)$ se définit de la manière évidente au moyen de la fonction $c_V(T)$.

L'équation de la chaleur reçue (6.1) tenant compte du second principe de la thermodynamique pour les transformations réversibles d'un milieu parfait et l'équation d'état (7.12) conduisent aisément à la formule de la différentielle de l'entropie du milieu de Van der Waals

$$ds=\frac{dU}{T}+\frac{p}{T}d\frac{1}{\rho}=\frac{c_V(T)\,dT}{T}+\frac{R\,d\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\rho}-b}.$$

D'où

$$s=\int_{T_0}^{T}\frac{c_V(T)\,dT}{T}+R\ln\frac{1-b\rho}{\rho}+\text{const}. \quad (7.15)$$

Les expressions des potentiels thermodynamiques F, i et Ψ d'un gaz de Van der Waals découlent directement des définitions (6.4), (6.7), (6.9) de ceux-ci, des formules de l'entropie (7.15), (7.14) ainsi que de l'équation d'état (7.12) d'un gaz de Van der Waals.

Milieu où la pression ne dépend que de la densité. Considérons un autre cas général d'un milieu biparamétrique dont l'énergie interne s'exprime par la formule

$$U=f(\rho)+\varphi(s). \quad (7.16)$$

Les équations d'état (6.2) donnent dans ce cas

$$T=\varphi'(s) \text{ et } p=\rho^2 f'(\rho). \quad (7.17)$$

Par conséquent, quelles que soient les transformations, la pression ne dépend que de la densité et la température que de l'entropie. Pour un tel milieu l'équation le la chaleur reçue est pleinement substituée par les liaisons finies (7.17).

Il est évident que les formules (7.16) et (7.17) conduisent également aux expressions

$$\left.\begin{aligned} i&=f_1(p)+\varphi(s),\\ F&=f(\rho)+\omega(T),\\ \Psi&=f_1(p)+\omega(T).\end{aligned}\right\} \quad (7.18)$$

On voit sans peine que si l'une des formules (7.18) est vérifiée, toutes les autres formules (7.18) ainsi que (7.16) le sont aussi.

Il est également clair que si, pour les particules d'un certain milieu, dans toutes les transformations réversibles possibles la pression p ne dépend que de la densité ρ, il s'ensuit que la température ne dépend que de l'entropie et les potentiels thermodynamiques doivent s'exprimer par les formules (7.16) et (7.18).

c) Modèle d'un fluide visqueux

Définition du modèle d'un fluide visqueux. On appelle fluide visqueux (voir ch. IV) un milieu où les composantes du tenseur des contraintes et celles du tenseur des taux de déformation sont liées par les relations de la forme

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij}(e_{\alpha\beta}), \tag{7.19}$$

où τ^{ij} sont les contraintes visqueuses et $2e_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha$.

Si τ^{ij} est une fonction linéaire de $e_{\alpha\beta}$ et le fluide est isotrope, on a

$$\tau_{ij} = \lambda g_{ij} \operatorname{div} v + 2\mu e_{ij}. \tag{7.20}$$

Ainsi donc, pour un fluide isotrope linéaire visqueux on a

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda g^{ij} \operatorname{div} v + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}. \tag{7.21}$$

A la place du coefficient λ on peut introduire le deuxième coefficient de viscosité ζ

$$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \tag{7.22}$$

Les coefficients ζ, λ et μ diffèrent selon les milieux et peuvent être soit des fonctions de la température, soit des constantes physiques du milieu considéré. Dans certaines applications on a à envisager également les milieux pour lesquels λ et μ représentent certaines fonctions des invariants scalaires du tenseur e_{ij}, de la température T et d'autres variables thermodynamiques. Pour des raisons de la simplicité on supposera constants les coefficients ζ et μ dans un exemple pratique très important d'un milieu visqueux qu'on étudiera dans ce qui suit.

Pour définir un modèle d'un fluide visqueux il faut encore donner l'énergie interne comme une fonction de ρ et s par exemple

$$U = U(\rho, s),$$

ainsi que la quantité dq', puisque le mouvement d'un fluide visqueux est, en général, une transformation irréversible ($dq' \neq 0$).

On sait déjà que les équations du mouvement d'un fluide visqueux linéaire à coefficients de viscosité constants, équations de

Navier-Stokes, ont la forme

$$\frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div} v + \nu\Delta v, \qquad (7.23)$$

où $\nu = \mu/\rho$ est le coefficient cinématique de viscosité.

L'équation de la chaleur reçue peut être écrite, compte tenu du second principe de la thermodynamique, sous la forme

$$dU = -\frac{dA^{(1)}}{dm} + T\,ds - dq'. \qquad (7.24)$$

Travail des forces internes dans un fluide visqueux. Calculons le travail élémentaire des contraintes internes rapporté à l'unité de masse d'un fluide visqueux. En portant p^{ij} donné par (7.19) dans l'expression générale du travail des forces surfaciques internes on obtient

$$\frac{dA^{(1)}}{dm} = -\frac{p^{ij}}{\rho} e_{ij}\,dt = \frac{p}{\rho} g^{ij} e_{ij}\,dt - \frac{\tau^{ij}}{\rho} e_{ij}\,dt =$$

$$= \frac{p}{\rho}\operatorname{div} v\,dt - \frac{\tau^{ij} e_{ij}}{\rho}\,dt. \qquad (7.25)$$

En vertu de l'équation de continuité $\operatorname{div} v = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$ il vient

$$\frac{1}{dm} dA^{(1)} = p\,d\frac{1}{\rho} - \frac{\tau^{ij} e_{ij}}{\rho}\,dt. \qquad (7.26)$$

Pression et température dans un fluide visqueux. Les relations (7.24) et (7.26) fournissent

$$dU = -p\,d\frac{1}{\rho} + \frac{\tau^{ij} e_{ij}}{\rho}\,dt + T\,ds - dq'. \qquad (7.27)$$

Admettons par définition que pour un fluide visqueux compressible ainsi que pour un fluide parfait compressible la pression p et la température T dans toutes les transformations se déterminent de l'expression *)

$$dU = -p\,d\frac{1}{\rho} + T\,ds, \qquad (7.28)$$

c'est-à-dire qu'ont lieu les formules

$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial\, 1/\rho}\right)_s, \quad T = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho. \qquad (6.2)$$

On peut justifier cette hypothèse et donc le modèle introduit en rappelant que les paramètres p et T d'un fluide visqueux au repos, lorsque $e_{ij} = 0$, doivent coïncider avec les paramètres correspon-

*) Cette hypothèse essentielle, appelée formule de Gibbs, permet d'établir immédiatement la formule pour la chaleur non compensée dq'.

dants d'un fluide parfait au repos. Il en est de même du cas où le fluide se meut comme un solide. Les contraintes visqueuses n'apparaissent que lorsque le mouvement est accompagné de déformations.

Expression de la chaleur non compensée dans un fluide visqueux. Dans le modèle introduit du fluide visqueux les relations entre la température, l'entropie et l'énergie interne sont indépendantes des propriétés de viscosité. En comparant les équations (7.27) et (7.28) on obtient l'expression pour la chaleur non compensée valable dans le cas d'un fluide visqueux linéaire

$$dq' = \frac{\tau^{ij} e_{ij}}{\rho} dt. \tag{7.29}$$

Dissipation de l'énergie mécanique dans un fluide visqueux. Montrons que la présence du terme dq' témoigne de la dissipation de l'énergie mécanique lors du mouvement d'un fluide visqueux. En effet, le théorème des forces vives appliqué au fluide visqueux peut s'écrire ainsi

$$d\frac{v^2}{2} = \frac{dA^{(e)}}{dm} + pd\frac{1}{\rho} - \frac{\tau^{ij} e_{ij}}{\rho} dt.$$

La quantité $-(1/\rho)\,\tau^{ij} e_{ij} dt = -dq'$, représentant le travail des forces des contraintes visqueuses rapporté à l'unité de masse, est toujours négative (ou nulle, si $e_{ij} = 0$), puisque $dq' \geqslant 0$. Il s'ensuit alors que le travail des forces des contraintes visqueuses ne fait que diminuer l'énergie cinétique du fluide.

Le coefficient de viscosité est positif. Si un fluide visqueux est linéaire et isotrope, en substituant la loi de Navier-Stokes (7.20) dans l'expression pour la chaleur non compensée (7.29) on obtient

$$dq' = \frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} dt = \frac{dt}{\rho} \left[\left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) (e^{i}_{\cdot i})^2 + 2\mu e^{ij} e_{ij} \right] =$$
$$= \frac{dt}{\rho} \left[\zeta I_1^2 + 2\mu \left(I_2 - \frac{I_1^2}{3} \right) \right], \tag{7.30}$$

où I_1 et I_2 sont le premier et le second invariants du tenseur des taux de déformation ayant pour expressions $I_1 = g^{ij} e_{ij}$, $I_2 = e^{ij} e_{ij}$. Il est aisé de vérifier que dans les axes principaux du tenseur des taux de déformation l'expression

$$I_2 - \frac{I_1^2}{3}$$

peut être représentée comme une somme de carrés, à savoir

$$I_2 - \frac{I_1^2}{3} = \left(e_1 - \frac{I_1}{3} \right)^2 + \left(e_2 - \frac{I_1}{3} \right)^2 + \left(e_3 - \frac{I_1}{3} \right)^2 \geqslant 0.$$

Il en découle directement que pour les mouvements quelconques dans un système de coordonnées arbitraire $I_2 - I_1^2/3 \geqslant 0$. La formule (7.30) étant valable pour tous mouvements et ζ et μ ne dépendant pas, par définition, de e_{ij}, il découle du second principe de la thermodynamique ($dq' \geqslant 0$) que $\zeta > 0$ et $\mu > 0$.

En effet, si le mouvement d'un fluide est tel que le volume de chaque particule ne varie pas, alors $I_1 = 0$ et $dq' = 2\mu I_2 dt/\rho \geqslant 0$. Or, on a toujours $I_2 \geqslant 0$, d'où l'on tire que $\mu > 0$. Pour une compression ou dilatation omnilatérale d'une particule, c'est-à-dire lorsque $e_{ij} = eg_{ij}$, on a

$$I_2 - I_1^2/3 = 0, \quad dq' = \zeta I_1^2\, dt/\rho > 0,$$

et par conséquent $\zeta > 0$.

Envisageons maintenant le problème de la transmission de la chaleur à un volume d'un milieu continu.

Vecteur courant de chaleur. La chaleur peut être transmise à un milieu moyennant divers mécanismes : conduction thermique, rayonnement, courant électrique, réactions chimiques, etc.

Examinons la conduction thermique, le phénomène de transmission de la chaleur par suite d'une distribution non uniforme de la température dans un corps. Dans ce cas un volume isolé quelconque de milieu $\Delta\tau$ ne reçoit de la chaleur qu'à travers la surface Σ limitant ce volume. Ainsi donc on a

$$dQ^{(e)} = \int_{\Sigma} Q\, d\sigma,$$

où Q est une certaine fonction des points de la surface Σ limitant le volume $\Delta\tau$. Il découle de l'équation de la chaleur reçue que, lorsque Σ tend vers un point, la quantité $dQ^{(e)}$ est de l'ordre de $\Delta\tau\, dt$, c'est-à-dire que $dQ^{(e)} = dq^{(e)} \rho\, \Delta\tau$, $dq^{(e)}$ étant infiniment petit de l'ordre de dt.

Il s'ensuit *) que l'intégrale de surface $\int_{\Sigma} Q\, d\sigma$ doit se ramener à l'intégrale de volume, autrement dit, sur la surface Σ la quantité Q doit avoir pour expression

$$Q = -(q^1 n_1 + q^2 n_2 + q^3 n_3)\, dt,$$

où n_i sont les composantes covariantes du vecteur unitaire de la normale extérieure à Σ. Q étant scalaire, les quantités finies $q^i(x^1, x^2, x^3, t)$ seraient les composantes contravariantes du vecteur $\boldsymbol{q}$ défini dans tous les points du milieu. Le vecteur $\boldsymbol{q}$ est appelé vecteur

*) Ce résultat s'obtient de la même façon que la formule pour p_n (2.4), ch. III.

courant de chaleur; il définit la direction et le sens de la transmission de la chaleur, sa valeur étant égale à la quantité de chaleur traversant en unité de temps une unité de surface perpendiculaire à cette direction. La quantité de chaleur traversant en temps dt un élément de surface $d\sigma$ orienté arbitrairement est évidemment égale à $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma\, dt$ ($\boldsymbol{n}$ est la normale à $d\sigma$) et le flux total de chaleur $dQ^{(e)}$ transmise au volume V peut être présenté sous la forme (fig. 35):

$$dQ^{(e)} = -\int_{\Sigma} \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\, d\sigma\, dt,$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale extérieure à la surface Σ. D'après le théorème de Gauss-Ostrogradsky

$$dQ^{(e)} = -\int_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{q}\, d\tau\, dt.$$

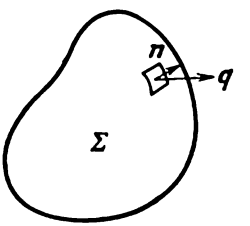


Fig. 35. Vecteur courant de chaleur $\boldsymbol{q}$ ($\boldsymbol{n}$ est un vecteur unitaire de la normale extérieure à Σ)

La quantité de chaleur transmise au bout du temps dt à un volume infinitésimal $d\tau$ est égale à $dQ^{(e)} = -\operatorname{div} \boldsymbol{q}\, d\tau\, dt$, et celle transférée à l'unité de masse du milieu est

$$dq^{(e)} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \boldsymbol{q}\, dt. \tag{7.31}$$

Loi de la conduction de Fourier. On peut avoir différentes lois définissant le vecteur $\boldsymbol{q}$.

La loi fondamentale et la plus répandue, qui se montre efficace dans nombre de cas pratiques, est la loi de la conduction de Fourier traduite par la formule $\boldsymbol{q} = -\varkappa \operatorname{grad} T$.

Etant donné que le vecteur courant de chaleur est de sens opposé à celui du gradient de la température, on a $\varkappa > 0$. Le coefficient $\varkappa$ est dit coefficient de conduction thermique. Il est des cas particuliers importants où le coefficient $\varkappa$ est constant ou dépend de la température T.

Expression de l'apport de chaleur dans le cas où la conduction thermique suit la loi de Fourier. Analysons un cas simple, très important, lorsque $\varkappa = \text{const}$. L'apport de chaleur $dq^{(c)}$ par unité de masse du milieu s'écrit dans ce cas

$$\frac{dq^{(c)}}{dt} = \frac{\varkappa}{\rho} \operatorname{div} \operatorname{grad} T = \frac{\varkappa}{\rho} \nabla_i g^{ij} \nabla_j T = \frac{\varkappa}{\rho} \nabla_i \nabla^i T,$$

ou

$$\frac{dq^{(c)}}{dt} = \frac{\varkappa}{\rho} \nabla^2 T = \frac{\varkappa}{\rho} \Delta T,$$

où ΔT est le laplacien de la température.

Dans un système d'axes cartésiens

$$\frac{dq^{(e)}}{dt} = \frac{\varkappa}{\rho}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Equation de la chaleur reçue pour un fluide visqueux, conducteur thermique. Ainsi, lorsque la chaleur est transmise à un fluide visqueux par conduction suivant la loi de Fourier, l'équation de la chaleur reçue est de la forme

$$\frac{dU}{dt} = -p\frac{d\,1/\rho}{dt} + \frac{1}{\rho}\tau^{ij}e_{ij} + \frac{\varkappa}{\rho}\Delta T \qquad (7.32)$$

ou encore, en vertu de (7.28),

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho}\tau^{ij}e_{ij} + \frac{\varkappa}{\rho}\Delta T.$$

Pour un fluide satisfaisant à la loi de Navier-Stokes cette équation peut être écrite, compte tenu de (7.30), de la façon suivante:

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{\zeta}{\rho}(\operatorname{div} v)^2 + \frac{2\mu}{\rho}\left[e^{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}(\operatorname{div} v)^2\right] + \frac{\varkappa}{\rho}\Delta T. \qquad (7.33)$$

Cette équation peut servir à déterminer la distribution de la température dans un fluide. L'énergie interne U ou l'entropie s doivent être données en fonction de la température et de la densité. Par exemple, si

$$U = \int c_V dT + \text{const},$$

alors dans les axes cartésiens on a

$$\frac{dU}{dt} = c_V\frac{dT}{dt} = c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right),$$

et l'équation de la chaleur reçue (7.32) coïncide, dans le cas d'un milieu au repos, avec l'équation habituelle de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{\rho c_V}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Système complet d'équations du mouvement d'un fluide visqueux. Si les forces extérieures sont données, alors les équations de Navier-Stokes, l'équation de continuité, l'équation de la chaleur reçue (7.33) ensemble avec les équations d'état représentent un système complet d'équations décrivant le mouvement d'un fluide visqueux compressible (linéaire, isotrope), conducteur thermique.

L'exemple d'un modèle d'un fluide visqueux compressible est fourni par celui d'un gaz parfait visqueux, conducteur thermique, dans lequel

$$U = c_V T + \text{const}, \quad p = \rho RT.$$

Nous avons envisagé d'une façon détaillée plusieurs modèles importants de fluides. On pense s'arrêter par la suite, d'une façon aussi détaillée, sur certains modèles les plus importants des corps solides déformables et, en particulier, sur les modèles des corps élastiques.

§ 8. Premier et second principes de la thermodynamique appliqués aux volumes finis d'un milieu continu. Taux de production d'entropie dans certains processus irréversibles

Premier et second principes de la thermodynamique appliqués aux volumes finis d'un milieu continu. Ecrivons maintenant dans leur forme intégrale les expressions du premier et du second principes de la thermodynamique appliqués aux masses finies d'un milieu. Pour simplifier on se bornera à supposer que l'énergie interne et l'entropie des masses des particules sont additives dans un volume fini d'un corps. En s'appuyant sur la théorie développée plus haut présentons ces équations sous la forme suivante:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{v^2}{2}+U\right)d\tau=$$

$$=\int_V \rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,d\tau+\int_\Sigma \boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{v}\,d\sigma-\int_\Sigma q_n^*\,d\sigma+\int_V \frac{dq^*_{\text{mass}}}{dt}\rho\,d\tau \qquad (8.1)$$

et

$$\frac{dS}{dt}=\frac{d}{dt}\int_V s\rho\,d\tau=\int_V \frac{1}{T}\left(\frac{dq^{(e)}}{dt}+\frac{dq'}{dt}\right)\rho\,d\tau. \qquad (8.2)$$

Dans ces égalités V est un volume fini individuel mobile; parmi les flux d'énergie extérieure figure le flux défini par le vecteur $\boldsymbol{q}^*$ et traversant la surface Σ limitant le volume V.

L'astérisque affectant le vecteur $\boldsymbol{q}^*$ signifie qu'il s'agit du courant total spécifique d'énergie (calorifique ou autre) non liée au travail des forces mécaniques. Le terme complémentaire dans (8.1) contenant dq^*_{mass}/dt définit le flux d'énergie massique extérieure; ce peut être par exemple la chaleur Joule, le travail des couples massiques extérieurs, etc. Les autres notations sont explicitées par le texte précédent.

Conduction en tant que transformation irréversible. Envisageons la conduction dans un corps immobile. Admettons, ainsi que nous l'avons fait dans l'exemple particulier traité plus haut (v. § 5 de ce chapitre), que $dq'=0$; on a alors

$$T\,ds=dq^{(e)}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{q}\,dt. \qquad (8.3)$$

Cette relation est vérifiée, par exemple, dans un fluide visqueux, immobile, conducteur thermique.

En appliquant la formule de Gauss-Ostrogradsky à l'équation (8.2) on obtient dans ce cas

$$\frac{dS}{dt} = -\int_V \frac{1}{T} \operatorname{div} \boldsymbol{q}\, d\tau = -\int_\Sigma \frac{q_n}{T} d\sigma + \int_V \left(\boldsymbol{q} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{T}\right) d\tau. \quad (8.4)$$

Cette égalité conjointement avec la condition (8.3) est valable pour tout échange de chaleur de la partie donnée du système avec les corps extérieurs.

Conformément à (8.4) l'accroissement ou le décroissement de l'entropie sont définis par l'intégrale $-\int_\Sigma \frac{q_n}{T} d\sigma$ pour $q_n \neq 0$. Si le corps est thermiquement isolé, cela veut dire que sur sa surface $q_n = 0$, mais à l'intérieur le vecteur $\boldsymbol{q}$ peut être non nul à cause d'une distribution non uniforme de la température.

Ainsi donc, pour un corps thermiquement isolé on a

$$\frac{dS}{dt} = -\int_V \frac{\boldsymbol{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2} d\tau. \quad (8.5)$$

La quantité $\frac{dS}{dt}$ étant toujours supérieure à zéro, car l'entropie croît par suite de la conduction thermique, le produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{q}$ et grad T est toujours négatif selon le second principe de la thermodynamique.

D'après la loi de Fourier $\boldsymbol{q} = -\varkappa \operatorname{grad} T$, $\varkappa > 0$. Si la loi de Fourier est valable, l'égalité (8.5) prend la forme

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{\varkappa}{T^2} |\operatorname{grad} T|^2 d\tau. \quad (8.6)$$

Ainsi donc, à condition d'avoir $T\, ds = dq^{(c)}$, $dq' = 0$ on obtient l'accroissement de l'entropie du corps même en l'absence d'apport de chaleur extérieure vers le corps considéré comme un tout. Le raisonnement présenté est une généralisation de l'exemple examiné au § 5 de ce chapitre.

Il découle de l'analyse précédente que la condition $dq' = 0$ n'est pas une condition suffisante de réversibilité des transformations.

Critères d'irréversibilité. Essayons d'obtenir un critère suffisant de réversibilité des transformations. Pour cela posons

$$dS = d_e S + d_i S, \quad (8.7)$$

où dS est la différentielle de l'entropie, $d_e S$ et $d_i S$ les termes infinitésimaux, $d_e S$ désignant l'accroissement de l'entropie dû à l'apport d'entropie extérieur provenant de l'échange de l'énergie avec

les corps extérieurs. La quantité d_iS est, par définition, essentiellement positive lorsqu'il y a irréversibilité; elle contribue à l'accroissement de l'entropie pendant les transformations irréversibles internes. Pour les transformations réversibles d_eS peut avoir un signe quelconque, tandis que $d_iS = 0$. Dans l'exemple précédent on a eu pour un corps pris dans son ensemble

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d_eS}{dt} + \frac{d_iS}{dt} = -\int_\Sigma \frac{q_n}{T}\,d\sigma - \int_V \frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad} T}{T^2}\,d\tau.$$

Conformément aux définitions introduites plus haut il faut poser

$$\frac{d_eS}{dt} = -\int_\Sigma \frac{q_n}{T}\,d\sigma = -\int_V \operatorname{div}\frac{\boldsymbol{q}}{T}\,d\tau, \qquad \frac{d_iS}{dt} = -\int_V \frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad} T}{T^2}\,d\tau.$$

D'où l'on tire pour la densité de l'entropie

$$d_es = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{q}}{T}\,dt, \qquad d_is = -\frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad} T}{\rho T^2}\,dt. \tag{8.8}$$

Il découle de (8.8) qu'en général $T\,d_is \neq dq'$. Parfois, l'égalité $T\,d_is = dq'$ peut avoir lieu, par exemple, dans certains cas où les gradients de la température sont nuls.

Formules de taux de production d'entropie. Il est d'usage de définir les quantités d_es et d_is par les formules suivantes:

$$\frac{d_es}{dt} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\boldsymbol{S}, \qquad \rho\frac{d_is}{dt} = \sigma = \sum_\alpha X_\alpha\chi^\alpha \geqslant 0, \tag{8.9}$$

où $\boldsymbol{S}$ est le vecteur courant d'entropie, σ évalue l'irréversibilité de l'accroissement de l'entropie par suite des transformations internes, les χ^α s'appellent courants généralisés et les X_α « forces » thermodynamiques généralisées. Dans le cas de la conduction thermique on a

$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{q}}{T}, \qquad \chi^\alpha = q^\alpha, \qquad X_\alpha = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^\alpha}.$$

Dans les théories existantes des transformations irréversibles le problème fondamental consiste à établir les formules du type (8.9). Dans de nombreux cas l'on suppose l'existence de liens entre les courants χ^α et les « forces » X_α. Pour dégager ces liens on s'appuie sur divers principes. Dans le cas du mouvement d'un fluide visqueux, conducteur thermique, la formule (8.9) pour d_is/dt prend la forme

$$\frac{d_is}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\tau^{ij}e_{ij}}{T} - \frac{\boldsymbol{q}}{\rho}\cdot\frac{\operatorname{grad} T}{T^2} = \frac{dq'}{T} - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\operatorname{grad} T}{\rho T^2}.$$

Ici les relations fonctionnelles entre τ^{ij} et e_{ij}, d'une part, et $\boldsymbol{q}$ et grad T, d'autre part, définissent respectivement les propriétés de viscosité et de conductivité thermique du milieu.

Les lois de Navier-Stokes et de Fourier fournissent un exemple particulier de liens entre les courants généralisés et les « forces » thermodynamiques.

Fonction des dissipations. S'il y a une relation entre χ^α et X_β *), la grandeur σ peut être considérée comme une fonction de χ^α ou de X_β, c'est-à-dire que

$$\sum X_\alpha \chi^\alpha = \sigma(X_\beta) = \sigma(\chi^\alpha). \tag{8.10}$$

La fonction σ s'appelle fonction des dissipations. Dans certaines théories des transformations irréversibles les principes auxiliaires servent à justifier les formules suivantes (qui ne découlent pas immédiatement de (8.10)):

$$X_\alpha = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial \chi^\alpha} \quad \text{et} \quad \chi^\alpha = m \frac{\partial \sigma}{\partial X_\alpha}, \tag{8.11}$$

où λ et m sont des fonctions scalaires s'exprimant, en vertu de (8.10), par les formules

$$\lambda = \frac{\sigma}{\chi^\alpha \dfrac{\partial \sigma}{\partial \chi^\alpha}} \quad \text{et} \quad m = \frac{\sigma}{X_\alpha \dfrac{\partial \sigma}{\partial X_\alpha}}. \tag{8.12}$$

Il découle de (8.11) et de l'égalité

$$d\sigma = \chi^\alpha dX_\alpha + X_\alpha d\chi^\alpha \quad \text{pour} \quad d\sigma \neq 0 \tag{8.13}$$

que $\lambda + m = 1$.

En se référant à (8.13) il est facile de voir que l'une des égalités (8.11) entraîne l'autre si toutes les différentielles dX_α et, respectivement, les différentielles $d\chi^\alpha$ sont linéairement indépendantes dans certains intervalles de valeurs des variables X_α ou χ^α. Cette proposition peut devenir incorrecte, en particulier, pour les liaisons de la forme

$$f_\omega(X_\beta) = 0, \ \omega \geqslant 1, \quad \text{ou} \quad \varphi_\varkappa(\chi^\beta) = 0, \ \varkappa \geqslant 1.$$

Dans le cas général, s'il est connu que la fonction σ dépend de χ^α, on peut écrire au lieu de la première égalité (8.11), lorsque $\chi^\alpha \partial\sigma/\partial\chi^\alpha \neq 0$,

$$X_\alpha = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial \chi^\alpha} + \Omega_\alpha, \tag{8.14}$$

dans le même temps (8.10) et (8.12) fournissent

$$\Omega_\alpha \chi^\alpha = 0. \tag{8.15}$$

La quantité Ω_α peut être considérée comme une partie de la « force » X_α n'engendrant pas la dissipation. L'égalité (8.15) sera une iden-

*) L'existence de liaisons finies entre χ^α et X_β n'est pas obligatoire pour tous les modèles du milieu continu.

tité si

$$\Omega_\alpha = k_{\alpha\beta}\chi^\beta,$$

où $\| k_{\alpha\beta} \|$ est une matrice antisymétrique arbitraire ($k_{\alpha\beta} = -k_{\beta\alpha}$).

S'il y a des liaisons entre les χ^β, on peut introduire dans la définition des modèles les quantités Ω_α non nulles, satisfaisant aux égalités (8.15), en vertu des seules équations des liaisons $\varphi_\varkappa(\chi^\beta) = 0$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, s \geqslant 1$.

Si la fonction des dissipations est homogène par rapport à ses arguments, alors en vertu du théorème d'Euler sur les fonctions homogènes λ et m sont constants. Si la fonction des dissipations est une forme quadratique de ses arguments, on a

$$\lambda = m = \frac{1}{2}.$$

Dans ce cas les relations (8.11) représentent des liaisons linéaires entre les « forces » X_α et les courants χ^α. Lorsque σ est une forme quadratique en χ^α, il vient des formules (8.11) que la matrice des coefficients de ces liaisons linéaires est symétrique.

La théorie d'Onsager. Dans le cas de certains modèles, une théorie fondée sur l'hypothèse consistant en ce que la fonction des dissipations est une forme quadratique de ses arguments et que les relations (8.11) sont justes constitue la théorie d'Onsager. Les lois de Fourier et de Navier-Stokes en sont les cas particuliers.

Dans ce cas on obtient en vertu des lois de Fourier et de Navier-Stokes cette expression de la fonction des dissipations

$$\sigma = \varkappa \frac{|\operatorname{grad} T|^2}{T^2} + \left(\zeta (e_i^i)^2 + 2\mu \left[e^{ij} e_{ij} - \frac{1}{3}(e_i^i)^2\right]\right) \frac{1}{T}. \qquad (8.16)$$

Il découle de ce qui précède que la fonction σ est positive grâce aux conditions $\varkappa > 0$, $\zeta > 0$, $\mu > 0$.

Dans le second volume du présent ouvrage on montrera que dans la théorie de la plasticité parfaite on peut introduire la relation (8.9), où la fonction σ est une fonction homogène linéaire en χ^α. Dans ce cas $\lambda = 1$, la formule $X_\alpha = \partial\sigma/\partial\chi^\alpha$ peut rester valable mais les grandeurs X_α sont liées par des relations du type $f_\omega(X_\beta) = 0$, $\omega \geqslant 1$, et les formules correspondantes pour $\chi^\alpha(X_\beta)$ diffèrent de (8.11).

§ 9. Introduction à la théorie des modèles des mélanges de fluides compte tenu des réactions chimiques et de la diffusion des composantes

Position du problème sur le mouvement du mélange dans son ensemble. Dans nombre de phénomènes importants on a souvent à considérer les mouvements de mélanges de divers fluides, ou de fluides avec des particules solides, ou bien de liquides, mouvements accom-

pagnés de transformations de phase, chimiques ou autres et du phénomène de diffusion et représentant des mouvements internes relatifs des constituants du mélange. Ces transformations peuvent être parfois supposées réversibles, mais dans le cas général il faut tenir compte de l'irréversibilité et de diverses interactions de forces et d'échanges énergétiques. La description de phénomènes correspondants se fait à l'aide de modèles appropriés applicables à certaines classes de mélanges et de mouvements subissant des transformations physico-chimiques déterminées.

Dans ce qui suit nous adoptons, comme point de départ dans la construction de modèles concrets, la position du problème sur le milieu continu à constituants multiples *) donnée au § 1, chap. III. En poursuivant, considérons dans un volume infinitésimal ΔV les masses des composantes $m_i = \rho_i \Delta V$ et les vecteurs de flux de diffusion $I_i = \rho_i (v_i - v)$ pour N composantes différentes d'un mélange définies physiquement ou chimiquement comme des substances distinctes susceptibles, en général, de réagir entre elles et occupant simultanément le même volume ΔV.

Caractéristiques des particules macroscopiques du mélange. Le plus souvent, pour décrire les interactions des composantes d'un mélange, il faut définir et relever les paramètres des composantes ou du mélange dans son ensemble caractérisant les propriétés mécaniques, physiques ou chimiques dont on a besoin pour décrire et formuler les régularités essentielles dans le cadre des hypothèses et exigences imposées par le problème à résoudre. Par exemple, on peut introduire, en tant que paramètres de définition qu'on trouvera au cours de la résolution du problème, l'entropie s rapportée à l'unité de masse du mélange, la densité du mélange ρ, la densité des constituants $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$. Lorsque entre les particules des constituants différents du mélange il n'y a pas d'équilibre thermodynamique, tandis qu'à l'intérieur de chaque constituant il y a équilibre, il est possible de prendre comme caractéristiques d'état les températures absolues des constituants $T_1, T_2, \ldots, T_N$ **). On peut considérer au même titre diverses caractéristiques géométriques et cinématiques introduites et étudiées plus haut de la déformation subie par une particule; les vecteurs du flux de diffusion I_i traduisant la diffusion des composantes. Dans certains cas se trouvent

*) Dans certains cas les conséquences particulières de la théorie qui suit sont également applicables lorsque les constituants du mélange occupent des volumes adjacents.

**) C'est une hypothèse bien forte que d'admettre l'équilibre thermique dans les particules de chaque constituant en l'absence d'égalité des températures des particules des constituants différents occupant un même volume. La validité de cette hypothèse pour un phénomène considéré doit être appuyée par des raisonnements physiques supplémentaires.

être essentielles les valeurs des charges des atomes et molécules des composantes en présence d'une ionisation, les caractéristiques électromagnétiques ou les énergies des molécules ou atomes excités, etc. Souvent, pour formuler les lois d'interaction, de transfert d'énergie et les équations cinétiques, il est indispensable de prendre en considération non seulement les valeurs des paramètres mentionnés mais aussi leurs gradients, c'est-à-dire leurs dérivées, généralement d'ordre différent, par rapport aux coordonnées et au temps.

On a recours aux modèles de mélange dans les recherches portant sur l'évolution du plasma représentant un mélange d'ions, d'électrons et de particules neutres. Une grande importance y est attachée aux interactions électromagnétiques macroscopiques entre les constituants d'un élément de plasma, ainsi qu'au comportement de cet élément, considéré comme représentant le mélange dans son ensemble, dans les champs électromagnétiques extérieurs.

Un mélange macroscopique peut être envisagé comme un milieu uni aux propriétés complexes caractérisées par un ensemble de paramètres internes tels que, en premier lieu, les valeurs des densités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$ des constituants du mélange. Pour établir le modèle d'un mélange il faut ajouter aux équations universelles mécaniques et thermodynamiques précédemment introduites les équations complémentaires, énoncés des lois régissant les caractéristiques internes d'état et, en particulier, les densités ρ_i des composantes.

Equation de l'équilibre des masses pour les constituants d'un mélange. Dans le cas général, outre les équations de la mécanique pour la vitesse $\boldsymbol{v}$ et la densité ρ, on peut écrire les équations de l'équilibre des masses établies au § 1, ch. III, contenant les densités ρ_i et la vitesse du mélange dans sa totalité $\boldsymbol{v}$. Ces équations sont de la forme *)

$$\frac{1}{\Delta V}\frac{dm_i}{dt}=\frac{d\rho_i}{dt}+\rho_i \operatorname{div} \boldsymbol{v}=\varkappa_i-\operatorname{div} \boldsymbol{I}_i. \tag{9.1}$$

Les quantités $\varkappa_i\,\Delta V$ et $\operatorname{div} \boldsymbol{I}_i\,\Delta V$ définissent la production en unité de temps de la masse m_i du i-ième constituant au cours d'une transformation physico-chimique ou d'une diffusion dans un volume mobile individuel ΔV du mélange dans sa totalité. Afin d'obtenir à partir de (9.1) les équations réelles pour ρ_i ou c_i, il faut s'adresser aux lois physico-chimiques préalablement établies pour $\varkappa_i$ et $\boldsymbol{I}_i$.

*) Dans les applications souvent il est plus commode d'envisager au lieu des densités ρ_i des constituants les concentrations massiques $c_i=\rho_i/\rho$ ($i=1, 2, \ldots, N$). Il est évident que les c_i satisfont aux équations suivantes:

$$\frac{1}{\Delta V}\frac{dm_i}{dt}=\rho\frac{dc_i}{dt}=\varkappa_i-\operatorname{div} \boldsymbol{I}_i \quad (i=1, 2, \ldots, N). \tag{9.1'}$$

De même qu'en établissant les lois régissant les forces selon le type et les conditions des interactions on s'adresse au principe fondamental de la dynamique, de même, lorsqu'on établit les lois adéquates pour $\varkappa_i$ et I_i, il faut avancer les hypothèses qu'on vérifiera ensuite expérimentalement avec le concours des équations (9.1).

Equations de l'équilibre des masses dans les transformations physico-chimiques. C'est ainsi qu'en chimie on établit, sans tenir compte du mouvement, les équations fondamentales de l'équilibre des masses appliquées aux transformations de phase et aux réactions chimiques pour les extrapoler ensuite au cas du mouvement. Ces équations s'écrivent

$$\varkappa_i = \frac{1}{\Delta V}\frac{dm_i^1}{dt} = M_i \sum_{\alpha=1}^{r} \nu_{i\alpha} w_\alpha \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{9.2}$$

Ici r ($\alpha = 1, 2, \ldots, r$) est le nombre de réactions ou de transformations de phase indépendantes se produisant simultanément *); la quantité dm_i^1/dt est la variation de la masse m_i de la i-ième composante de la substance contenue dans un petit volume donné ΔV lors des transformations physico-chimiques; M_i sont les masses molaires; $\nu_{i\alpha}$ les coefficients stœchiométriques, négatifs pour les composantes entrant en réaction et positifs pour les produits de la réaction, lorsque celle-ci s'effectue dans le sens positif par hypothèse, c'est-à-dire lorsque $w_\alpha > 0$; si la composante de numéro i ne participe pas à la réaction de numéro α, on a $\nu_{i\alpha} = 0$; les produits $M_i\nu_{i\alpha}$ représentent les fractions de masse des composantes correspondantes participant à la réaction de numéro α; les quantités w_α caractérisent la rapidité de la α-ième réaction dans le mélange donné. Il est évident que les taux de production de la masse des composantes d'un mélange en unité de volume sont proportionnels à la quantité w_α. On a $w_\alpha \neq 0$ si la réaction de numéro α a lieu et $w_\alpha = 0$ dans le cas contraire.

Le principe de conservation de la masse pour l'ensemble du mélange et pour une réaction particulière fournit les relations

$$\sum_{i=1}^{N} M_i\nu_{i\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r, \text{ et } \sum_{i=1}^{N} \varkappa_i = 0. \tag{9.3}$$

Les formules (9.2) expriment les quantités $\varkappa_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) au moyen des vitesses de réaction w_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, r$). Confor-

*) Les réactions indépendantes sont décrites par des formules de réaction différentes comportant les constituants différents et, d'une façon générale, peuvent se produire lorsque toutes les autres réactions n'ont pas lieu.

Le problème du nombre possible r de réactions et transformations de phase indépendantes en état d'équilibre (règle des phases de Gibbs) relève de la chimie physique.

mément à (9.2), le problème de la définition des fonctions $\varkappa_i$ se ramène à l'établissement des lois physiques et chimiques complémentaires pour r fonctions w_α, vitesses des transformations. Quand $r < N$, le nombre de relations complémentaires pour $\varkappa_i$ diminue selon (9.2) de $N - r$.

Si dans un mélange de N constituants ($N \geqslant 2$) ne se produit qu'une seule transformation de phase entre les constituants d'indices 1 et 2, les poids moléculaires des phases étant les mêmes, il vient

$$r = 1,\ i = 1, 2, \ldots, N,\ M_1 = M_2 = M,$$
$$\nu_{11} = -1,\ \nu_{21} = 1,\ \nu_{31} = \ldots = \nu_{N1} = 0,$$
$$\varkappa_1 = -Mw_1,\quad \varkappa_2 = Mw_1,\quad \varkappa_3 = \ldots = \varkappa_N = 0.$$

Envisageons encore un mélange constitué d'hydrogène H_2 de poids moléculaire $M_1 = 2$, d'oxygène O_2 de poids moléculaire $M_2 = 32$, de vapeurs d'eau H_2O de poids moléculaire $M_3 = 18$ et d'un gaz neutre. Supposons qu'il s'y produise une seule réaction chimique conduisant à la formation des vapeurs d'eau d'après l'équation chimique

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O.$$

Dans ce cas on a évidemment les relations et les valeurs numériques suivantes:

$$r = 1,\ N = 4,\ \nu_{11} = -2,\ \nu_{21} = -1,\ \nu_{31} = 2,\ \nu_{41} = 0,$$
$$\varkappa_1 = -4w_1,\quad \varkappa_2 = -32w_1,\quad \varkappa_3 = 36w_1,\quad \varkappa_4 = 0.$$

Pour les transformations irréversibles, les relations entre les vitesses w_α et les paramètres définissant l'état et la composition du mélange sont dites équations cinétiques des réactions chimiques ou des transformations physiques s'il s'agit d'une redistribution des masses des constituants n'affectant pas la nature des éléments dont sont composés les constituants. Si les grandeurs ρ_i et v sont définies en fonction de certains paramètres à l'aide de lois et données supplémentaires et compte tenu des équations de l'équilibre des masses, alors en l'absence de diffusion les grandeurs w_α pour $r < N$ se définissent de (9.2) et (9.1). On montrera plus bas qu'il en est ainsi lorsque les transformations physico-chimiques sont réversibles.

L'établissement des lois régissant les flux de diffusion I_i est un problème central de la thermodynamique des évolutions irréversibles. Ces lois seront envisagées dans ce qui suit en rapport avec la formule du taux de production d'entropie par suite de la dissipation interne de l'énergie.

Energie interne de l'ensemble du mélange. La construction d'un modèle concret du mélange est essentiellement liée au choix du système des paramètres de définition (arguments) et à la représen-

tation de l'énergie interne de l'ensemble du mélange comme une fonction fixe de ces paramètres (arguments). On a étudié au § 6 les fluides parfaits compressibles biparamétriques pour lesquels l'énergie interne d'une petite particule est définie comme une certaine fonction de l'entropie spécifique s, de la densité ρ et qui est proportionnelle à la masse m de la particule. En analysant l'ensemble du mélange, on prend pour point de départ que l'énergie interne U_m d'une petite particule de mélange s'exprime sous la forme

$$U_m = U_m (s, \rho, m_1, m_2, \ldots, m_N, \chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^l), \tag{9.4}$$

où $\chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^l$ sont des paramètres caractérisant les évolutions internes et l'état du mélange. Ce peut être les températures des constituants, les caractéristiques des mouvements internes macroscopiques relatifs des constituants, en particulier, les vecteurs flux de diffusion ou les caractéristiques des interactions liées à la disposition et à la structure des constituants, les composantes des tenseurs des déformations de divers constituants du mélange, les paramètres caractérisant les propriétés électromagnétiques des constituants et autres grandeurs. La variation de l'énergie interne due au travail des forces massiques internes macroscopiques peut être traduite par la variation des paramètres χ^i, les interactions entre les constituants lors de leur mouvement relatif sont prises en compte en estimant la diffusion.

La généralisation la plus simple des modèles des milieux parfaits biparamétriques étudiés au § 6 pour le cas d'un mélange s'obtient en simplifiant comme suit la forme de la fonction fondamentale (9.4)

$$U_m = U_m (s, \rho, m_1, m_2, \ldots, m_N). \tag{9.5}$$

Le fait que la formule (9.5) ne contient pas de paramètres χ^s permet certaines simplifications, cependant dans cette forme réduite la formule ne rend pas compte de certains effets qui peuvent se manifester dans les phénomènes réels lorsqu'il s'agit de mélanges aux propriétés compliquées, d'un plasma par exemple.

Selon (9.5) on écrit

$$dU_m = \frac{\partial U_m}{\partial s} ds + \frac{\partial U_m}{\partial (1/\rho)} d\frac{1}{\rho} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial U_m}{\partial m_k} dm_k. \tag{9.6}$$

Dans les formules (9.5) et (9.6) les arguments et les différentielles ds, $d(1/\rho)$ ainsi que N différentielles dm_k peuvent être considérés indépendants et, dans certains intervalles, arbitraires.

On peut comprendre par l'accroissement dU_m calculé d'après (9.6) la variation de l'énergie interne d'une particule isolée lors de son mouvement ou la variation de U_m résultant de l'échange d'énergie entre les particules et, en général, toute autre variation

de l'énergie interne qui peut avoir lieu dans des phénomènes réels. Envisageons en rapport avec (9.5) et (9.6) les fonctions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} m\theta(s, \rho, m_1, m_2, \ldots, m_N) &= \frac{\partial U_m}{\partial s}, \\ mp'(s, \rho, m_1, m_2, \ldots, m_N) &= -\frac{\partial U_m}{\partial (1/\rho)} \\ \text{et} \qquad \mu_k'(s, \rho, m_1, m_2, \ldots, m_N) &= \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{s, \rho} \end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

où $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$.

Conformément à (6.2), pour les transformations réversibles dans les milieux biparamétriques lorsque $dq^{**} = 0$ se vérifient les égalités $\theta = T$ et $p' = p$, où T est la température absolue, p la pression. Il est évident que dans le cas considéré θ et p' conservent leur signification si les transformations sont réversibles et $m_k = \text{const}$ et $dq^{**} = 0$. Dans le cas général plus compliqué, lorsque les m_k sont variables, les transformations sont irréversibles et les dq^{**} diffèrent de zéro, les formules (9.7) pour $\theta = T$ et $p' = p$ peuvent être considérées comme les définitions de la température et de la pression. L'établissement de la fonction (9.5) conforme aux données de l'expérience peut être ramené à la définition expérimentale des fonctions $\theta(s, \rho, m_1, m_2, \ldots, m_N)$, $p'(s, \rho, m_1, m_2, \ldots, m_N)$ et $\mu_k'(s, \rho, m_1, m_2, \ldots, m_N)$, qui doivent satisfaire aux conditions d'intégrabilité.

Les fonctions

$$\mu_k = \mu_k' - \theta s + p'\frac{1}{\rho} \tag{9.8}$$

sont appelées potentiels chimiques. Partant de (9.6) et (9.7) il est facile de vérifier les égalités

$$\mu_k = \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{S_m, \Delta V}, \tag{9.8'}$$

où $S_m = ms$ et $\Delta V = m/\rho$.

Energie libre et potentiel thermodynamique d'un mélange. Afin de dégager la signification des grandeurs μ_k considérons parallèlement à l'énergie interne d'une particule de mélange U_m l'énergie libre F_m et le potentiel thermodynamique Ψ_m définis par les formules

$$\left.\begin{aligned} F_m(s, \rho, m_1, m_2, \ldots, m_N) &= U_m - m\theta s, \\ \Psi_m(s, \rho, m_1, m_2, \ldots, m_N) &= U_m - m\theta s + mp'\frac{1}{\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

Les égalités (9.7) autorisent à substituer aux variables s, ρ dans la fonction F_m les arguments ρ et θ et dans la fonction Ψ_m les arguments θ et p'.

A partir de (9.9) il est aisé de vérifier directement les égalités

$$\mu_k = \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial m_k}\right)_{p',\,\theta} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{s,\,1/\rho} - \theta s + p'\frac{1}{\rho} = \\ = \left(\frac{\partial F_m}{\partial m_k}\right)_{\rho,\,\theta} + p'\frac{1}{\rho} \tag{9.10}$$

et les égalités *)

$$\mu_k = \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial m_k}\right)_{p',\,\theta} = \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{S_m,\,\Delta V = \frac{m}{\rho}} = \left(\frac{\partial F_m}{\partial m_k}\right)_{\theta,\,\Delta V}. \tag{9.11}$$

Dans certaines expériences il est plus commode de déterminer la fonction $F_m(\theta, \rho, m_k)$ ou $\Psi_m(\theta, p', m_k)$ au lieu de la fonction $U_m(s, \rho, m_k)$. Déterminer directement les potentiels chimiques μ_k en fonction des arguments $\theta = T$, $p' = p$ et m_k à partir de l'expérience s'avère souvent plus commode que trouver les fonctions $\mu_k'(s, \rho, m_k)$.

Homogénéité des fonctions thermodynamiques par rapport aux masses. S'il est possible de négliger la non-additivité de l'énergie interne par rapport aux masses et, en particulier, l'énergie libre de la particule ou l'énergie dépendant de la forme de la particule, on peut adopter comme résultat fondamental qui s'accorde bien avec l'expérience le fait que, l'entropie spécifique s et la densité ρ restant les mêmes, l'augmentation de toutes les masses m_k de n fois produit l'augmentation de l'énergie de n fois. Cette hypothèse est valable en particulier pour les corps dont l'énergie interne totale est égale à la somme des énergies internes des parties. Cette supposition impose à la fonction (9.5) la restriction suivante:

$$nU_m(s, \rho, m_1, m_2, \ldots, m_N) = \\ = U_m(s, \rho, nm_1, nm_2, \ldots, nm_N). \tag{9.12}$$

D'où, en posant $n^{-1} = m_1 + m_2 + \ldots + m_N = m$, on tire

$$U_m(s, \rho, m_1, m_2, \ldots, m_N) = mU_m(s, \rho, c_1, c_2, \ldots, c_N), \tag{9.13}$$

où $c_i = \frac{m_i}{m} = \frac{\rho_i}{\rho}$ sont les concentrations massiques des constituants du mélange. Dans cette hypothèse on obtient que l'énergie interne est une fonction homogène du premier degré des masses m_i. La formule (9.12) peut être vérifiée même dans le cas où l'énergie interne n'est pas additive.

*) Il est à souligner que les formules (9.7), (9.9), (9.10) et (9.11) se déduisent mathématiquement de la définition (9.5).

On voit de (9.12) et (9.9) que les fonctions $F_m(\theta, \rho, m_k)$ et $\Psi_m(p', \theta, m_k)$ satisfont elles aussi aux égalités de la forme (9.12), c'est-à-dire qu'elles sont également des fonctions homogènes du premier degré en m_k. Dans ce cas les égalités (9.10) et le théorème d'Euler portant sur les fonctions homogènes fournissent

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_m &= \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial \Psi_m}{\partial m_k}\right)_{p', \theta} = \sum_{k=1}^{N} m_k \mu_k(\theta, p', c_k), \\
U_m &= \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{s, \rho} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left[\mu_k(s, \rho, c_k) + \theta s - p' \frac{1}{\rho}\right], \\
F_m &= \sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{\partial F_m}{\partial m_k}\right)_{\rho, \theta} = \sum_{k=1}^{N} m_k \left[\mu_k(\theta, \rho, c_k) - \frac{p'}{\rho}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{9.14}$$

Soulignons que les μ_k sont, en général, toutefois non seulement de s, ρ ou de θ, ρ ou de θ, p', mais encore des rapports $\frac{m_1}{m} = c_1$, $\frac{m_2}{m} = c_2, \ldots, \frac{m_N}{m} = c_N$.

Mélange des gaz parfaits. En guise d'exemple prenons les expressions des fonctions thermodynamiques pour un mélange de gaz parfaits. Les formules (7.8) traduisant les fonctions thermodynamiques d'un gaz parfait peuvent être considérées comme celles des fonctions thermodynamiques des constituants d'un mélange de masse m_k pour lesquels on connaît les caractéristiques ρ_k, T_k, p_k, $c_{v_k}(T_k)$, $c_{p_k}(T_k)$, ainsi que toutes les constantes. D'autre part, les mêmes formules donnent les fonctions thermodynamiques caractéristiques de l'ensemble d'un mélange en état d'équilibre de densité correspondante ρ, à température T et à pression p si l'on peut considérer ce mélange comme un gaz parfait.

Pour obtenir les fonctions thermodynamiques et toutes les constantes de l'ensemble d'un mélange en fonction des masses m_k et d'autres caractéristiques des constituants mélangés nous allons recourir aux expériences idéalisées suivantes. Soient deux volumes différents de masses respectives m_1 et m_2 d'un même gaz parfait séparés par une cloison étanche. Lorsqu'ils sont en équilibre, l'enlèvement de la cloison ne détruit pas l'équilibre si les pressions et les températures des gaz sont les mêmes. L'égalité des pressions élimine le mouvement, celle des températures rend impossible l'échange de la chaleur. Conformément aux équations d'état, l'égalité des pressions et des températures entraîne celle des densités. Les formules (7.9) écrites pour le premier et le second gaz avec les facteurs respectifs m_1 et m_2 conduisent aux formules identiques

pour le système de deux gaz dans lesquelles les constantes c_V et c_p restent les mêmes, mais le facteur est $m_1 + m_2$. On arrive évidemment au résultat analogue pour le cas d'un grand nombre de masses $m_1, m_2, \ldots, m_N$ d'un même gaz entrant en contact.

S'il s'agit de deux gaz différents de masses m_1 et m_2, même s'ils avaient les mêmes températures et les mêmes pressions lorsqu'ils étaient séparés, après l'enlèvement de la cloison l'équilibre du système se trouve perturbé par suite de la diffusion, car les états d'un mélange de gaz à distribution *uniforme* des constituants dans le volume occupé par le mélange sont plus probables que l'état initial à distribution *non uniforme* des masses. S'il n'y a pas d'apport de chaleur extérieure, le passage de l'état initial (juste après l'enlèvement de la cloison) non équilibré d'entropie $\widetilde{S}_{m_1+m_2}$, égale à la somme des entropies des constituants séparés, à l'état final équilibré (plus probable) d'entropie $S_{m_1+m_2}$ s'accompagne de l'accroissement de l'entropie. Par conséquent on doit avoir pour le mélange

$$S_{m_1+m_2} > S_{m_1}(p, T) + S_{m_2}(p, T).$$

Toutefois ce résultat est essentiellement lié au fait qu'on mélange des gaz *différents*. Si les gaz mélangés sont identiques, l'état initial coïncide avec l'état final et

$$S_{m_1+m_2} = S_{m_1}(p, T) + S_{m_2}(p, T).$$

Un mélange de N gaz parfaits essentiellement différents du point de vue physique et chimique peut être considéré comme un ensemble de N gaz différents occupant le même volume. Pour chacun des constituants on peut introduire les paramètres et les équations d'état pour les états équilibrés indépendamment de la présence d'autres gaz dans ce même volume. Cette hypothèse ne tient pas compte de l'énergie d'interaction des gaz, alors en vertu de (7.8) on a l'égalité

$$U_m = U_{m_1}(T_1) + U_{m_2}(T_2) + \ldots + U_{m_N}(T_N) = \\ = m \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{m} \left(U_{0k} + \int_{T_{0k}}^{T_k} c_{V_k}(T)\, dT \right) \tag{9.15}$$

Introduisons de plus pour un mélange de N gaz parfaits les pressions partielles $p_1, p_2, \ldots, p_N$ et la pression p de l'ensemble du mélange définies par les équations d'état $p_k = \rho_k R_k T_k = \rho_k \frac{R_0}{M_k} T_k$ (où R_0 est la constante universelle des gaz parfaits) et par la loi de Dalton

$$p = \sum_{k=1}^{N} p_k = \sum_{k=1}^{N} \rho_k R_k T_k = \rho \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k m_k}{m} T_k. \tag{9.16}$$

En supposant que la probabilité pour chaque constituant du gaz de se trouver en tel ou tel état soit indépendante des probabilités d'état des autres constituants, on peut représenter l'entropie du mélange comme une somme des entropies des constituants pour les états correspondants; il serait légitime alors d'introduire l'entropie de l'ensemble du mélange comme suit:

$$\left.\begin{aligned} &S_m(p, T, m_1, m_2, \ldots, m_N) = \sum_{k=1}^{N} S_{m_k}(p_k, T_k, m_k), \\ &\text{où d'après (7.9)} \\ &S_{m_k} = m_k\left(s_{0k} + \int_{T_{0k}}^{T_k} \frac{c_{p_k}}{T}\,dT - R_k \ln\frac{p_k}{p_{0k}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (9.17)$$

Comme nous avons adopté la formule (9.5) pour l'énergie interne U_m, formule qui ne tient pas compte d'éventuelles différences des températures des constituants, il est logique de supposer égales les températures des constituants dans un élément infinitésimal, c'est-à-dire

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_N = T.$$

Il découle en même temps de la loi de Dalton que

$$\frac{mp}{\rho} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k p_k}{\rho_k},$$

ce qui conduit à la formule suivante pour le potentiel thermodynamique de l'ensemble du mélange

$$\Psi_m = U_m - TS_m + \frac{mp}{\rho} = \sum_{k=1}^{N} U_{m_k} - T\sum_{k=1}^{N} S_{m_k} + \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k p_k}{\rho_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \Psi_{m_k}(p_k, T) = \sum_{k=1}^{N} m_k \mu_k. \quad (9.18)$$

A partir de (9.15), (9.17) et (9.18) on obtient les formules suivantes pour les potentiels chimiques

$$\mu_k(T, p_k) =$$

$$= \left[U_{0k} + R_k T_0 - s_{0k} T + \int_{T_0}^{T} c_{p_k}\,dT - T\int_{T_0}^{T} \frac{c_{p_k}\,dT}{T} + R_k T \ln\frac{p_k}{p_{0k}}\right], \quad (9.19)$$

où l'on tient compte de ce que $c_{p_k} - c_{v_k} = R_k$.

Vu qu'en tenant compte de (9.16) pour $T_1 = T_2 = \ldots = T_N$, on a

$$p_k = p\frac{R_k\rho_k}{R\rho} = p\frac{R_k m_k}{Rm} = p\frac{R_k m_k}{\sum\limits_{i=1}^{N} R_i m_i},$$

on tire de (9.17) que

$$S_m(p, T, m_1, m_2, \ldots, m_N) = \\ = \sum_{k=1}^{N} S_{m_k}(T, p) - \sum_{k=1}^{N} R_k m_k \ln\frac{R_k m_k}{\sum\limits_{i=1}^{N} R_i m_i}. \tag{9.20}$$

Il est évident que $S_m > \sum\limits_{k=1}^{N} S_{m_k}(p, T)$, puisque

$$\Delta S_m = -\sum_{k=1}^{N} R_k m_k \ln\frac{R_k m_k}{\sum\limits_{i=1}^{N} R_i m_i} = -\sum_{k=1}^{N} R_0 n_k \ln\frac{n_k}{\sum\limits_{i=1}^{N} n_i} > 0, \tag{9.21}$$

où n_i est le nombre de moles du i-ième constituant dans la particule donnée de masse $m = \sum\limits_{k=1}^{N} m_i$.

Si l'on prend N gaz de masses m_k ayant les mêmes pressions p et les températures T identiques séparés au début par des cloisons, immédiatement après l'enlèvement des cloisons l'entropie est $\sum\limits_{k=1}^{N} S_{m_k}(T, p)$. Quand on mélange des gaz dans un volume invariable sans intervention de la chaleur extérieure, l'état d'équilibre du mélange sera caractérisé par valeurs primitives *) de la pression et de la température l'entropie étant $S_m(p, T, m_1, m_2, \ldots, m_N)$. La quantité ΔS_m (9.21) donne l'accroissement de l'entropie par suite de l'irréversibilité de la diffusion. Il est important de noter que la contribution de la diffusion dans l'accroissement de l'entropie (9.21) est indépendante de la nature des gaz mélangés, n'étant fonction que du nombre des moles mélangées.

Paradoxe de Gibbs. La théorie développée plus haut sert à définir les fonctions thermodynamiques des mélanges de gaz parfaits différents. En appliquant formellement cette théorie à N parties d'un même gaz on arrive à une contradiction. En effet, il est immédiate-

*) C'est une conséquence du principe de conservation de l'énergie et de la loi de Dalton pour les gaz en état d'équilibre.

ment évident que l'entropie d'un tel « mélange » doit être égale à

$$\sum_{k=1}^{N} S_{m_k}(T, p),$$

tandis que la théorie en question donne

$$S_m > \sum_{k=1}^{N} S_{m_k}(T, p).$$

Cette contradiction est appelée paradoxe de Gibbs. L'explication réside dans le fait que la théorie des mélanges est essentiellement basée sur l'hypothèse de la *différence* physico-chimique des constituants. Cette différence peut être petite mais du point de vue physique c'est toujours une différence finie. Cette différence fait que lorsque après l'enlèvement des cloisons les volumes différents des constituants du gaz à pressions p et à températures T égales occupent un même volume, le mélange se trouve dans un état essentiellement déséquilibré. Pour un volume invariable et en l'absence de chaleur extérieure cet état se transforme par suite de la diffusion en état d'équilibre de mêmes valeurs de p et T. L'étude statistique montre que les fonctions thermodynamiques et, en particulier, l'entropie sont différentes pour un même nombre de particules distinctes et de particules identiques. Comme dans un gaz composé de molécules identiques et occupant un volume ΔV il est physiquement impossible d'isoler différents constituants substantiels contenus dans ce même volume ΔV, la méthode précédente du calcul de l'entropie, valable pour un mélange des constituants physiquement distincts, ne l'est plus lorsque le gaz est composé de particules identiques.

Equations des premier et second principes de la thermodynamique pour un mélange. En s'appuyant sur le second principe de la thermodynamique (voir § 2)

$$T\,dS = dQ^{(e)} + dQ' \tag{9.22}$$

et sur l'équation de la chaleur reçue pour l'ensemble du mélange (voir § 5)

$$dU_m = \frac{m}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i\, dt + dQ^{(e)} + dQ^{**} \tag{9.23}$$

on a

$$dU_m = \frac{m}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i\, dt + T\,dS + dQ^{**} - dQ'. \tag{9.24}$$

En établissant le modèle du mélange dans le cas général il est nécessaire de donner, outre la fonction de l'énergie interne (9.4) ou (9.5), les quantités dQ' et dQ^{**}. Pour les transformations réversibles $dQ' = 0$, pour les processus irréversibles $dQ' \geqslant 0$. La quantité dQ^{**} représente l'apport d'énergie non calorifique différent du travail des forces extérieures sur les déplacements de l'ensemble du milieu, fourni par des corps extérieurs à la particule, en parti-

culier, par les particules voisines du milieu en contact avec la particule considérée suivant sa frontière Σ, ainsi que d'éventuels apports d'énergie dus à l'action du champ électromagnétique (voir plus loin ch. VI). Vu que les interactions de la particule donnée avec les particules voisines conditionnées par les forces massiques et par la distribution des contraintes p^{ij} sur la surface Σ ou encore par la chaleur extérieure ne sont pas incluses dans $dQ^{**} = 0$, alors en l'absence de la diffusion, des champs extérieurs et des forces généralisées sur Σ (par exemple, des couples surfaciques distribués, voir ch. III, § 3), on peut admettre que $dQ^{**} = 0$. Cependant s'il y a diffusion, l'apport d'énergie dQ^{**} peut différer de zéro à cause de l'apport vers la particule donnée de l'énergie non calorifique des masses des constituants pénétrant grâce à la diffusion à travers la frontière Σ de la particule substantielle isolée dans l'ensemble du mélange. La quantité dQ^{**} peut également différer de zéro si l'on tient compte dans (9.4) des arguments supplémentaires χ^s_i et, en particulier, de l'énergie cinétique des mouvements relatifs des constituants en diffusion. Si l'on veut tenir compte de la diffusion, il faut en général inclure dans les apports d'énergie dQ^{**} et $dQ^{(e)}$ le travail élémentaire des forces macroscopiques massiques ou surfaciques, extérieures à la particule donnée, sur les déplacements relatifs $(v_i - v)\,dt$ des particules des constituants formant le mélange.

§ 10. Modèles des mélanges dans le cas des transformations réversibles

Par définition des transformations réversibles on a

$$dQ' = 0 \quad \text{et} \quad I_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{10.1}$$

On se bornera ici à des modèles pour lesquels l'énergie interne de l'ensemble du mélange U_m est décrite par la formule (9.5); posons de plus

$$dQ^{**} = 0. \tag{10.2}$$

Equations d'état d'un mélange dans une transformation réversible. Compte tenu du second principe de la thermodynamique l'équation de la chaleur reçue pour l'ensemble du mélange (9.24) s'écrit dans ce cas comme suit:

$$dU_m = \frac{m}{\rho}\, p \operatorname{div} v\, dt + \frac{m}{\rho}\,(p^{ij} - pg^{ij})\,\nabla_j v_i\, dt + mT\, ds$$

ou

$$\frac{\partial U_m}{\partial (m/\rho)}\, d\frac{m}{\rho} + \frac{\partial U_m}{\partial S_m}\, dS_m + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{\frac{m}{\rho},\, S_m} dm_k =$$

$$= -p\, d\frac{m}{\rho} + T\, dS_m + \frac{m}{\rho}\,\tau^{ij}\nabla_j v_i\, dt. \tag{10.3}$$

Si l'on pose par définition

$$p = -\left(\frac{\partial U_m}{\partial (m/\rho)}\right)_{S_m,\, m_k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial (1/\rho)}\right)_{s,\, m_k} \tag{10.4}$$

et l'on admet que les composantes du tenseur $\tau^{ij} = p^{ij} - pg^{ij}$ ne dépendent pas de gradients de vitesses $\nabla_j v_i$ en tenant compte de l'indépendance de dS_m et de dm_k, on obtient à partir de (10.3) les relations

$$T = \left(\frac{\partial U_m}{\partial S_m}\right)_{\frac{m}{\rho},\, m_k} = \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{\frac{1}{\rho},\, m_k} \quad \text{et} \quad \tau^{ij} = 0 \tag{10.5}$$

et, en s'aidant des formules (9.8) pour les potentiels chimiques μ_k et des définitions (9.2) pour $\varkappa_k$, la relation

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial U_m}{\partial m_k}\right)_{\frac{m}{\rho},\, S_m} dm_k = \sum_{k=1}^{N} \mu_k\, dm_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \mu_k \varkappa_k\, dt\, \Delta V = 0. \tag{10.6}$$

Les égalités (10.4) et (10.5) représentent les équations d'état. En donnant la fonction (9.5) de l'énergie interne on obtient, d'après (10.4) et (10.5), la pression $p\left(\frac{1}{\rho}, s, \frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}, \ldots, \frac{m_N}{m}\right)$, la température du mélange $T\left(\frac{1}{\rho}, s, \frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}, \ldots, \frac{m_N}{m}\right)$ et, en outre, il en découle que $\tau^{ij} = 0$. Il s'ensuit, en particulier, des hypothèses émises que le modèle du milieu construit décrit un fluide parfait.

Conditions d'équilibre chimique. Lorsque les transformations chimiques ou les transformations de phase sont absentes, on a $dm_k = \varkappa_k\, dt\, \Delta V = 0$, si bien que les égalités (10.6) sont identiquement satisfaites. Lors des transformations chimiques ou de phase, en l'absence de diffusion, les quantités m_k, w_α et ΔV peuvent être envisagées, dans des intervalles de temps finis, en tant que caractéristiques d'une particule fixée du milieu et sont donc fonctions des coordonnées lagrangiennes (les mêmes pour tous les constituants, car $v_i = v$) et du temps t. Dans ce cas les équations (9.2) d'équilibre des masses lors des transformations physico-chimiques pour chaque

particule s'écrivent après intégration par rapport au temps t

$$\left.\begin{aligned} & m_i - m_{0i} = M_i \sum_{\alpha=1}^{r} \nu_{i\alpha}\omega_\alpha \\ & \text{ou, en tenant compte de l'égalité} \\ & m = m_0 = \text{const}, \\ & \rho_i = \frac{\rho_{0i}}{\rho_0}\rho + M_i \sum_{\alpha=1}^{r} \nu_{i\alpha}\frac{\omega_\alpha}{\Delta V} \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, N), \quad (10.7)$$

où l'on a désigné, en s'appuyant sur l'équation de continuité de l'ensemble du milieu,

$$\omega_\alpha = \int_{t_0}^{t} w_\alpha \Delta V\, dt = m \int_{t_0}^{t} \frac{w_\alpha}{\rho}\, dt.$$

En se basant sur les équations d'équilibre des masses lors des transformations physico-chimiques (9.2) on peut mettre (10.6) sous la forme

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i M_i \nu_{i\alpha}\right) w_\alpha\, dt = 0. \quad (10.8)$$

Etant donné que r réactions sont, par hypothèse, indépendantes, les quantités $\omega_\alpha\, dt$ peuvent être regardées comme linéairement indépendantes, ce qui permet d'obtenir de la relation précédente pour r réactions r conditions d'équilibre

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i M_i \nu_{i\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r. \quad (10.9)$$

Ces relations représentent les équations fondamentales d'équilibre thermodynamique des transformations chimiques ou de phase.

Mélange comme un milieu parfait biparamétrique. Vu que les potentiels chimiques μ_i peuvent être considérés comme des fonctions de ρ_i, ρ et T, il est possible d'après les équations intégrées d'équilibre des masses des transformations physico-chimiques (10.7) d'envisager les conditions d'équilibre (10.9) en tant que r équations définissant r quantités $\omega_\alpha/\Delta V$ en fonction de ρ, T et de concentrations « initiales » $\rho_{0i}/\rho_0 = c_{0i}$ des constituants formant le mélange. Ainsi donc, dans le cas général des transformations réversibles, les concentrations de constituants $\rho_i/\rho = c_i$ sont définies par la densité du mélange ρ, la température T et les constantes c_{0i} qui sont des caractéristiques « initiales » de la composition du mélange.

Pour les transformations réversibles les équations d'état de l'ensemble du mélange

$$U_m = mU\left(\rho, s, \frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}, \ldots, \frac{m_N}{m}\right),$$

$$p = p\left(\frac{1}{\rho}, T, \frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}, \ldots, \frac{m_N}{m}\right),$$

$$s = s\left(\frac{1}{\rho}, T, \frac{m_1}{m}, \frac{m_2}{m}, \ldots, \frac{m_N}{m}\right)$$

prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} U_m &= mU(\rho, T, c_{01}, c_{02}, \ldots, c_{0N}), \\ p &= p\left(\frac{1}{\rho}, T, c_{01}, c_{02}, \ldots, c_{0N}\right), \\ s &= s\left(\frac{1}{\rho}, T, c_{01}, c_{02}, \ldots, c_{0N}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (10.10)$$

Ces équations d'état du mélange ont la forme de celles du milieu biparamétrique, mais contiennent les constantes c_{0i} différentes pour les particules différentes selon le cas à envisager.

Pour les transformations irréversibles ou s'il y a diffusion, la théorie exposée plus haut n'est pas en général valable. Toutefois, si les réactions chimiques se déroulent très rapidement, de sorte qu'on peut supposer vraies, en tout moment, les relations correspondant à l'équilibre chimique, les équations d'état (10.10) peuvent de nouveau être utiles. Mais la diffusion changeant la teneur relative en constituants de chaque particule donnée, les quantités c_{0i} deviennent variables. Dans ce cas, afin de définir les paramètres variables c_{0i} entrant dans les équations d'état (10.10), il faut recourir aux équations traduisant les lois de diffusion.

Pour l'équilibre de deux phases, lorsque leurs poids moléculaires sont égaux, on a $r = 1$, $i = 1, 2$, $\nu_{11} = +1$, $\nu_{21} = -1$, $M_1 = M_2$; et l'équation d'équilibre (10.9) prend la forme

$$\mu_2 = \mu_1.$$

Il est évident que quand il y a l'équilibre de trois phases, on doit avoir simultanément

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \text{et} \quad \mu_2 = \mu_3.$$

En négligeant les effets superficiels, les conditions obtenues de l'équilibre des phases sont applicables aux cas de coexistence des milieux solides, liquides et des gaz.

Loi de Guldberg-Waage. A titre de second exemple, traitons une question importante concernant les réactions chimiques réversibles, en particulier, la dissociation et la recombinaison dans un mélange

de gaz parfaits en mouvement. En utilisant les formules (9.19) pour $\mu_i(T, p_k)$, on peut écrire comme suit les conditions d'équilibre chimique (10.9) d'un mélange de N gaz parfaits en réaction, les réactions étant réversibles :

$$\sum_{i=1}^{N}\left(U_{0i}+R_iT_0-Ts_{0i}+\int_{T_0}^{T}c_{p_i}(T)\,dt-\right.$$
$$\left.-T\int_{T_0}^{T}\frac{c_{p_i}}{T}dT+\frac{R_0}{M_i}T\ln\frac{p_i}{p_{0i}}\right)M_i\nu_{i\alpha}=0.$$

Cette équation peut être transformée de la façon suivante :

$$\left(\frac{p_1}{p_{01}}\right)^{\nu_{1\alpha}}\left(\frac{p_2}{p_{02}}\right)^{\nu_{2\alpha}}\ldots\left(\frac{p_N}{p_{0N}}\right)^{\nu_{N\alpha}}=$$
$$=k_1^{\nu_{1\alpha}}k_2^{\nu_{2\alpha}}\ldots k_N^{\nu_{N\alpha}}\quad(\alpha=1,2,\ldots,r),\tag{10.11}$$

où

$$k_i(T)=\exp\left\{-\frac{1}{R_iT}\left[U_{0i}+R_iT_{0i}-Ts_{0i}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{T_0}^{T}c_{p_i}\,dt-T\int_{T_0}^{T}\frac{c_{p_i}}{T}dT\right]\right\}.\tag{10.12}$$

Conjointement avec les équations de Clapeyron les équations d'équilibre (10.11) et les équations de l'équilibre des masses (10.7) forment un système de $r+N$ équations pour la définition de $r+N$ quantités $\omega_\alpha/\Delta V$ et ρ_i/ρ_{0i} donnant la composition du mélange et la progression de la réaction chimique, le degré de dissociation par exemple.

Les relations (10.11) traduisent la loi d'action de masses dite loi de Guldberg-Waage. Les $k_i(T)$ dépendent de T_0, s_{0i} et de U_{0i} correspondant à l'état « initial » du mélange avec les densités des composantes ρ_{0i}. En supposant les chaleurs spécifiques c_{p_i} et c_{V_i} constantes, les grandeurs $k_i(T)$ seront exprimées par les formules

$$k_i(T)=\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma_i}{\gamma_i-1}}e^{\left(\frac{s_{0i}-c_{p_i}}{R_i}-\frac{U_{0i}-c_{V_i}T_0}{R_iT}\right)},\tag{10.13}$$

où $\gamma_i=c_{p_i}/c_{V_i}$. Dans le cas général les $k_i(T)$ se définissent expérimentalement.

En utilisant les notations

$$\nu'_{i\alpha}=\nu_{i\alpha}>0,\quad \nu''_{j\alpha}=-\nu_{j\alpha}>0,\quad \nu''_\alpha=\sum_j\nu''_{j\alpha},\quad \nu'_\alpha=\sum_i\nu'_{i\alpha},$$

les équations (10.11) peuvent être récrites sous la forme

$$(R_0T)^{\nu''_\alpha}\prod_j\left(\frac{\rho_j}{M_jp_{0j}k_j}\right)^{\nu''_{j\alpha}}-(R_0T)^{\nu'_\alpha}\prod_i\left(\frac{\rho_i}{M_ip_{0i}k_i}\right)^{\nu'_{i\alpha}}=0. \qquad 10.14)$$

Ayant défini les paramètres $\omega_\alpha/\Delta V$ et la composition du mélange en fonction de ρ et T il est aisé de trouver les valeurs finales des « vitesses » des transformations chimiques au moyen des dérivées particulaires $d\rho/dt$ et dT/dt.

Equations de Sach. La méthode exposée de l'étude de la composition des mélanges lors des transformations réversibles est applicable à l'étude des gaz ionisés. Les électrons et les ions des atomes et des molécules différant par leur degré d'excitation peuvent être regardés comme différents constituants du mélange. Les degrés d'ionisation sont décrits par les paramètres ω_α. Dans ce cas les équations d'équilibre des masses (10.7) et la condition de l'équilibre (10.8), de même que les équations (10.11) dans l'approximation du gaz parfait déterminent le degré d'ionisation. Appliquées à ce phénomène, les conditions (10.9) ou (10.11) sont connues sous le nom d'équations de Sach.

Propriétés de l'air considéré comme un mélange de gaz. Les figures 36, 37 et 38 représentent les courbes théoriques donnant les variations des concentrations des constituants, du poids moléculaire, de la chaleur spécifique effective c_V, de l'entropie et de l'énergie interne spécifiques et de la densité pour les états d'équilibre de l'air en tant que mélange gazeux en fonction de la température et de la pression *). Les calculs se basent sur la théorie des états d'équilibre exposée plus haut. Ces courbes figurent les fonctions du type (10.10) lorsqu'au lieu de la densité on prend la pression, variable plus commode du point de vue pratique.

Système complet d'équations du mouvement d'un mélange dans les transformations réversibles. Dans le cas des transformations réversibles dans le mélange le système complet d'équations comporte l'équation de continuité de l'ensemble du mélange, trois équations d'Euler pour un milieu parfait compressible avec les équations d'état (10.10) et l'équation de chaleur reçue ou du second principe de la thermodynamique sous la forme

$$dU=pd\frac{1}{\rho}+dq^{(e)} \quad \text{ou} \quad T\,ds=dq^{(e)}.$$

*) On trouve dans les aide-mémoire les tables numériques récupérant les propriétés thermodynamiques de l'air.

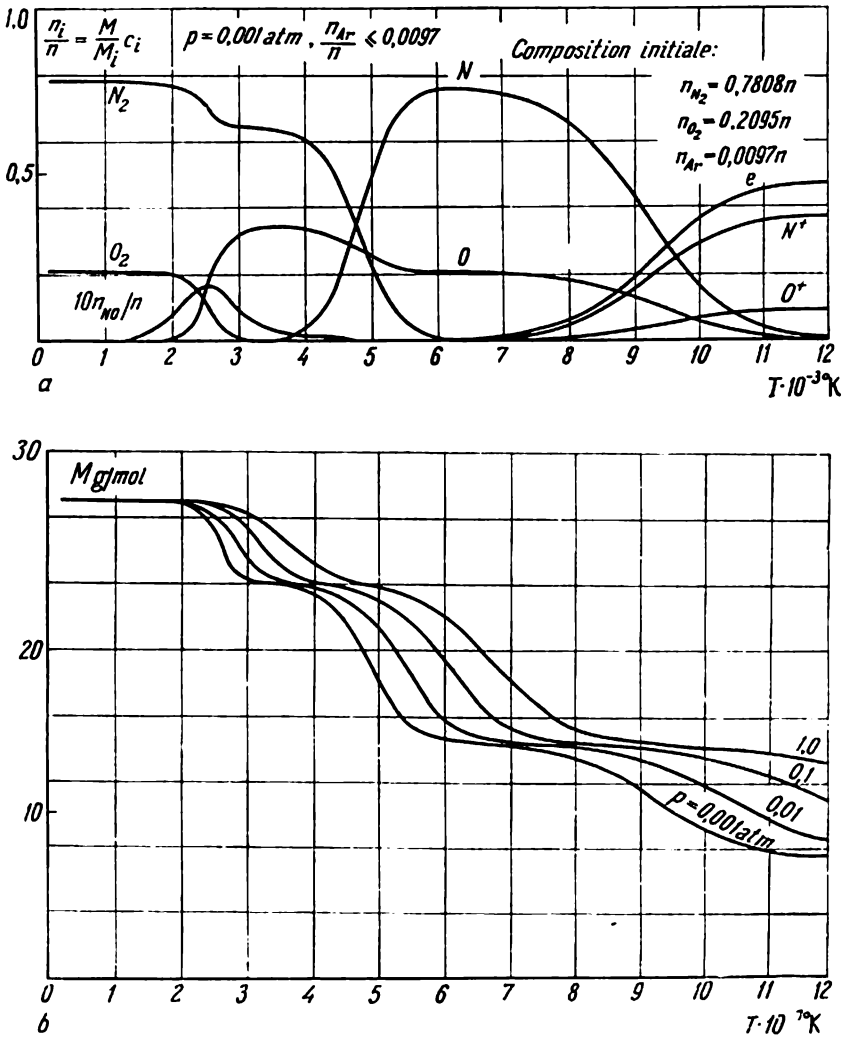
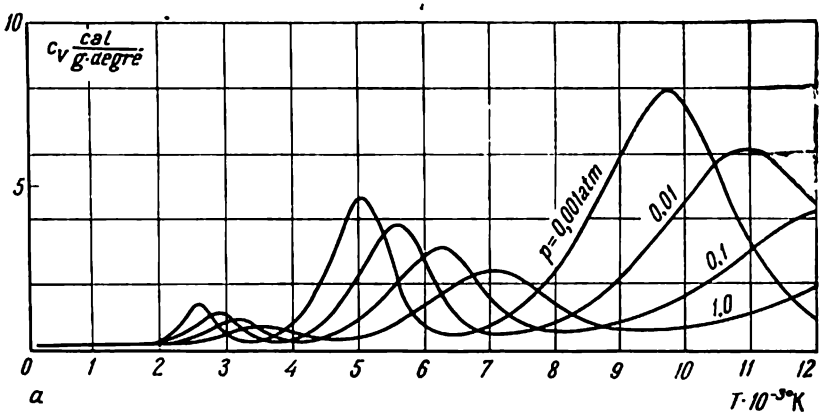


Fig. 36. *a* — composition molaire de l'air en fonction de la température pour $p = 0{,}001$ atm. Les variations de la composition molaire par suite de la dissociation se manifestent notablement à partir de 2 000 °K, celles dues à l'ionisation, à partir de 7000 °K. N_2, O_2, NO — molécules d'azote, d'oxygène et d'oxyde d'azote; N et O — atomes d'azote et d'oxygène; O^+ et N^+ — atomes une fois ionisés; *e* — électrons. Les concentrations d'argon n_{Ar}/n sont constamment petites; *b* — poids moléculaire moyen de l'air en fonction de la température et de la pression



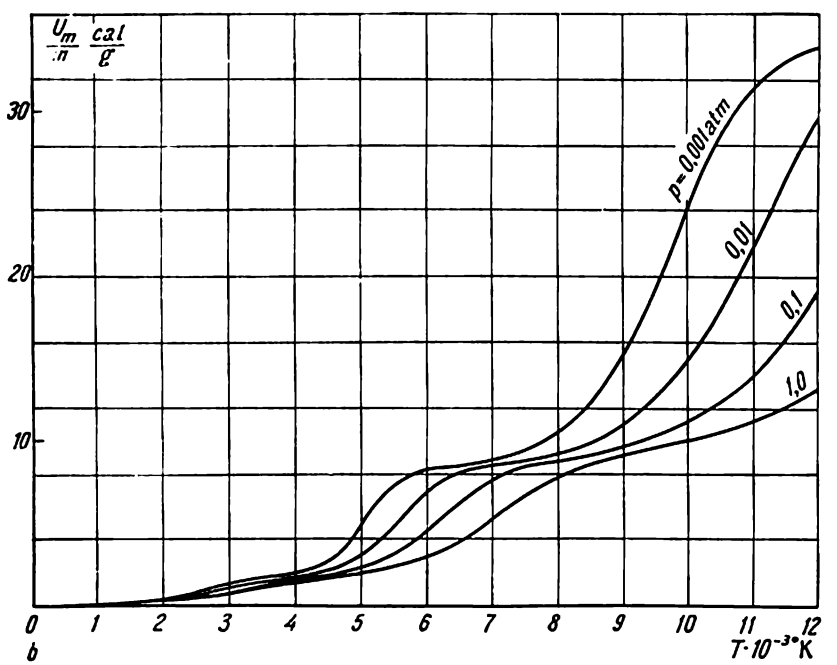


Fig. 37. *a* — chaleur spécifique de l'air en fonction de la température et de la pression. Les variations de la chaleur spécifique se manifestent pour les températures dépassant 2000 °K ; *b* — énergie spécifique interne de l'air en fonction de la température et de la pression

Il est nécessaire de donner, en outre, l'apport de la chaleur extérieure $dq^{(e)}$. Pour les transformations adiabatiques $dq^{(e)} = 0$. La relation

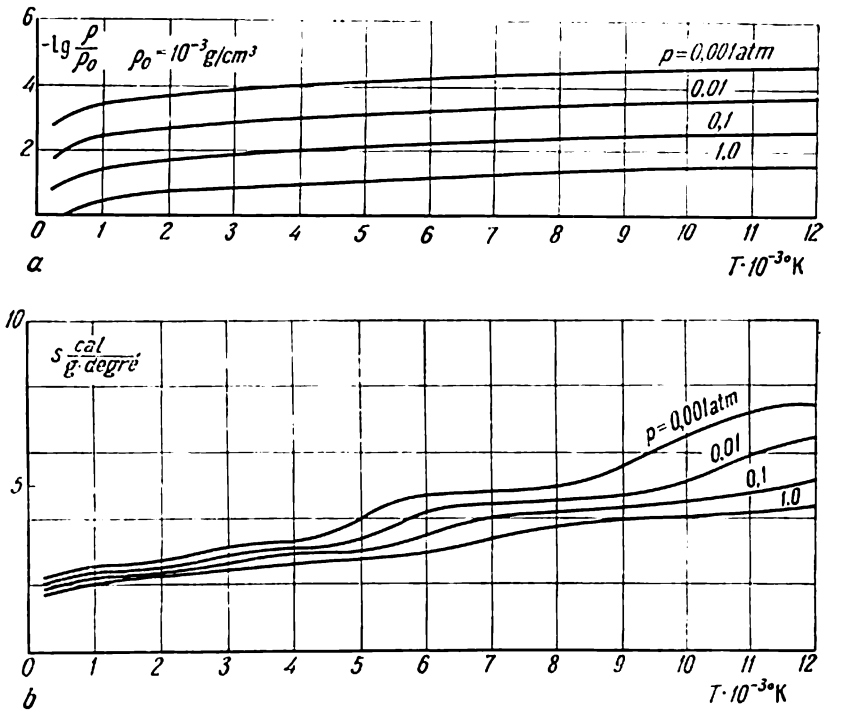


Fig. 38. *a* — densité de l'air en fonction de la température et de la pression; *b* — entropie spécifique de l'air en fonction de la température et de la pression

entre la densité et la pression dépendant de la composition du mélange dans lequel se produisent les transformations chimiques se définit à partir de (10.10) compte tenu de l'égalité $s = \text{const}$.

§ 11. Modèles des mélanges dans le cas des transformations irréversibles

Position générale du problème relatif au mouvement d'un mélange subissant des transformations irréversibles. Adressons-nous aux modèles les plus simples où l'irréversibilité thermodynamique dont rendent compte les équations d'état et autres relations caractérisant le modèle conduit à des relations s'écartant peu des relations correspondantes des transformations réversibles thermodynamiquement équilibrées. Les modèles du § 10 pour les transformations réversibles

se compliquent alors si l'on veut évaluer l'influence des effets irréversibles apparaissant à cause de la viscosité, la conductivité, la diffusion et les réactions chimiques.

Tout comme auparavant admettons en tant qu'hypothèse fondamentale que l'énergie cinétique d'une particule infinitésimale de mélange de masse m est égale à $\frac{mv^2}{2}$ et que l'énergie interne du mélange U_m s'exprime par la formule (9.5) ou par la formule (9.15), cette dernière se rapportant au cas particulier où l'on peut admettre l'hypothèse essentielle supplémentaire de l'égalité des températures des constituants du mélange, c'est-à-dire que

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_N = T. \tag{11.1}$$

En d'autres termes nous supposons que dans chaque particule on a l'équilibre thermique entre les constituants du mélange. Pour certaines applications, en particulier, quand on a à décrire les changements d'état très rapides dans les particules, l'hypothèse (11.1) est loin d'être justifiée; dans certains cas, on est obligé à recourir à d'autres modèles où les températures des constituants sont supposées différentes. En négligeant les énergies cinétiques des constituants dans leurs mouvements par rapport à une particule prise dans son ensemble on s'est guidé par la supposition que ces énergies sont petites devant l'énergie moyenne du mouvement thermique chaotique caracterisée par une température relativement grande figurant dans l'énergie interne U_m.

Equation générale de la variation de l'entropie. Les équations fondamentales de la thermodynamique pour l'accroissement de l'entropie (9.22) et l'équation de la chaleur reçue (9.23) peuvent évidemment s'écrire sous la forme

$$T\,dS_m = dQ^{(e)} + dQ' = dQ^{(e)} + dQ^{**} + dQ' - dQ^{**} \tag{11.2}$$

et

$$dU_m = \frac{\partial U_m}{\partial (m/\rho)} d\frac{m}{\rho} + \frac{\partial U_m}{\partial S_m} dS_m + \sum_{k=1}^{N} \mu_k\, dm_k =$$

$$= -p\,d\frac{m}{\rho} + T\,dS_m + \tau^{ij} e_{ij} \Delta V\, dt + dQ^{**} - dQ'. \tag{11.3}$$

Ici on a tenu compte de la symétrie du tenseur des contraintes, à savoir du fait que $p^{ij} = p^{ji}$, et de la symétrie de la formule $e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)$. En s'aidant de l'égalité (11.3) et compte tenu de la définition de la pression p et de la supposition que la quantité

$dQ^{**} - dQ'$ ne contient pas le terme du type $A\,dS$ *), où A est une certaine fonction des paramètres de définition, on arrive aux équations d'état

$$p = -\frac{\partial U_m}{\partial (m/\rho)} = -\frac{\partial U}{\partial (1/\rho)}, \qquad T = \frac{\partial U_m}{\partial S_m} = \frac{\partial U}{\partial s}, \tag{11.4}$$

et, en utilisant les équations d'équilibre des masses (9.1) et (9.2), à l'égalité

$$dQ' - dQ^{**} = \left\{ \tau^{ij} e_{ij} - \sum_{k=1}^{N} \left[\mu_k \left(M_k \sum_{\alpha=1}^{r} \nu_{k\alpha} w_\alpha - \operatorname{div} I_k \right) \right] \right\} \Delta V\, dt. \tag{11.5}$$

Cette égalité permet de récrire comme suit l'équation (11.2) pour l'accroissement de l'entropie:

$$T\, dS_m = dQ^{(e)} + dQ^{**} + \\ + \left[\tau^{ij} e_{ij} + \sum_{k=1}^{N} \mu_k \operatorname{div} I_k - \sum_{k,\alpha=1}^{N,\,r} \mu_k M_k \nu_{k\alpha} w_\alpha \right] dV\, dt. \tag{11.6}$$

Soulignons que la forme assez générale de cette dernière égalité et des équations d'état (11.4) est essentiellement due à l'hypothèse (9.6) consistant en ce que l'énergie interne U_m ne dépend que de la densité, de l'entropie du mélange et des masses des constituants m_k.

Hypothèse sur les apports d'énergie. Supposons ensuite que l'apport total de l'énergie extérieure reçue par un élément infinitésimal du mélange de volume ΔV délimité par la surface Σ et se déplaçant avec la vitesse v est donné par la formule

$$dA^{(e)} + dQ^{(c)} + dQ^{**} = \sum_{k=1}^{N} \rho_k F_k \cdot v_k \Delta V\, dt + \\ + \sum_{k=1}^{N} \int_{\Sigma} p_k^{ij} n_j v_{ki}\, dt\, d\sigma - \int_{\Sigma} q_0 \cdot n\, dt\, d\sigma + dQ^{(c)}_{\text{mass}} = \\ = \sum_{k=1}^{N} \rho_k F_k \cdot v\, \Delta V\, dt + \int_{\Sigma} p^{ij} n_j v_i\, dt\, d\sigma + \sum_{k=1}^{N} F_k \cdot I_k \Delta V\, dt + \\ + \nabla_j \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^{ij} I_{ki}}{\rho_k} \right) dV\, dt - \nabla_j q_0^j \Delta V\, dt + dQ^{(c)}_{\text{mass}}, \tag{11.7}$$

*) Cela équivaut à supposer que la formule de la température $T = \dfrac{\partial U}{\partial s}$ établie plus haut pour les processus réversibles est également valable pour les transformations irréversibles.

où $\rho_k \boldsymbol{F}_k \, \Delta V$ est la force massique extérieure appliquée au k-ième constituant du mélange, $p_k^{ij} n_j \, d\sigma$ sont les composantes de la force surfacique agissant sur l'aire $d\sigma$ de la surface Σ sur le k-ième constituant du mélange; on admet que $p^{ij} n_j \, d\sigma \boldsymbol{\vartheta}_i = \sum_{k=1}^{N} p_k^{ij} n_j \, d\sigma \boldsymbol{\vartheta}_i$ est le vecteur contrainte se rapportant à l'aire $d\sigma$ de la surface Σ pour l'ensemble du mélange; $\boldsymbol{q}_0$ est le vecteur courant d'énergie extérieure dû à la conduction et à la diffusion, $dQ^{(e)}_{\text{mass}}$ est l'apport de chaleur massique extérieure reçue par la particule; ce peut être la chaleur fournie par un rayonnement extérieur ou la chaleur Joule dégagée par les courants électriques. La quantité $\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{I}_k \, \Delta V \, dt$ est égale au travail élémentaire des forces massiques extérieures $\boldsymbol{F}_k$ (différentes, en général, selon les constituants) sur les déplacements intérieurs causés par la diffusion. Si la force $\boldsymbol{F}_k$ rapportée à l'unité de masse est la même pour tous les constituants, on a $\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{I}_k \, \Delta V \, dt = 0$. Par exemple, on a pour la force de la pesanteur $\boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{g}$, $k = 1, 2, \ldots, N$ ($\boldsymbol{g}$ étant l'accélération de la pesanteur), et $\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{I}_k \times \Delta V \, dt = \boldsymbol{g} \cdot (\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{I}_k) \, \Delta V \, dt = 0$, étant donné que $\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{I}_k = 0$.

En se rapportant à la définition des déplacements des points du milieu pris dans son ensemble et à l'égalité (11.7) on peut poser

$$\left.\begin{aligned} dA^{(e)} &= \sum_{k=1}^{N} \rho_k \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{v} \, \Delta V \, dt + \int_{\Sigma} p^{ij} n_j v_i \, dt \, d\sigma \\ &\text{et} \\ dQ^{(e)} + dQ^{**} &= -\nabla_j \Big[q_0^j - \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^{ij} I_{ki}}{\rho_k} \Big] \Delta V \, dt + \\ &\qquad + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{I}_k \, \Delta V \, dt + dQ^{(e)}_{\text{mass}}. \end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

En se basant sur (11.8) on récrit l'équation (11.6) pour l'accroissement total de l'entropie spécifique du mélange $s = S_m/m$ sous la forme

$$\frac{dS_m}{dt} = \rho \, \Delta V \, \frac{ds}{dt} = \Big[-\frac{1}{T} \nabla_j q^j + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N} \mu_k \nabla_j I_k^j + \\ + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{I}_k - \sum_{k,\alpha=1}^{N,\, r} \frac{\mu_k M_k \nu_{k\alpha} w_\alpha}{T} + \frac{\tau^{ij} e_{ij}}{T} \Big] \Delta V + \frac{dQ^{(e)}_{\text{mass}}}{T \, dt}. \tag{11.9}$$

Ici on a utilisé la notation

$$q = q^j \nu_j = q_0 - \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^{ij} I_{kj}}{\rho} \nu_i = q_0 - \sum_{k=1}^{N} p_k^{ij} (v_{kj} - v_j) \nu_i.$$

Le vecteur q caractérise le courant total de l'énergie à travers les éléments de la surface Σ, courant occasionné par la conduction, la diffusion et le travail des forces surfaciques effectué sur les déplacements relatifs des constituants du mélange.

Système complet d'équations du mouvement d'un mélange, établissement des équations cinétiques. Les équations d'équilibre des masses, celles des impulsions de l'ensemble du mélange, les équations d'état (11.4) et l'équation de l'entropie (11.9) forment un système complet d'équations du mouvement du mélange à condition d'y ajouter l'information sur l'apport de chaleur $dQ^{(c)}_{\text{mass}}$ et les équations cinétiques macroscopiques définissant les grandeurs

$$q, \; I_k, \; w_\alpha \quad \text{et} \quad \tau^{ij}$$

L'établissement de ces équations cinétiques constitue le problème fondamental de la thermodynamique des transformations irréversibles *).

Pour résoudre ce problème on aura besoin de toute sorte d'hypothèses sur les propriétés et les mécanismes des effets irréversibles accompagnant le mouvement d'un milieu. Ces hypothèses diffèrent selon les propriétés concrètes du milieu étudié, les classes des mouvements, et peuvent se fonder sur d'autres hypothèses de caractère mathématique justifiées, par exemple, par ce que les états des particules diffèrent peu de l'état d'équilibre **). En fin de compte toutes ces hypothèses doivent être vérifiées par l'expérience. Certaines formules établies à partir des données expérimentales peuvent être de secours dans l'établissement des équations cinétiques.

Lorsqu'on établit les équations cinétiques pour les transformations différant peu de celles réversibles, on peut s'adresser, en particulier, à la méthode d'Onsager exposée au § 8. Les relations qu'on trouvera ainsi pour les milieux et les phénomènes doivent également

*) Pour définir le mouvement de l'ensemble du mélange il n'est pas nécessaire de trouver les quantités q_0, p_k^{ij}, v_k introduites plus haut. Aucune équation n'est écrite pour la définition de celles-ci, ce sont des quantités auxiliaires ne servant que pour une fondation heuristique de l'équation (11.9) laquelle peut d'ailleurs être obtenue en utilisant, au lieu de (11.7), d'autres hypothèses sur l'apport d'énergie extérieure.

**) Dans l'ouvrage de L. Sédov *Sur la forme générale des équations de la cinétique des réactions chimiques dans les gaz* (Doklady Acad. nauk de l'U.R.S.S., vol. LX, n° 1, 1948) sont proposées certaines formes générales des équations cinétiques pour les réactions chimiques irréversibles.

être vérifiées par l'expérience même si elles sont appuyées par des déductions basées sur les théories statistiques.

Formule du taux de production d'entropie. L'application de la théorie d'Onsager nécessite de présenter la variation totale d'entropie $m\frac{ds}{dt}$ sous la forme d'une somme

$$m\frac{ds}{dt}=m\frac{d_{\mathrm{i}}s}{dt}+m\frac{d_{\mathrm{e}}s}{dt}.$$

On arrive à fractionner l'accroissement de l'entropie en s'aidant de l'équation (11.9) et des suppositions traduites par les formules ci-après.

La quantité $m\frac{d_{\mathrm{e}}s}{dt}$ est définie comme la variation de l'entropie due à l'apport de chaleur $dQ^{(\mathrm{e})}_{\mathrm{mass}}$ fournie au volume ΔV du milieu par des corps extérieurs en interaction avec ce milieu ainsi qu'au flux d'entropie entrant dans la particule à travers la surface Σ de celle-ci. Compte tenu de (11.9) posons *)

$$m\frac{d_{\mathrm{e}}s}{dt}=\frac{dQ^{(\mathrm{e})}_{\mathrm{mass}}}{T\,dt}+\Big[\sum_{k=1}^{N}\operatorname{div}\frac{\mu_k I_k}{T}-\operatorname{div}\frac{q}{T}\Big]\Delta V=$$

$$=\frac{dQ^{(\mathrm{e})}_{\mathrm{mass}}}{T\,dt}+\int_{\Sigma}\frac{\sum_{k=1}^{N}\mu_k I_k-q}{T}\cdot n\,d\sigma. \qquad (11.10)$$

Une fois $m\frac{d_{\mathrm{e}}s}{dt}$ fixé, on obtient pour le taux de production d'entropie $m\frac{d_{\mathrm{i}}s}{dt}$ aux dépens des effets intérieurs irréversibles la formule suivante :

$$m\frac{d_{\mathrm{i}}s}{dt}=\Big\{-\frac{\operatorname{grad}T}{T^2}\cdot q+\frac{\tau^{ij}e_{ij}}{T}+$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\Big[\frac{F_k}{T}-\operatorname{grad}\Big(\frac{\mu_k}{T}\Big)\Big]\cdot I_k-\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k M_k \nu_{k\alpha}}{T}w_\alpha\Big\}\Delta V. \qquad (11.11)$$

Fonction des dissipations. La formule du taux de production d'entropie (11.11) peut s'écrire ainsi :

$$\rho\frac{d_{\mathrm{i}}s}{dt}=\sigma=\sum_{\beta}X_\beta\chi^\beta>0, \qquad (11.12)$$

---

*) Soulignons que la présence du terme $\frac{1}{T}\frac{dQ^{(\mathrm{e})}_{\mathrm{mass}}}{dt}$ dans (11.10) est due à l'hypothèse de la nature réversible de ce flux de chaleur.

où les quantités χ^β correspondent dans l'ordre de numérotage général aux composantes vectorielles q^i, les I_k^i aux composantes du tenseur des contraintes visqueuses τ^{ij} $(i, j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, \ldots, N)$ et aux quantités scalaires w_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$. Par X_β sont désignés, d'une façon évidente, les coefficients des χ^β correspondants.

En poursuivant la construction du modèle nous supposons qu'entre les quantités X_β et χ^β existent des relations finies. Cela permet de considérer σ comme une fonction de X_β ou de χ^β, où p, T et les concentrations des constituants du mélange $c_i = \rho_i/\rho$ entrent comme paramètres

$$\sum_\beta X_\beta \chi^\beta = \sigma(p, T, c_i, X_i) = \sigma(p, T, c_i, \chi^j). \tag{11.13}$$

Dans certains cas le problème de l'établissement des équations cinétiques peut être ramené à celui de la définition des relations fonctionnelles

$$\chi^\beta = \chi^\beta(g_{ij}, p, T, c_1, c_2, \ldots, c_N, X_1, X_2, \ldots), \tag{11.14}$$

où g_{ij} sont les composantes du tenseur métrique, et p, T, c_i sont des scalaires. Dans le cas général les relations (11.14) pour I_k^i doivent remplir les conditions suivantes

$$\sum_{k=1}^N I_k^i = 0.$$

Les systèmes correspondants des fonctions conjuguées X_β et χ^β peuvent être représentés à l'aide des notations suivantes:

$$X_\beta \to \chi^\beta,$$

$$-\frac{\operatorname{grad} T}{T^2} = \omega = \omega^i \partial_i \to q,$$

$$\frac{1}{T} F_k - \operatorname{grad} \frac{\mu_k}{T} = \omega_k = \omega_k^i \partial_i \to I_k,$$

$$-\sum_{k=1}^N \frac{\mu_k M_k \nu_{k\alpha}}{T} = \gamma_\alpha \to w_\alpha,$$

$$e_{ij} \to \frac{1}{T} \tau^{ij}.$$

Outre les scalaires et les composantes des vecteurs et tenseurs désignés par X_β on trouve parmi les arguments dans les relations (11.14) X_β un seul tenseur paramétrique, tenseur métrique de composantes g_{ij}. Ceci équivaut à l'hypothèse physique de l'isotropie du modèle de milieu considéré. Comme σ est un scalaire, ses arguments dans (11.13) peuvent être les scalaires p, T, c_k, γ_α et seules les combinaisons invariantes des composantes suivantes des vecteurs et tenseurs: ω^i, ω_k^i, e_{ij}, g_{ij}.

Forme générale de la fonction bilinéaire des dissipations d'un milieu isotrope; relations d'Onsager pour un milieu isotrope. En analysant les transformations irréversibles différant peu des processus réversibles thermodynamiquement équilibrés envisagés au § 10, on admet souvent dans les applications que les fonctions (11.14) représentent les formes linéaires en X_β, c'est-à-dire que

$$\chi^\beta = \sum_\delta L^{\beta\delta} X_\delta, \tag{11.15}$$

où les composantes matricielles $L^{\beta\delta}$ comportent les scalaires, les composantes des tenseurs du second ordre et les composantes des tenseurs du quatrième ordre.

S'il y a isotropie, les tenseurs correspondants formés par les coefficients $L^{\beta\delta}$ ne dépendent que des scalaires et du tenseur métrique g_{ij} *). La relation entre $L^{\beta\delta}$ et g^{ij} est trouvée plus bas, quant à la dépendance de $L^{\beta\delta}$ des paramètres scalaires d'état p, T, c_1, c_2, ..., c_k, elle doit être établie complémentairement. Si l'on a les liaisons linéaires (11.15), la quantité σ (X_β) est une forme bilinéaire en X_β.

Il est aisé de voir que pour un milieu isotrope la forme bilinéaire pour σ peut s'écrire comme suit:

$$\sigma = a_0 T^2 g_{ij}\omega^i\omega^j + 2a^k g_{ij}\omega^i\omega_k^j + a^{kl} g_{ij}\omega_k^i\omega_l^j + b^{sm} T\gamma_s\gamma_m + \\ + 2b^s\gamma_s g^{ij} e_{ij} + \frac{\lambda}{T}(g^{ij}e_{ij})^2 + \frac{2\mu}{T} g^{ij} g^{mn} e_{im} e_{jn}. \tag{11.16}$$

Il en découle que pour définir complètement la fonction il faut fixer les coefficients a_0, a^k, $a^{kl} = a^{lk}$, $b^{sm} = b^{ms}$, b^s, λ et μ, où k, $l = 1, 2, \ldots, N$; m, $s = 1, 2, \ldots, r$. Le nombre de ces coefficients indépendants dans (11.16) est

$$1 + N + \frac{N(N+1)}{2} + \frac{r(r+1)}{2} + r + 2 = 3 + \frac{N(N+3)}{2} + \frac{r(r+3)}{2}.$$

Les coefficients de (11.16) doivent satisfaire aussi à la condition $\sigma \geqslant 0$.

Conformément à la théorie générale des transformations irréversibles exposée au § 8 en utilisant la règle d'Onsager on peut écrire les relations (11.15) comme suit:

$$q_i = \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial\omega^i} = a_0 T^2 \omega_i + \sum_k a^k \omega_{ki} = \\ = -a_0 \frac{\partial T}{\partial x^i} + \sum_k a^k \left[\frac{F_{ki}}{T} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mu_k}{T}\right)\right], \tag{11.17}$$

*) Le bien-fondé de cette affirmation d'ailleurs évidente est exposé en détail dans le Supplément I.

$$I_{ki} = \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial\omega_k^i} = a^k\omega_i + a^{kl}\omega_{li} =$$

$$= -a^k\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x^i} + \sum_l a^{kl}\left[\frac{F_{li}}{T} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mu_l}{T}\right)\right], \qquad (11.18)$$

$$w_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial\gamma_\alpha} = b^\alpha \operatorname{div} v + \sum_s b^{s\alpha}T\gamma_s = -b^\alpha\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} - \sum_{k,s} b^{s\alpha}\mu_k M_k \nu_{ks}, \qquad (11.19)$$

$$\frac{\tau^{ij}}{T} = \frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial e_{ij}} = g^{ij}\sum_s b^s\gamma_s + \frac{\lambda}{T}g^{ij}\operatorname{div} v + \frac{2\mu}{T}e^{ij}. \qquad (11.20)$$

La dernière relation diffère de la loi habituelle de Navier-Stokes pour les contraintes visqueuses par le premier terme qui traduit l'influence de l'irréversibilité des transformations chimiques ou de phase sur la valeur de la composante du vecteur des contraintes, normale à l'élément de surface considéré.

Les conditions $\sum_{k=1}^{N} I_{ki} = 0$ fournissent $N + 1$ relations pour les coefficients a^k et a^{kl}, à savoir

$$\sum_{k=1}^{N} a^k = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{N} a^{kl} = 0. \qquad l = 1, 2, \ldots, N. \qquad (11.21)$$

Ainsi donc, les formules (11.16)-(11.20) ne contiennent que

$$n = 2 + \frac{N(N+1)}{2} + \frac{r(r+3)}{2}$$

coefficients indépendants qui sont, en général, fonctions de p, T, c_k. Notons que les formules de départ de la forme générale (les relations linéaires (11.15)) contiennent $n_0 = (3 + 3N + r + 6)^2 = (9 + 3N + r)^2$ coefficients $L^{\beta\delta}$.

La théorie générale précédente permet de réduire le nombre de coefficients qu'il faut donner de la valeur *)

$$n_0 - n = 79 + \frac{17}{2}N^2 + \frac{107}{2}N + \frac{r^2}{2} + \frac{33r}{2} + 6Nr.$$

Ainsi, par exemple, dans le cas d'un mélange de trois constituants ($N = 3$) et d'une réaction ($r = 1$) on a $n_0 = 361$ et le nombre de coefficients indépendants $n = 10$, d'où l'on voit que le nombre de coefficients à déterminer s'est réduit de $n_0 - n = 351$.

On peut effectuer quelques simplifications et modifications dans les formules (11.17) à (11.18) en y développant grad $\frac{\mu_k(P, T, c_k)}{T}$ et

*) En pratique on admet en outre que $b^s = 0$ ($s = 1, 2, \ldots, r$).

en calculant les coefficients réunis de $\frac{\partial T}{\partial x^i}$, $\frac{\partial p}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial c_k}{\partial x^i}$. Pour déterminer les coefficients a_0, a^k, a^{kl}, b^s, $b^{s\alpha}$, λ et μ ou leurs certaines combinaisons on peut recourir aux théories statistiques et aux résultats expérimentaux correspondants.

La théorie exposée est valable non seulement pour un mélange de gaz parfaits mais aussi pour nombre de modèles des milieux réels. On peut trouver les applications et les simplifications ultérieures de cette théorie dans les ouvrages et les articles spécialisés.

Relation entre les coefficients phénoménologiques a_0, a^k, a^{kl} et les coefficients de transfert d'un mélange des gaz parfaits. En appliquant la formule des potentiels chimiques (9.19) au mélange de gaz parfaits on peut présenter les flux q_i et I_{ki} exprimés par (11.17) et (11.18) au moyen des gradients des paramètres gazodynamiques T, p, c_i ($i = 1, 2, \ldots, N$). Pour ce faire, écrivons (9.19) sous la forme

$$\mu_k = \mu_k^0(p, T) + R_k T \ln z_k, \tag{11.22}$$

où

$$\mu_k^0(p, T) = U_{0k} + R_k T_0 - T s_{0k} + \int_{T_0}^{T} c_{p_k}\, dT - \int_{T_0}^{T} \frac{c_{p_k}}{T}\, dT + RT \ln \frac{p}{p_{0k}}$$

et z_k désigne la concentration molaire du k-ième constituant

$$z_k = \frac{p_k}{p} = \frac{n_k}{n} = \frac{M}{M_k} c_k.$$

(11.12) permet d'écrire

$$T\, d\frac{\mu_k}{T} = T\, d\left(\frac{\mu_k^0}{T} + R_k \ln z_k\right) =$$

$$= \frac{R_k T}{z_k}\, dz_k + \left(\frac{\partial \mu_k^0}{\partial p}\right) dp + T \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mu_k^0}{T}\right)_p dT, \tag{11.23}$$

$$\left(\frac{\partial \mu_k^0}{\partial p}\right) = \frac{R_k T}{p} = \frac{R_0 T}{M_k p} = \frac{1}{n M_k}, \tag{11.24}$$

$$T \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mu_k^0}{T}\right) = -\frac{1}{T}\left(U_{0k} + R_k T_0 + \int_{T_0}^{T} c_{p_k}\, dT\right) = -\frac{i_k}{T}, \tag{11.25}$$

où i_k est l'enthalpie spécifique du k-ième constituant. En se servant de (11.23), (11.24) et (11.25) on obtient pour ω_k l'expression suivante :

$$\omega_k = \frac{1}{T}\left[F_k - T\nabla \frac{\mu_k}{T}\right] = \frac{1}{T}\left(F_k - \frac{p}{\rho_k}\nabla z_k - \frac{1}{n M_k}\nabla p + \frac{i_k}{T}\nabla T\right). \tag{11.26}$$

En utilisant (11.26) on écrit les formules (11.18) sous la forme

$$I_k = -\frac{a_k}{T^2}\nabla T + \sum \frac{a^{kl}}{T}\left[F_l - T\nabla\left(\frac{\mu_l}{T}\right)\right] =$$

$$= -p\sum_l \frac{a^{kl}}{T\rho_l}\left(\nabla z_l + \frac{z_l}{p}\nabla p - \frac{\rho_l}{p}F_l\right) - \left(\frac{a^k}{T} - \sum_l \frac{a^{kl}}{T} i_l\right)\frac{1}{T}\nabla T =$$

$$= \rho\sum_l \frac{M_k M_l}{M^2} D^{kl} d_l - D_k^T \frac{1}{T}\nabla T, \quad (11.27)$$

où

$$d_l = \nabla z_l + (z_l - c_l)\frac{1}{p}\nabla p + \frac{c_l}{p}\left(\sum_k \rho_k F_k - \rho F_l\right)$$

et où l'on a introduit les coefficients multicomposants de diffusion D^k et de thermodiffusion D_k^T d'après les formules

$$D^{kl} = -\frac{p}{\rho T}\frac{M^2}{M_k M_l}\left(\frac{a^{kl}}{\rho_l} - \frac{a^{kk}}{\rho_k}\right) = -\frac{R_0 M}{M_k M_l}\left(\frac{a^{kl}}{\rho_l} - \frac{a^{kk}}{\rho_k}\right), \quad (11.28)$$

$$D_k^T = \frac{a^k}{T} - \sum_l \frac{a^{kl}}{T} i_l \quad (k, l = 1, 2, \ldots, N). \quad (11.29)$$

La validité des formules (11.27) et des égalités

$$\sum_k D_k^T = 0, \quad D^{kk} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} d_k = 0$$

découle des propriétés (11.21). Il est aisé d'obtenir à partir des formules (11.28) et (11.29) les formules réciproques exprimant a^k et a^{kl} par D_k^T et D^{kl}.

De façon analogue on peut récrire les formules (11.17) pour un mélange de gaz parfaits sous la forme

$$q = -a_0\nabla T + \sum_k \frac{a^k}{T}\left[F_k - T\nabla\left(\frac{\mu_k}{T}\right)\right] =$$

$$= -k\nabla T + \sum_l i_l I_l - p\sum_l \frac{D_l^T}{\rho_l} d_l, \quad (11.30)$$

où

$$k = a_0 - 2\sum_k \frac{a^k i_k}{T^2} + \sum_{k,\,l} \frac{a^{kl} i_k i_l}{T^2}. \quad (11.31)$$

La théorie cinétique des gaz fait un usage constant des coefficients D^{kl}, D_k^i et k qui sont définis ici par les coefficients phénoménologiques a_0, a^k et a^{kl} d'après les formules (11.28), (11.29) et (11.31).

Si le milieu est anisotrope à cause de l'action du champ électromagnétique, par exemple, la théorie précédente se complique. Dans ce cas il faut ajouter aux arguments de σ, en plus du tenseur métrique, les tenseurs caractérisant l'anisotropie.

CHAPITRE VI

NOTIONS ET ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

§ 1. Notions fondamentales de l'électrodynamique. Champ électromagnétique. Equations de Maxwell dans le vide

De nos jours les problèmes concernant l'étude du mouvement du milieu continu compte tenu des effets électromagnétiques acquièrent une importance de plus en plus grande et les notions principales d'électrodynamique s'avèrent indispensables dans un cours de mécanique des milieux continus.

On espère que les faits expérimentaux les plus simples, ainsi que les lois électrodynamiques sont connus du lecteur des cours élémentaire et général de la physique. Formulons les lois fondamentales d'électrodynamique sous forme d'équations de Maxwell de façon axiomatique, en tant que résultats de l'analyse et des généralisations théoriques à partir des expériences et observations.

On établit les équations de Maxwell à la base d'un certain nombre de notions mathématiques abstraites des caractéristiques électromagnétiques que l'on introduit afin de décrire les propriétés électromagnétiques des corps et des champs. L'introduction et l'analyse de ces notions et équations sont liées à un travail gigantesque, à l'évolution mouvementée pendant plus d'un siècle des idées puisées dans la recherche scientifique sur les phénomènes électriques.

L'efficacité des méthodes théoriques basées sur les équations de Maxwell a été confirmée par toute la pratique d'étude des effets électromagnétiques et par toutes les données des expériences macroscopiques connues.

Dans notre exposé de l'électrodynamique nous laisserons de côté l'aspect historique et nous nous intéresserons surtout aux notions fondamentales dont nous donnerons une description succincte ayant en vue les applications de l'électrodynamique aux problèmes de la mécanique des milieux continus. Remarquons seulement que la théorie du champ électromagnétique en tant que théorie d'un objet réel fut créée par Faraday et ne fut confirmée d'une façon expérimentale convaincante qu'à la fin du XIXe siècle lorsque Hertz obtint les ondes électromagnétiques et prouva ainsi l'existence réelle du champ électromagnétique.

Précisons d'abord le rôle que jouent les phénomènes électromagnétiques dans la mécanique des milieux continus. La physique connaît quatre types essentiels d'interaction des objets matériels; il s'agit notamment des forces de gravitation, électromagnétiques,

nucléaires et d'interactions faibles dans la théorie des particules élémentaires.

Les interactions internes que nous nous proposons d'étudier résultent principalement des effets électromagnétiques qui conditionnent les contraintes macroscopiques dans les corps solides, liquides ou gazeux. En particulier, les chocs s'effectuant entre les molécules et les atomes sont dus principalement aux forces électromagnétiques.

En outre, sous certaines conditions, les corps peuvent être chargés électriquement et traversés par des courants. Il faut alors tenir compte des forces d'interaction qui s'y créent dans le système de forces appliqué au volume du milieu continu. De tels effets se manifestent surtout lors du mouvement du plasma. Le plasma est un gaz qui comporte un grand nombre d'électrons libres et d'ions, d'où son interaction considérable avec le champ électromagnétique.

Rappelons maintenant quelques-unes des définitions et notions fondamentales de l'électrodynamique.

Loi de Coulomb pour des charges au repos. Comme le prouve l'expérience, deux particules d'un milieu au repos, de charges e_1 et e_2, entrent en interaction avec une force analogue à la force d'attraction exercée entre deux masses, à savoir

$$\boldsymbol{F} = \pm k \frac{e_1 e_2}{r^3} \operatorname{grad} r, \qquad 1.1$$

où r est la distance entre les particules chargées, k est un coefficient constant. La relation ci-dessus porte le nom de loi de Coulomb.

Contrairement à la force gravitationnelle qui est toujours une force d'attraction, la force $\boldsymbol{F}$ est une force d'attraction, lorsque les charges e_1 et e_2 sont de nom différent, et une force de répulsion lorsqu'elles sont de même nom.

Les effets de la force d'attraction gravitationnelle sont importants lorsque les masses en interaction m_1 et m_2 sont très grandes. Les forces d'interaction électriques dépassent de beaucoup celles de gravitation. La force d'attraction gravitationnelle entre deux électrons est de 10^{39} fois inférieure à leur répulsion électrique. Ce nombre est tellement grand que l'on le réalise à peine à l'aide de nos conceptions usuelles.

Densité de charge. En mécanique des milieux continus, il est naturel d'introduire une distribution continue des charges e ainsi que l'on suppose une distribution continue de masses. La densité de charge est définie comme

$$\rho_e = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta V},$$

où Δe est la charge globale dans le volume ΔV.

Pour les corps électriquement neutres, $\Delta e = 0$ et $\rho_e = 0$. La densité de charge ρ_e est positive ou négative selon les concentrations locales d'ions ou d'électrons. En réalité, pour tous les corps ρ_e est constamment proche de zéro, car les charges de même signe se repoussent; ainsi, de grandes agglomérations de charges positives ou négatives ne sont pas durables en règle générale.

Courant électrique. Le courant électrique est un mouvement des particules chargées. Ainsi, lorsque le corps possède les électrons libres se mouvant d'une façon orientée relativement aux ions, cela signifie que le corps est traversé par des courants électriques. Cependant, malgré la présence de flux macroscopiques d'ions et d'électrons, la vitesse macroscopique sommaire des particules du corps peut être nulle.

Par sa nature le courant électrique ressemble à une diffusion intense ordonnée. On peut envisager les courants dans des milieux au repos aussi bien que dans ceux en mouvement. La densité de courant se caractérise par le vecteur de densité de courant $\boldsymbol{j}$ dont la valeur est égale à la charge totale qui traverse en unité de temps l'aire unité, normale au vecteur $\boldsymbol{j}$.

Polarisation des atomes. Dans les conditions normales, l'atome de matière est électriquement neutre, sa charge sommaire est nulle. Il se peut pourtant qu'il se trouve un ensemble des atomes très voisins; leurs charges se déplaceront alors l'une par rapport à l'autre de sorte qu'un atome neutre se transforme en un dipôle ou un multipôle. Ce phénomène s'appelle polarisation. La disposition ordonnée d'une grande quantité d'atomes ou de molécules polarisés sous l'effet du champ électrique extérieur provoque un effet macroscopique de polarisation électrique des parties macroscopiques du milieu. Il est évident pourtant que le mouvement thermique chaotique s'oppose en général à la polarisation macroscopique.

Interactions magnétiques. Outre les interactions des charges au repos mentionnées plus haut il existe encore des interactions magnétiques. Ainsi, par exemple, le fer aimanté attire la limaille de fer, l'aiguille aimantée d'une boussole se range suivant le méridien terrestre. On voit qu'il y a sur Terre des forces qui font tourner l'aiguille de boussole dans une direction déterminée.

L'existence d'interactions magnétiques a suggéré l'idée d'introduire la notion de charges magnétiques et d'essayer d'écrire pour elles la loi analogue à la loi de Coulomb pour les charges électriques. Or, l'expérience a démenti l'existence de charges magnétiques dans la nature; on a trouvé que les interactions magnétiques se ramènent aux interactions des courants électriques (c'est-à-dire des charges en mouvement). En particulier, les propriétés magnétiques de di-

verses substances s'expliquent par les courants microscopiques créés dans les atomes par suite du mouvement des électrons autour des noyaux et par suite d'une « rotation » propre des électrons et des noyaux (spins). Dans des conditions normales, les atomes dans la plupart des corps sont orientés d'une façon chaotique et l'effet des courants intra-atomiques ne se manifeste pas. Si donc se crée une orientation ordonnée des particules élémentaires dont se compose le corps, l'effet macroscopique apparaît dans les propriétés magnétiques liées au phénomène d'aimantation.

Vecteurs champ électrique et champ magnétique. Soit dans l'espace l'ensemble de charges au repos relativement à un certain système de coordonnées inertial K. La physique possède une méthode générale qui permet d'étudier les forces électriques exercées par un système de charges sur une charge élémentaire d'essai e placée en un point donné x^1, x^2, x^3 de l'espace. Comme on sait, la force agissant sur une charge d'essai immobile ne dépend que de la position et de la grandeur de cette dernière. Elle est égale à

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}, \tag{1.2}$$

où $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x^1, x^2, x^3)$ est un vecteur dit vecteur champ électrique.

Le champ du vecteur $\boldsymbol{E}$ représente la somme des champs produits par des charges isolées.

On crut d'abord que ce champ n'est qu'une abstraction mathématique aidant le calcul des forces exercées sur la charge d'essai. Les recherches qui suivirent démontrèrent que le champ électrique $\boldsymbol{E}$ devait être envisagé en tant qu'objet matériel existant dans l'espace indépendamment de la charge d'essai et différant en principe d'un corps matériel.

Il y a deux points de vue sur les relations entre les charges et le champ. On peut croire que le champ est engendré par les charges ou bien que ces dernières sont des points singuliers (objets physiquement petits) du champ électrique existant.

De façon analogue, en sommant les effets des courants élémentaires, on introduit le vecteur champ magnétique $\boldsymbol{H}$ comme une caractéristique du champ magnétique permettant d'évaluer les forces d'interactions magnétiques. Afin de caractériser l'aimant (ou courant) d'essai élémentaire, on introduit un petit dipôle magnétique de moment $\boldsymbol{d}$ tel que le moment du couple de forces que le champ exerce sur l'aiguille magnétique élémentaire de moment $\boldsymbol{d}$ soit calculé selon la formule

$$\mathfrak{M} = \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{H}. \tag{1.3}$$

Lorsque le champ magnétique est uniforme, donc $\boldsymbol{H} = \text{const}$, la force résultante agissant sur le dipôle élémentaire est nulle. Seul le moment $\mathfrak{M}$ est différent de zéro.

Lorsque le champ $\boldsymbol{H}$ n'est pas uniforme, on voit apparaître, outre le moment $\mathfrak{M}$, la force $\mathbf{F}'$:

$$\mathbf{F}' = (\boldsymbol{d} \cdot \nabla) \boldsymbol{H} = (d^i \nabla_i) \boldsymbol{H} = d \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial s},$$

où le symbole $\partial/\partial s$ désigne une différentiation effectuée suivant la direction du moment du dipôle au point d'existence du courant élémentaire.

Dans des conditions statiques, les intensités des champs électrique et magnétique en un point donné de l'espace peuvent être définies d'après les mesures de la force (1.2) et du moment (1.3) qui agissent sur les charges électriques d'essai immobiles et sur les aimants élémentaires différemment orientés (courants électriques élémentaires) placés en ce point.

Ces expériences simples avec les éléments d'essai peuvent être compliquées, généralisées et appliquées au cas des charges d'essai mobiles ainsi qu'au cas des courants et des champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ variables dans le temps.

Ainsi donc, le champ électromagnétique dans le vide, en chaque point de l'espace et à chaque instant de temps, peut être caractérisé par deux vecteurs : le vecteur champ électrique $\boldsymbol{E}$ et le vecteur champ magnétique $\boldsymbol{H}$. Les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$, la densité de la charge ρ_e et le vecteur de densité du courant électrique $\boldsymbol{j}$ sont des notions fondamentales de l'électrodynamique.

Equations de Maxwell en électrostatique. On s'en convainc aisément que la loi de Coulomb décrivant le champ $\boldsymbol{E}$ d'un système de charges immobiles ponctuelles ou distribuées, dans le système de coordonnées inertial, peut être écrite sous la forme différentielle comme suit :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho_e, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0. \tag{1.4}$$

La solution générale du système d'équations (1.4) dans un espace infini et à condition que le vecteur $\boldsymbol{E}$ tend vers zéro à l'infini conduit à la loi de Coulomb.

Passer de la loi de Coulomb expérimentale simple aux équations (1.4) qui sont les équations de Maxwell pour le système de charges immobiles c'est énoncer la loi fondamentale de l'électrodynamique en termes d'équations différentielles. Ce passage ressemble beaucoup au passage de la loi de l'attraction universelle de Newton aux équations différentielles en théorie du potentiel newtonien. Vu l'importance du problème expliquons ce qui vient d'être dit plus en détail.

Equations différentielles du champ gravitationnel en mécanique newtonienne. Deux points matériels de masses m et m_k s'attirent d'après la loi de Newton et la force exercée sur le point m du côté

du point m_k est égale à

$$\boldsymbol{F}_k = -f\frac{mm_k}{r_k^2}\boldsymbol{r}_k^0,$$

où r_k est la distance séparant les points m et m_k, f la constante gravitationnelle, $\boldsymbol{r}_k^0$ le vecteur unitaire dirigé de m_k vers m.

Comme on sait, cette force est potentielle, c'est-à-dire que $\boldsymbol{F}_k = \operatorname{grad} U_k$ et le potentiel $U_k = f\frac{mm_k}{r_k}$.

Quand on a dans l'espace n points matériels de masses m_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), ceux-ci exercent sur un point de masse $m = 1$, qui peut être placé en tout point de l'espace (masse d'essai), la force $\boldsymbol{F} = \Sigma\, \boldsymbol{F}_k$ dont le potentiel est

$$U = \sum_k U_k = f\sum_k \frac{m_k}{r_k}, \qquad \boldsymbol{F}_k = \operatorname{grad} U_k. \tag{1.5}$$

Les masses distribuées m_k créent dans l'espace un champ gravitationnel de potentiel U décelable à l'aide d'une masse d'essai placée au point considéré de l'espace.

Ecrivons l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire le potentiel des forces d'attraction U.

La fonction $1/r_k$, où

$$r_k = \sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+(z-z_k)^2},$$

est la distance entre le point x, y, z, où se situe la masse d'essai, et le point x_k, y_k, z_k, occupé par la k-ième masse engendrant le champ gravitationnel, est une fonction harmonique. En tous points x, y, z pour lesquels $r_k \neq 0$ la fonction $1/r_k$ satisfait à l'équation de Laplace

$$\Delta\frac{1}{r_k} = \frac{\partial^2(1/r_k)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(1/r_k)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(1/r_k)}{\partial z^2} = 0.$$

Par conséquent, le potentiel U_k du champ gravitationnel d'un point matériel satisfait à l'équation

$$\Delta U_k = 0$$

ou

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}_k = 0, \quad \boldsymbol{F}_k = \operatorname{grad} U_k, \quad \text{c'est-à-dire que } \operatorname{rot}\boldsymbol{F}_k = 0. \tag{1.6}$$

L'équation de Laplace est linéaire. Le potentiel du champ gravitationnel $U(x, y, z)$, créé par des masses continûment distribuées à l'intérieur d'un volume V, s'écrit d'après (1.5) sous la forme

$$U(x, y, z) = f\int_V \frac{\rho\, d\tau}{r} \qquad (\rho\, d\tau = dm). \tag{1.7}$$

La fonction $U(x, y, z)$ satisfait évidemment à l'équation de Laplace

$$\Delta U = 0$$

en des points où il n'y a pas de masses.

L'équation de Laplace pour U est équivalente aux équations

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U. \tag{1.8}$$

On peut montrer que, sous des restrictions assez générales pratiquement acceptables imposées à la distribution de la densité ρ, le potentiel U (1.7) du champ gravitationnel aux points x, y, z, situés à l'intérieur de V, satisfait à l'équation de Poisson

$$\Delta U = -4\pi\rho f. \tag{1.9}$$

L'équation (1.9) est équivalente aux équations

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = -4\pi\rho f, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U. \tag{1.10}$$

Ainsi donc, on peut ramener le problème de la définition du potentiel d'un champ gravitationnel et de la force exercée par le champ sur la masse d'essai unitaire à la recherche de la fonction $U(x, y, z)$, tendant vers zéro à l'infini et satisfaisant à l'équation de Laplace partout hors de V et à celle de Poisson partout à l'intérieur de V, ou à la recherche des forces $\boldsymbol{F}$ satisfaisant aux équations (1.8) et (1.10).

Une telle position du problème dans la théorie du potentiel newtonien est entièrement analogue à la position du problème d'électrostatique à la base des équations de Maxwell (1.4). On peut montrer que dans l'espace infini la fonction cherchée U s'annulant à l'infini est donnée par la formule (1.7) exprimant la loi de l'attraction gravitationnelle *).

Pour les champs électriques et magnétiques non stationnaires, on parvient à obtenir d'une façon analogue, à la base des lois expérimentales de l'induction, une généralisation des équations (1.4).

Equations de Maxwell pour le champ électromagnétique dans le vide. Dans un système inertial et dans l'espace vide dépourvu de corps matériels (ici $\rho_e = 0$, car seuls les corps matériels peuvent être porteurs des charges), ces équations prennent la forme

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{1.11}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0. \tag{1.12}$$

Il est commode de prendre pour équations initiales de base, abstraction mathématique des observations expérimentales, les équations de Maxwell (1.11) au lieu des lois de Coulomb ou d'autres lois

*) Le problème est détaillé dans le second volume du présent ouvrage (voir ch. VIII, § 26).

électrodynamiques plus étroitement liées, historiquement et pratiquement, à l'expérience directe. Dans les équations (1.11) et (1.12), c est une constante ayant la dimension de la vitesse; on verra par la suite qu'elle doit être envisagée comme la vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques, c'est-à-dire comme la vitesse de la lumière.

Les équations (1.11) et (1.12) sont à la base de la physique; ce sont les équations fondamentales de l'optique et de la radiotechnique. Elles décrivent la propagation dans le vide des ondes lumineuses et des ondes électromagnétiques en général ainsi que beaucoup d'autres phénomènes.

Unités de mesure des grandeurs électromagnétiques. Nombre de caractéristiques électromagnétiques sont des grandeurs dimensionnées. En établissant les formules et les équations concrètes pour les grandeurs électromagnétiques on impose une certaine corrélation entre les unités de mesure de ces grandeurs. En particulier, en écrivant les équations de Maxwell sous la forme (1.11) et (1.12) on a en vue que $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ sont mesurés en mêmes unités.

Lorsqu'on peut choisir les unités de mesure pour la force, la masse et l'accélération indépendamment les unes des autres, l'équation fondamentale de Newton $\boldsymbol{F} = k m \boldsymbol{a}$ doit être écrite avec une constante k dimensionnée; pour $k = 1$, ces unités de mesure sont mutuellement dépendantes.

La constante dimensionnée c dans les équations (1.11) et (1.12) ou la constante f dans la loi d'attraction peut être posée égale à l'unité, ce qui est admis par certains auteurs. Pourtant, en posant dans (1.11) et (1.12) $c = 1$ on admet que soit la vitesse de la lumière est prise comme unité de mesure pour les vitesses, soit les unités de mesure pour $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ dépendent de celles de la longueur et du temps. De même, pour $f = 1$ dans la loi d'attraction et, en même temps, pour $k = 1$ dans la loi de Newton, $\boldsymbol{F} = k m \boldsymbol{a}$, les unités de mesure pour la masse s'avèrent dépendantes de celles des distances et du temps et ainsi de suite. Dans de nombreux domaines de l'expérience où l'on rencontre les grandeurs en question, ces conditions subsidiaires ne sont pas liées à la nature des grandeurs et des processus physiques. De telles conditions sont par conséquent incommodes, bien que logiquement admissibles. Ainsi, par exemple, on peut mesurer la vitesse d'un train en fractions de la vitesse de la lumière, mais ce n'est pas commode, bien que la lumière « travaille » dans les signaux lumineux dont sont équipés les chemins de fer.

La mesure des distances entre les corps célestes en astronomie ou entre les villes en géographie à un centimètre près est dépourvue de sens pratique bien qu'il soit en principe possible d'utiliser dans ces cas le centimètre comme unité de mesure. Il n'est pas inutile de se rappeler que pour connaître la valeur numérique d'une longueur on

doit appliquer successivement à celle-ci une longueur étalon (unité de longueur).

Il va de soi que les échelles physiques choisies pour mesurer diverses grandeurs doivent être comparables avec celles-ci.

En général, le profit tiré de la standardisation et de l'unification des unités de mesure est souvent discutable; on voit surgir des incommodités rendant difficile la conception adéquate des phénomènes étudiés, les traditions habituelles de la pratique courante sont également menacées. En pratique on se heurte à des complications même s'il s'agit de l'emploi indiscutable du point de vue scientifique des mêmes unités, centimètres ou pouces, par exemple.

Il n'est pas en général avantageux de fixer les constantes physiques dans le but de choisir les unités de mesure. La grandeur fondamentale en physique, la vitesse de la lumière n'est pas du tout essentielle dans beaucoup de problèmes et peut parfois être posée égale à l'infini. L'introduction dans de tels problèmes de restrictions imposées par la valeur de la vitesse de la lumière serait une complication superflue et artificielle.

La forme des équations de Maxwell (1.11) et (1.12) est une « bonne » forme admise dans de nombreux cours, ouvrages et travaux scientifiques des savants les plus célèbres du passé et du présent.

L'étude de différents systèmes d'unités électromagnétiques qui sont d'ailleurs très nombreux dépasse le cadre du présent ouvrage, étant bien éclairée dans les cours élémentaire et général de la physique. Pour les applications, lorsqu'on se propose de trouver la solution numérique des problèmes concrets, il est indispensable de savoir choisir les unités de mesure. Les équations (1.11) et (1.12) et les lois correspondantes étant fixées, l'évolution de la théorie générale de la mécanique des milieux continus ne sera plus en rapport avec le choix concret des systèmes d'unités de mesure.

Le système d'équations de Maxwell dans le vide est complet et non contradictoire. Le système d'équations (1.11) et (1.12) contient huit équations pour ne définir que six caractéristiques du champ électromagnétique: E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3. Ce système est pourtant non contradictoire. Ceci s'explique par ce que les relations

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$$

sont les conséquences des premières équations (1.11) et (1.12) lorsque les conditions initiales sont données d'une façon convenable.

En effet, si $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ est le champ vectoriel arbitraire dérivable par rapport aux coordonnées, alors $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$. Il en résulte de la première équation (1.11) que

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

c'est-à-dire que div $\boldsymbol{H}$ ne dépend pas du temps t. Lorsqu'à un certain instant initial on a div $\boldsymbol{H} = 0$, alors à tout autre instant de temps div $\boldsymbol{H} = 0$. La condition exigeant que le champ magnétique soit solénoïdal est satisfaite chaque fois où les données initiales satisfont à cette condition. Ainsi donc, l'équation div $\boldsymbol{H} = 0$ peut être considérée comme une restriction imposée aux données initiales.

De façon analogue, il en découle de la première équation (1.12) que

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0,$$

c'est-à-dire lorsqu'à un certain instant fixé div $\boldsymbol{E} = 0$, cette divergence sera également nulle à tout autre instant.

On peut interpréter la condition div $\boldsymbol{E} = 0$ comme la condition d'impossibilité de l'apparition dans le vide de charges si le champ en était dépourvu à un certain instant « initial », de même div $\boldsymbol{H} = 0$ signifie l'absence de charges magnétiques.

Bien que les équations div $\boldsymbol{H} = 0$ et div $\boldsymbol{E} = 0$ ne soient pas les conséquences au sens strict des premières équations, elles ne les contredisent tout de même pas. Ces conditions représentent des restrictions essentielles imposées aux données supplémentaires, sous lesquelles les solutions des équations de Maxwell ont un sens physique.

Application des équations de Maxwell (1.11) et (1.12) aux corps matériels. Les équations de Maxwell sous la forme (1.11) et (1.12) sont valables non seulement pour l'étude du champ électromagnétique dans le vide mais également pour la description du champ électromagnétique dans les corps si ces derniers sont neutres électriquement et magnétiquement, c'est-à-dire que les corps ne possèdent pas de charges macroscopiques et que le champ électromagnétique extérieur n'y crée ni courants électriques, ni polarisation macroscopique, ni aimantation.

Chaque molécule d'un corps engendre autour d'elle le champ électromagnétique. L'interaction de ces champs définit les forces des contraintes intérieures. Cependant, les charges des particules peuvent être réparties de telle façon qu'en moyenne le champ électromagnétique propre en chaque point du corps et la charge macroscopique dans le corps soient nuls :

$$\boldsymbol{E}_{\text{moy}} = 0, \quad \boldsymbol{H}_{\text{moy}} = 0.$$

Parfois $\boldsymbol{E}_{\text{moy}}$ et $\boldsymbol{H}_{\text{moy}}$ conservent leur valeur nulle même en présence d'un champ électromagnétique extérieur.

Ainsi donc, bien que les champs microscopiques dans les atomes et les molécules existent toujours, ils peuvent ne pas se manifester

macroscopiquement par suite du mouvement chaotique des atomes par exemple et pour beaucoup d'autres raisons.

Notons ce fait expérimental de première importance que les équations de Maxwell sont applicables à l'étude des champs microscopiques jusqu'à l'échelle atomique.

Le rôle des équations de Maxwell. Les équations de Maxwell représentent un nouvel énoncé des lois établies en électricité et basées sur les faits expérimentaux élémentaires.

Parmi les scientifiques prit racine l'opinion selon laquelle de nouvelles formes des propositions et concepts déjà établis ne peuvent être que triviales en soi. Toutefois l'exemple du passage vers une formule concise des lois électrodynamiques qu'est la forme des équations de Maxwell montre que cette opinion est erronée. C'est un acquis génial, source d'inspiration pour toute la physique moderne. L'analyse de la nature du champ électromagnétique et des propriétés du système des équations de Maxwell donna naissance à la théorie de la relativité et partant à une revision radicale des notions périmées de systèmes de référence inertiaux, d'espace et de temps.

§ 2. Equations de Maxwell dans l'espace de Minkowski

Les équations de Maxwell en formalisme quadridimensionnel. Afin de dégager la signification physique des équations de Maxwell récrivons-les en nouvelles notations.

Introduisons d'abord une matrice antisymétrique $F_{ij} = -F_{ji}$ définie par l'égalité matricielle

$$\| F_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & H^3 & -H^2 & cE_1 \\ -H^3 & 0 & H^1 & cE_2 \\ H^2 & -H^1 & 0 & cE_3 \\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{2.1}$$

et envisageons ensuite une variété quadridimensionnelle, c'est-à-dire un espace de coordonnées x^1, x^2, x^3, $x^4 = t$, où x^1, x^2, x^3 sont les coordonnées cartésiennes orthogonales usuelles dans le volume géométrique tridimensionnel.

On voit aisément que dans ce cas les quatre équations (1.11) s'écrivent en projections sur les axes des coordonnées cartésiennes de la manière suivante:

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3, 4). \tag{2.2}$$

Si dans le même système on introduit en même temps que la matrice F_{ij} la matrice F^{ij} selon l'égalité *)

$$\| F^{ij} \| = \begin{Vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -\frac{1}{c}E^1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -\frac{1}{c}E^2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -\frac{1}{c}E^3 \\ \frac{1}{c}E^1 & \frac{1}{c}E^2 & \frac{1}{c}E^3 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{2.3}$$

les quatre équations (1.12) s'écrivent comme suit:

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{2.4}$$

Interprétation de c en tant que vitesse de la lumière. On peut démontrer aisément que la solution générale des équations (2.2) peut être présentée sous la forme

$$F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}, \tag{2.5}$$

où A_1, A_2, A_3, A_4 sont quatre fonctions arbitraires de x^1, x^2, x^3, x^4.

La propriété d'antisymétrie de F_{ij} est alors satisfaite.

Notons que les valeurs de F_{ij} restent inchangées si on ajoute aux A_1, A_2, A_3, A_4 les composantes du vecteur gradient $\partial\Psi/\partial x^1$, $\partial\Psi/\partial x^2$, $\partial\Psi/\partial x^3$, $\partial\Psi/\partial x^4$ respectivement. En profitant de cet arbitraire, normons les fonctions A_i par la condition supplémentaire

$$\frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial A_4}{\partial x^4} = 0. \tag{2.6}$$

Pour tout système donné de quatre fonctions A_i on peut définir la fonction Ψ de telle sorte que l'égalité (2.6) soit satisfaite. Cette dernière peut être considérée comme une condition éliminant l'arbitraire dans le choix de la fonction Ψ.

En substituant à F^{ij} dans (2.4) l'expression

$$F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

on obtient en vertu de (2.6) pour quatre fonctions A_i les quatre équations identiques suivantes:

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial (x^3)^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{2.7}$$

*) La disposition des indices des composantes de $\boldsymbol{H}$ et de $\boldsymbol{E}$ dans (2.1) et (2.3) devient essentielle uniquement au cas où l'on passe à un système de coordonnées curvilignes (pour plus de détail voir ch. IV, pp. 189 à 190).

Ainsi donc, la résolution des équations de Maxwell se ramène à la recherche de quatre fonctions A_i satisfaisant à la relation (2.6) et dont chacune satisfait à son tour à l'équation (2.7). L'équation (2.7) s'appelle équation d'onde.

Les propriétés générales des solutions de l'équation d'onde sont examinées en détail au ch. VIII (vol. II). Pour le moment nous nous bornerons à indiquer une particularité typique de ces solutions. Soit $f(\xi)$ une fonction quelconque deux fois dérivable par rapport à son argument. On voit tout de suite que la fonction

$$A = f(x^1 - ct) \tag{2.8}$$

satisfait à l'équation d'onde. Cette solution peut être interprétée en ce sens que la valeur donnée de $A = f(\xi)$ correspondant à une certaine valeur fixée de $\xi = x^1 - ct$ se propage suivant l'axe x^1 à la vitesse c. De là le sens physique de c en tant que vitesse de la lumière.

Espace de Minkowski. Introduisons l'espace quadridimensionnel métrique pseudo-euclidien *) de Minkowski de coordonnées x^1, x^2, x^3, $x^4 = t$, où, par définition, la métrique est donnée par la formule

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + c^2\,dt^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j. \tag{2.9}$$

Pour les matrices $\| g_{ij} \|$ et $\| g^{ij} \|$ de cette métrique on a

$$\| g_{ij} \| = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{Vmatrix}, \quad \| g^{ij} \| = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{Vmatrix}.$$

Il résulte de (2.1) et (2.3) que F^{ij} et F_{ij} sont liées par les relations $F^{ij} = F_{pq} g^{pi} g^{qj}$.

Equations de Maxwell dans un système arbitraire de coordonnées curvilignes. Si l'on introduit un système de coordonnées curvilignes quelconques y^1, y^2, y^3, y^4 lié aux coordonnées x^1, x^2, x^3, $x^4 = t$ par la transformation

$$y^i = f^i(x^1, x^2, x^3, x^4) \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{2.10}$$

*) Dans un espace pseudo-euclidien la métrique (2.9) n'est pas définie positive mais les g_{ij} peuvent être considérés constants dans tout l'espace.

Ici et plus loin on admet les conditions suivantes pour les composantes: temporelle $g_{11} > 0$, spatiales $g_{\alpha\alpha} < 0$; en outre les indices quadridimensionnels sont notés par des lettres romanes et les composantes spatiales tridimensionnelles spécialement relevées, par des lettres grecques. Ces conditions furent introduites par H. Weyl (*Space-Time-Matter*, 1922) et sont actuellement admises par de nombreux auteurs dans beaucoup de manuels d'usage fréquent. Toutefois certains articles et ouvrages scientifiques emploient des conventions tout opposées quant aux signes de g_{11} et de $g_{\alpha\alpha}$ et aux notations des indices.

alors la formule transformée pour ds^2 sera de la forme

$$ds^2 = g'_{ij}\,dy^i\,dy^j \quad \text{où} \quad g'_{ij} = g_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j}.$$

Les équations transformées de Maxwell (2.2) et (2.4) et la formule (2.5) s'écrivent facilement si l'on envisage les grandeurs F_{ij} et A_i comme composantes du tenseur et du vecteur dans l'espace de Minkowski, c'est-à-dire si l'on définit F'_{ij} et A'_i dans le nouveau système par les égalités

$$F'_{ij} = F_{pq}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^q}{\partial y^j} \quad \text{et} \quad A'_i = A_p\frac{\partial x^p}{\partial y^i}. \tag{2.11}$$

Le tenseur quadridimensionnel $F = F_{ij}\partial^i\partial^j$ est dit tenseur du champ électromagnétique, et le vecteur quadridimensionnel $A = A_i\partial^i$, potentiel-vecteur.

D'après les formules de l'analyse tensorielle, on obtient

$$\nabla'_k F'_{ij} + \nabla'_j F'_{ki} + \nabla'_i F'_{jk} = 0, \tag{2.12}$$

$$\nabla'_j F'^{ij} = 0, \tag{2.13}$$

$$F'_{ij} = \nabla'_j A'_i - \nabla'_i A_j = \frac{\partial A'_i}{\partial y^j} - \frac{\partial A'_j}{\partial y^i}. \tag{2.14}$$

Compte tenu de la condition

$$\nabla'^{\alpha} A'_{\alpha} = 0, \tag{2.15}$$

les équations d'onde (2.7) se transforment en

$$\nabla'^q \nabla'_q A'_i = 0. \tag{2.16}$$

Ces équations résultent de la forme tensorielle des équations (2.2), (2.4), (2.5) et (2.7) dans l'espace de Minkowski où toutes les dérivées par rapport aux coordonnées et au temps coïncident, dans le système x^1, x^2, x^3, t, avec les dérivées covariantes, car tous les symboles de Christoffel sont nuls dans ce système.

Signalons que l'antisymétrie de F_{ij} dans un système de coordonnées arbitraire fait que les termes avec les symboles de Christoffel dans l'équation (2.12) se simplifient, on peut écrire alors l'équation (2.12), dans un système curviligne quelconque, sous une autre forme, à savoir

$$\frac{\partial F'_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial F'_{ki}}{\partial y^j} + \frac{\partial F'_{jk}}{\partial y^i} = 0. \tag{2.17}$$

L'équation (2.13) sous forme développée est

$$\nabla'_j F'^{ij} = \frac{\partial F'^{ij}}{\partial y^j} + F'^{pj}\Gamma^i_{pj} + F'^{ip}\Gamma^j_{jp} = 0.$$

En vertu de l'antisymétrie de F^{pj} et de la symétrie de Γ^i_{pj} par rapport aux indices inférieurs on a $F'^{pj}\,\Gamma^i_{pj} = 0$; en outre, en revenant à la formule (3.6) du ch. IV on obtient

$$\Gamma^j_{pj} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial y^p}, \quad \text{où} \quad g = |g_{ij}|.$$

Il en résulte que les équations de Maxwell (1.12) admettent la forme

$$\nabla'_j F'^{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,F'^{ij}}{\partial y^j} = 0. \tag{2.18}$$

Ainsi donc, les équations de Maxwell s'écrivent sous forme tensorielle à l'aide du tenseur F_{ij} dans l'espace quadridimensionnel de Minkowski introduit par définition à cet effet.

Les équations tensorielles obtenues permettent de trouver, dans différents systèmes de coordonnées, la forme des équations de Maxwell et les composantes des champs magnétique H^1, H^2, H^3 et électrique E_1, E_2, E_3 à partir des égalités (2.1) et (2.3) et des formules de transformation (2.11).

L'espace métrique de Minkowski est introduit comme un être mathématique auxiliaire. Pour le moment il nous suffit de savoir que lors des transformations des coordonnées dans l'espace de Minkowski on peut introduire le tenseur F_{ij} et donc considérer les équations de Maxwell comme équations tensorielles.

La signification physique de l'espace de Minkowski et celle du tenseur champ électromagnétique se dégagent clairement après l'introduction de postulats physiques supplémentaires dont nous parlerons au paragraphe suivant.

Transformation des seules coordonnées spatiales. Signalons d'abord les conséquences suivantes qu'on tire des définitions mathématiques formulées plus haut. Soient les transformations de la forme

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, x^3), \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3,$$
$$t' = y^4 = x^4 = t, \tag{2.19}$$

où seules les coordonnées spatiales se transforment, celle de temps restant invariable.

On vérifie aisément en recourant aux formules (2.11) et à la formule matricielle *) (2.1) que les formules de transformation correspondantes pour les grandeurs E_i et H^i représentent respectivement celles des composantes covariantes et contravariantes des vecteurs tridimensionnels spatiaux polaire et axial. On peut appli-

*) Dans un système curviligne spatial, on prend au lieu de H^i dans la matrice (2.1) l'expression $H^i\sqrt{\mathrm{Det}\,\|g_{\alpha\beta}\|}$, α, $\beta = 1, 2, 3$ (voir § 3 ch. IV, formule (3.26)).

quer la transformation (2.10) de forme générale aux grandeurs E_i et H^i dans différents systèmes de coordonnées, mais les transformations correspondantes ne seront plus celles des composantes d'aucun vecteur.

Transformations de Lorentz. Considérons les transformations les plus générales $y^i = f^i(x^k)$ qui conservent la forme quadratique (2.9) dans l'espace métrique de Minkowski et donc vérifient l'égalité

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + c^2\,dt^2 = \\ = -dy^{1^2} - dy^{2^2} - dy^{3^2} + c^2\,dt^2. \qquad (2.20)$$

Dans ces transformations, dites de Lorentz, comme dans toutes autres transformations de coordonnées, les équations tensorielles (2.12), (2.13) et respectivement (2.17) et (2.18) qui sont la forme développée des premières ne se distinguent que par les notations des coordonnées et des composantes F_{ij}.

Invariance des équations vectorielles de Maxwell par rapport aux transformations de Lorentz. Les équations vectorielles de Maxwell (1.11) et (1.12) sont également invariantes relativement au groupe de Lorentz. Il résulte pourtant des formules de transformation (2.11) que les vecteurs champs électrique $\boldsymbol{E}$ et magnétique $\boldsymbol{H}$ dans le système x^i et les vecteurs $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ dans le système y^i ne sont pas les mêmes. Dans le paragraphe suivant on donnera quelques formules de passage de $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ à $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ lors des transformations de Lorentz.

Ainsi les équations de Maxwell, sous certaines conditions concernant les transformations des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$, sont invariantes par le groupe de Lorentz. Les équations (2.17) et (2.18) permettent d'entrevoir qu'outre les transformations de Lorentz il existe encore des classes plus générales des transformations pour lesquelles aura également lieu l'invariance des équations de Maxwell. Les transformations de Lorentz, comme on le verra dans la suite, ont pourtant la valeur physique la plus importante.

Transformations de Galilée. Les transformations de la forme

$$\left.\begin{aligned} y^\alpha &= x^\alpha + a_0^\alpha - v^\alpha t, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3, \\ y^4 &= t' = t + t_0 = x^4 + t_0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$

où t_0, a_0^α et v^α sont des constantes, sont appelées transformations de Galilée. En mécanique newtonienne les transformations (2.21) correspondent à la translation rectiligne uniforme d'un référentiel y^α relativement à un référentiel x^α, v^α étant les composantes de la vitesse de ce mouvement dans le référentiel x.

Il est évident que les transformations de Galilée ne sont pas celles de Lorentz, car pour elles l'égalité (2.20) n'est pas remplie. Les transformations de Galilée et les formules (2.21) peuvent être compliquées par la rotation supplémentaire du système y^α d'un angle

fini fixe autour d'un axe fixe arbitraire et par les réflexions par rapport aux plans coordonnés. Notons en passant que toute rotation peut être remplacée par une suite de réflexions par rapport aux certains plans.

Caractéristiques tensorielles et vectorielles dans l'espace de Minkowski; tenseur énergie-impulsion. En rapport avec les équations de Maxwell on a introduit, dans l'espace quadridimensionnel de Minkowski, le tenseur du champ électromagnétique $F = F_{ij}\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}^j$ et le potentiel-vecteur $A = A_i\mathfrak{e}^i$. Dans la suite on aura besoin de beaucoup d'autres tenseurs et vecteurs. Il s'agit notamment du vecteur quadricourant électrique $J = J^i\mathfrak{e}_i$ (§ 4), du vecteur quadriforce F (§ 5), du vecteur quadrivitesse $u = u^i\mathfrak{e}_i = dr/ds$, où $dr = dx^i\mathfrak{e}_i$ est un déplacement quadridimensionnel du point individuel, $ds = |dr|$, du tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique

$$S = S_{i\cdot}^{\cdot k}\mathfrak{e}^i\mathfrak{e}_k, \tag{2.22}$$

où

$$S_{i\cdot}^{\cdot k} = -\frac{1}{4\pi}\left[F_{mi}F^{mk} - \frac{1}{4}\delta_i^k F_{mn}F^{mn}\right],$$

et de beaucoup d'autres vecteurs et tenseurs.

On tire des équations (2.12) et (2.13) les conséquences importantes suivantes:

$$\nabla_k S_{i\cdot}^{\cdot k} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{2.23}$$

qui s'interprètent comme les équations des impulsions et de l'énergie du champ électromagnétique dans le vide.

§ 3. Transformations de Lorentz et systèmes de référence inertiaux

Principe de la relativité en physique. Le principe universel de la relativité de Galilée, proposition fondamentale de la physique, veut que toutes les lois physiques concernant les interactions dans les milieux matériels et dans les champs soient formulées de la même façon et que tous les phénomènes et processus se déroulent identiquement pour tous les observateurs dans n'importe quel système de référence inertial. On postule également l'existence d'un ensemble de référentiels inertiaux qui peuvent se mouvoir les uns par rapport aux autres. Cependant dans des théories différentes on définit l'ensemble de systèmes de référence inertiaux de différentes façons.

Référentiels inertiaux en mécanique newtonienne. Dans la physique newtonnienne l'espace est supposé tridimensionnel (espace tridimensionnel euclidien), le temps est absolu et défini en tant que temps équivalent pour toute sorte de référentiels appartenant à l'ensemble des référentiels inertiaux et qui sont en translation uniforme

les uns par rapport aux autres. Dans tous ces référentiels, un point matériel isolé est au repos ou se meut à une vitesse constante.

D'après le principe de la relativité de Galilée-Newton, toutes les lois et équations physiques sont invariantes par les transformations galiléennes (2.21) définissant, dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, le passage d'un référentiel inertial cartésien x^1, x^2, x^3, t à un autre référentiel inertial cartésien y^1, y^2, y^3, $t + t_0$.

En physique newtonienne, il découle de (2.21) et de la définition cinématique de la vitesse la loi de composition des vitesses

$$v_x = v_y + v, \tag{3.1}$$

où v_y est la vitesse d'un corps, d'un point par rapport au système y; v_x la vitesse du même point relativement au système x; v la vitesse de translation du système inertial y par rapport à x.

Comme on le connaît bien, la vitesse de la lumière dans le vide peut être définie comme celle du front des perturbations électromagnétiques ou, plus simplement, comme la vitesse dans le vide de la particule électromagnétique qu'est le photon. D'après la formule (3.1), la vitesse de la lumière dans la physique newtonienne ne saurait pas être la même pour les différents observateurs effectuant les mesures dans leurs référentiels inertiaux. En outre, le fait que dans la physique newtonienne le temps est supposé absolu aurait pour conséquence la propagation des signaux à une vitesse infinie.

Postulat de la constance de la vitesse de la lumière. Ces déductions se trouvent pourtant en contradiction radicale avec l'expérience qui témoigne que la lumière se propage dans le vide avec une vitesse égale pour tous les observateurs se mouvant les uns par rapport aux autres à une vitesse constante et d'une manière isotrope relativement à n'importe quel observateur, c'est-à-dire à égale vitesse dans toutes les directions. L'expérience célèbre de Michelson, ainsi que beaucoup d'autres confirment que la vitesse de la lumière ne dépend pas du choix du référentiel inertial.

Une analyse approfondie des processus physiques montre également l'impossibilité pour les objets matériels, ainsi que pour l'énergie, de se déplacer à une vitesse supérieure à celle de la lumière, laquelle doit être envisagée comme la vitesse la plus grande possible de tout mouvement relatif des corps matériels.

Ainsi la physique moderne utilise comme postulat la loi de la constance de la vitesse de la lumière dans tous les systèmes de référence inertiaux. A condition de conserver le principe fondamental de la physique qu'est la relativité de Galilée, le postulat de la constance de la vitesse de la lumière fournit les bases à une revision de la notion de référentiel inertial et donc à l'introduction de nouvelles transformations de coordonnées, autres que celles de Galilée, lors du changement de référentiel inertial.

Dans ce cas les transformations de Galilée (2.21) ne peuvent plus être admises; on est contraint de les compliquer et de renoncer au temps absolu.

Référentiels inertiaux dans la théorie de la relativité restreinte. Adressons-nous à présent aux conditions qu'impose la constance de la vitesse de la lumière aux transformations des coordonnées lors du passage d'un système inertial à un autre. La famille de systèmes inertiaux s'obtient par transformation à partir d'un système unique qu'on choisit en se basant sur les données expérimentales.

Pour établir les formules des transformations en question, utilisons, outre la condition fondamentale de la constance de la vitesse de la lumière dans tous les référentiels inertiaux, les conditions naturelles de l'équivalence de deux référentiels inertiaux quelconques et de la symétrie réversible, c'est-à-dire de l'isotropie et de l'homogénéité. Le concept d'homogénéité relevant de l'équivalence cinématique et géométrique de tous les points de l'espace sera explicité plus loin à l'aide des formules mathématiques.

Transformations des coordonnées lors d'un passage d'un référentiel inertial à un autre. Prenons en tant que référentiel inertial de base K, choisi à partir des données expérimentales, un système de coordonnées x^1, x^2, x^3, $x^4 = t$, où les coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3 sont les coordonnées cartésiennes de l'espace tridimensionnel euclidien et t est le temps.

Soit y^1, y^2, y^3, $y^4 = t'$ un autre système d'inertie K', où y^1, y^2, y^3 sont également les coordonnées cartésiennes et t' est le temps propre. Le problème est de trouver les conditions permettant de définir les transfomrations

$$y^i = f^i(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3.2}$$

qui doivent remplacer les formules de transformation de Galilée-Newton (2.21) et d'établir les propriétés de ces transformations.

Soient dx^1, dx^2, dx^3 les composantes du déplacement d'un certain point M mobile pendant le temps $dx^4 = dt$ dans le système K; dy^1, dy^2, dy^3 sont respectivement les déplacements et $dy^4 = dt'$ l'intervalle de temps dans le système K' pour le même point.

Pour les vitesses tridimensionnelles v et v' du point M dans les systèmes K et K' on a

$$v^2 = \frac{dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}}{dt^2} \quad \text{et} \quad v'^2 = \frac{dy^{1^2} + dy^{2^2} + dy^{3^2}}{dt'^2}.$$

Dans ces formules les variables y^α et x^β (α, $\beta = 1, 2, 3$) se correspondent mutuellement selon les formules (3.2).

Introduisons les quantités

$$ds_x^2 = (c^2 - v^2)\,dt^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + c^2\,dt^2,$$

$$ds_y^2 = (c^2 - v'^2)\,dt'^2 = -dy^{1^2} - dy^{2^2} - dy^{3^2} + c^2\,dt'^2.$$

Envisageons le mouvement d'un photon qui se déplace comme on le sait dans le vide à la vitesse de la lumière aussi bien dans K que dans K'.

Lorsqu'on a simultanément $v = v' = c$, alors

$$ds_y^2 = ds_x^2 = 0.$$

Si l'on admet que $ds_x^2 = 0$, l'égalité

$$ds_y^2 = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^p}\,dx^p\right)^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^p}\,dx^p\right)^2 + \left(\frac{\partial f^3}{\partial x^p}\,dx^p\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial f^4}{\partial x^p}\,dx^p\right)^2 = 0$$

doit se vérifier en tant que conséquence de la forme spéciale de la transformation (3.2); alors dans le cas général où $v \neq c$, on doit avoir l'égalité

$$ds_y^2 = \varkappa\,(x^1, x^2, x^3, x^4)\,ds_x^2,$$

où $\varkappa$ peut être une fonction arbitraire de ses arguments.

La symétrie des passages $K \to K'$ et $K' \to K$ permet d'écrire que

$$ds_x^2 = \varkappa\,(y^1, y^2, y^3, y^4)\,ds_y^2 = \varkappa\,(y^i)\,\varkappa\,(x^i)\,ds_x^2,$$

d'où

$$\varkappa\,(y^i)\,\varkappa\,(x^i) = 1. \tag{3.3}$$

De l'homogénéité de l'espace découle l'indépendance de $\varkappa$ des points de l'espace, c'est-à-dire des coordonnées. On tire de la constance de $\varkappa$ et de l'égalité (3.3) que $\varkappa = 1$.

Par conséquent, lors du passage d'un système inertial K à l'autre K' la quantité

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + c^2\,dt^2 \tag{3.4}$$

doit être invariante.

La formule (3.4) peut être considérée comme une définition de la métrique de l'espace quadridimensionnel.

Ainsi donc, l'espace physique peut être envisagé comme l'espace de Minkowski, et les transformations réalisant le passage d'un système inertial à un autre comme des transformations de Lorentz.

On voit maintenant que l'espace de Minkowski et les transformations de Lorentz, introduits plus haut en tant qu'êtres mathématiques auxiliaires utiles dans l'étude des transformations des équations de Maxwell, acquièrent un sens physique fondamental.

Il est évident que dans la théorie que nous développons ici l'invariance des équations vectorielles de Maxwell par rapport aux

transformations de Lorentz a une importance capitale. Les hypothèses adoptées et les conclusions qui en sont tirées sont à la base de la physique moderne.

Etendu aux systèmes globaux pour les corps finis, un tel système de postulats constitue la base de la relativité restreinte. Les mêmes postulats appliqués localement aux petits éléments des milieux matériels ou du champ sont à la base de la théorie de la relativité générale.

Propriétés des transformations de Lorentz. Analysons plus en détail les propriétés des transformations de Lorentz.

Montrons tout d'abord que les fonctions $f^i(x^k)$ dans les formules (3.2) définissant les transformations de Lorentz sont linéaires.

Démontrons une proposition plus générale. Soit donnée une transformation

$$y^i = f^i(x^1, x^2, x^3, x^4), \qquad \frac{\partial f^i}{\partial x^k} = f^i_k \quad \text{et} \quad |f^i_k| \neq 0,$$

et soit

$$ds^2 = g'_{ij}\, dy^i\, dy^j = g_{pq}\, dx^p\, dx^q,$$

$$g'_{ij} f^i_p f^j_p = g_{pq}, \tag{3.5}$$

où $g'_{ij} = \text{const}$, $g_{pq} = \text{const}$ et $|g'_{ij}| \neq 0$. Montrons que dans ce cas les fonctions $f^i(x^1, x^2, x^3, x^4)$ sont linéaires par rapport à leurs arguments.

Dérivant l'égalité (3.5) par rapport à x^s, il vient

$$g'_{ij} f^i_{ps} f^j_q + g'_{ji} f^i_p f^j_{qs} = 0; \tag{3.6}$$

ici p, s, q sont des indices arbitraires parcourant les valeurs 1, 2, 3, 4. En raison de la symétrie on a $g'_{ij} = g'_{ji}$ et $f^k_{sp} = f^k_{ps}$. La permutation des indices $p \to q \to s \to p$ dans (3.6) donne

$$g'_{ij} f^i_{qp} f^j_s + g'_{ij} f^j_q f^i_{ps} = 0. \tag{3.7}$$

En soustrayant (3.7) de (3.6) on a

$$g'_{ij} f^i_p f^j_{qs} - g'_{ij} f^i_{qp} f^j_s = 0. \tag{3.8}$$

En permutant les indices $p \to s \to q \to p$ dans (3.8) et en soustrayant le résultat de (3.7) on obtient

$$g'_{ij} f^j_q f^i_{ps} = 0 \quad \text{ou} \quad A_{iq} f^i_{ps} = 0, \tag{3.9}$$

où p, q, s sont des indices parcourant les valeurs 1, 2, 3, 4. Le déterminant $|A_{iq}|$ diffère de zéro en vertu de l'égalité matricielle suivante

$$\|A_{iq}\| = \|g'_{ij}\|\,\|f^j_q\| \quad \text{et} \quad |g'_{ij}| \neq 0, \ |f^j_q| \neq 0.$$

Comme $|A_{iq}| \neq 0$, le système d'équations homogènes (3.9) donne

$$f^i_{ps} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^p \partial x^s} = 0. \tag{3.10}$$

Les équations (3.10) sont vraies pour i, p et s arbitraires; il en découle que la solution générale du système d'équations (3.10) a la forme

$$y^i = f^i(x^k) = f^i_0 + c^i_k x^k, \tag{3.11}$$

où f^i_0 et c^i_k sont des nombres constants.

La proposition démontrée est évidemment vérifiée pour tous les espaces n-dimensionnels.

La transformation (3.11) correspond à une déformation homogène de l'espace pseudo-euclidien quadridimensionnel; elle est plus générale que celle de Lorentz.

Pour isoler dans les transformations (3.11) celles de Lorentz il faut remplacer (3.5) par des conditions plus fortes qu'on déduit de (2.20):

$$\left.\begin{aligned} & g'_{11} = g_{11} = -1, \quad g'_{22} = g_{22} = -1, \\ & g'_{33} = g_{33} = -1, \quad g'_{44} = g_{44} = c^2 \\ \text{et} \quad & \\ & g'_{ij} = g_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Les conditions (3.12) imposent à 16 coefficients c^i_k les dix liaisons algébriques suivantes:

$$g_{ij} c^i_p c^j_q = g_{pq} \quad \text{ou} \quad c_{ip} c^{iq} = \delta^q_{\cdot p}. \tag{3.13}$$

Ainsi donc, la transformation générale de Lorentz dépend de quatre constantes f^i_0 définissant une translation simple et de six paramètres indépendants qui permettent, d'après (3.13), d'exprimer seize quantités c^i_k.

Les transformations de Galilée et de Lorentz ont chacune dix paramètres indépendants. Les transformations de Galilée forment un groupe dépendant de dix paramètres dont quatre définissent la translation, trois la rotation et la réflexion de l'espace tridimensionnel et trois autres les composantes de la vitesse de translation du système de coordonnées.

Les transformations de Lorentz forment également un groupe dépendant de dix paramètres dont quatre définissent la translation et les six autres la réflexion et la rotation de l'espace quadridimensionnel de Minkowski données par les paramètres indépendants par lesquels s'expriment les coefficients c^i_k.

Les transformations satisfaisant aux conditions (3.13) pour une métrique quelconque et dans les espaces de dimension quelconque

s'appellent transformations orthogonales. Elles forment un groupe. Les transformations orthogonales avec le déterminant de transformation $\Delta = |c_k^i| > 0$ forment un sous-groupe appelé groupe de rotations propre.

Transformations de Lorentz infinitésimales. Pour une transformation identique dans le groupe de transformations orthogonales on a

$$c_k^i = \delta_k^i.$$

Remplaçons c_k^i par les grandeurs Ω_k^i selon les formules

$$c_k^i = \delta_k^i + \Omega_k^i.$$

Pour une transformation identique on a $\Omega_k^i = 0$. Lorsque Ω_k^i sont infiniment petits, les coefficients c_k^i définissent une transformation appartenant au groupe de rotations propre, car $\Delta \approx 1$. Les quantités c_k^i et Ω_k^i sont considérées soit comme composantes des tenseurs dans la base du système K ou dans celle du système K', soit comme vecteurs suivant l'indice i dans K ou l'indice k dans K'.

En rejetant les petits de deuxième ordre on obtient les conditions d'orthogonalité pour des rotations infiniment petites sous la forme

$$g_{iq}\Omega_p^i + g_{pj}\Omega_q^j = 0 \tag{3.14}$$

ou

$$\Omega_{qp} = -\Omega_{pq}.$$

La matrice antisymétrique Ω_{pq} s'interprète comme celle des composantes du quadritenseur antisymétrique correspondant dans l'espace de Minkowski. Six composantes indépendantes de ce tenseur représentent les paramètres indépendants définissant la rotation infinitésimale de l'espace quadridimensionnel de Minkowski. On fait correspondre au quadritenseur antisymétrique Ω_{pq}, dans les systèmes inertiaux cartésiens, deux trivecteurs Ω et U conformément à l'égalité

$$\|\Omega_{pq}\| = \begin{Vmatrix} 0 & -\Omega^3 & \Omega^2 & -U_1 \\ \Omega^3 & 0 & -\Omega^1 & -U_2 \\ -\Omega^2 & \Omega^1 & 0 & -U_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \Omega_q^i = g^{ip}\Omega_{pq}. \tag{3.15}$$

On voit sans peine que le vecteur axial Ω (Ω^1, Ω^2, Ω^3) caractérise une rotation infinitésimale dans l'espace tridimensionnel et le vecteur polaire U (U_1, U_2, U_3) la vitesse infinitésimale de translation du référentiel inertial K' relativement au référentiel K.

Transformation de Lorentz pour le cas de la translation du système K' par rapport au système K. Considérons une transformation finie spéciale de Lorentz (3.11) très importante qui a la forme

$$y^1 = c_1^1 x^1 + c_4^1 t, \quad y^2 = x^2,$$
$$y^3 = x^3, \quad t^4 = c_1^4 x^1 + c_4^4 t.$$

Cette transformation correspond à une translation le long de l'axe x^1 du référentiel K' relativement à K, à la vitesse constante $U = -c_4^1/c_1^1$. Dans ce cas les conditions (3.13) sont facilement résolubles et l'on obtient, sous la condition $\Delta > 0$ découlant de l'absence de réflexion supplémentaire, les formules

$$y^1 = \frac{x^1 - Ut}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{U}{c^2} x^1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}$$

et les formules inverses (3.16)

$$x^1 = \frac{y^1 + Ut'}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}; \quad t = \frac{t' + \frac{U}{c^2} y^1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}.$$

Les transformations de Lorentz (3.16) deviennent celles de Galilée pour U/c petit en négligeant les grandeurs de l'ordre de $(U/c)^2$.

Relativité de la notion de temps. Il s'ensuit des formules générales (3.11) et, en particulier, des formules (3.16) que lors du passage de K à K' le temps t' dans « le système mobile » diffère du temps t dans le système « immobile » initial. En outre, les coordonnées géométriques et le temps deviennent, en quelque sorte, équivalents. Il ne s'agit pourtant pas d'une disparition complète de la différence entre les distances géométriques et le temps. La différence se manifeste, en particulier, dans le fait que les éléments $dx^{\alpha 2}$ et dt^2 avec lesquels est définie la métrique pour ds^2 y entrent avec des signes différents. On sait pourtant de la théorie des formes quadratiques que, dans toutes les transformations réelles de variables conservant la forme canonique quadratique pour ds^2, les signes mentionnés sont invariants.

Distinction entre les intervalles de temps. Envisageons la relation que l'on déduit de (3.16) entre les intervalles de temps correspondants dt' et dt en un point M, immobile dans le système K' ($y^1 = \text{const}$) et, par conséquent, se mouvant à la vitesse U dans le système K. On a

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \quad \text{i.e.} \quad dt > dt'. \tag{3.17}$$

De même, soit le point N immobile dans le système K ($x^1 = \text{const}$), on a

$$\widetilde{dt}' = \frac{\widetilde{dt}}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}, \quad \text{i.e.} \quad \widetilde{dt}' > \widetilde{dt}. \tag{3.18}$$

Ainsi donc, du point de vue de l'observateur dans K le temps propre de l'observateur dans K' s'écoule plus lentement que le sien. D'un autre côté, l'écoulement du temps propre dans K apparaît plus lent à l'observateur dans K'. Ceci témoigne de l'équivalence totale des systèmes d'inertie K et K'.

Des relations analogues ont lieu pour les longueurs des segments correspondants disposés dans la direction de la vitesse $\boldsymbol{U}$. Les longueurs des segments perpendiculaires à la direction de la vitesse $\boldsymbol{U}$ sont égales dans K et K'.

Système de référence propre. Dans les applications, on emploie la notion très importante de système de référence propre. Il s'agit du référentiel inertial K^* choisi au point donné M du milieu de telle sorte que la vitesse du point M par rapport au référentiel K^*, à l'instant donné, soit égale à zéro; les vitesses des points voisins et du point M en d'autres instants de temps dans ce système peuvent différer de zéro.

C'est précisément le système de référence propre et le temps propre que nous percevons. Le temps propre est une caractéristique invariante du vieillissement et de toutes sortes de processus et interactions internes.

Lors du mouvement des particules élémentaires, des atomes et des molécules, les lois régissant les interactions internes et tous les instants caractéristiques ne sont les mêmes que dans leurs propres référentiels inertiaux; citons à titre d'exemple la période des ondes lumineuses ou électromagnétiques rayonnées, la demi-période des noyaux radioactifs, la vie des particules « élémentaires » instables, etc.

Temps propre. Lorsqu'il s'agit du mouvement d'un continuum, on peut associer à chaque point et en chaque instant de temps un système de coordonnées propre et définir dans ce système les valeurs des composantes de différents tenseurs et de vecteurs ainsi que l'intervalle de temps propre $d\tau$

$$d\tau = \frac{1}{c}\, ds = dt \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (v^2 < c^2, \quad ds > 0), \tag{3.19}$$

où dt est l'intervalle de temps correspondant dans le système fixé de l'observateur.

Systèmes de référence propre et concomitant. Il est bien évident que le système propre ne coïncide pas en général avec le système concomitant dans lequel les vitesses de toutes les particules sont toujours égales à zéro ; le système propre est inertial, tandis que le système concomitant ne l'est évidemment pas en général.

Paradoxe des horloges. En étudiant les mouvements d'un même point ou de points différents, on peut calculer les intervalles finis de temps propre à l'aide des intégrales de la forme

$$\Delta\tau = \tau - \tau_0 = \frac{1}{c}\int ds = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt. \tag{3.20}$$

L'intervalle de temps propre $\Delta\tau$ étant un invariant, l'expression (3.20) donne le même résultat quel que soit le système de coordonnées de l'observateur utilisé, inertial ou non inertial.

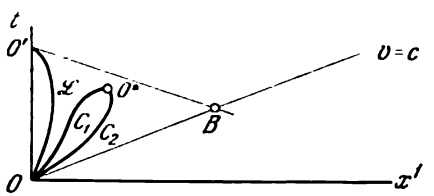


Fig. 39. L'intervalle de temps propre dépend de la loi du mouvement

Dans un référentiel de l'observateur inertial donné, l'intégrale (3.20) dépend de la forme de la courbe $x^i = x^i(t)$ dans l'espace de Minkowski. En particulier, en cas du mouvement rectiligne le long de l'axe x^1, l'intervalle $\Delta\tau$ est une fonctionnelle du chemin d'intégration dans le plan x^1, t (fig. 39). Les valeurs de $\Delta\tau$ calculées pour les chemins différents C_1 et C_2 menant du point O au point O^* ne sont pas les mêmes.

Pour un corps au repos sur Terre que l'on prend pour système inertial, le chemin d'intégration coïncide avec l'axe des temps t ; pour un cosmonaute lancé avec sa fusée suivant l'axe des x et regagnant ensuite la Terre, la loi du mouvement est figurée par la courbe de la forme $\mathscr{L}$.

La quantité sous-intégrale dans la dernière intégrale (3.20) est plus petite pour $v \neq 0$ que pour $v = 0$; par conséquent, au moment de retour du cosmonaute en point O' les intervalles de temps propre pour l'observateur terrestre $\Delta\tau_{\text{ter}} = OO'$ et pour le cosmonaute

$$\Delta\tau_{\text{cosm}} = \int_{t(O)}^{t(O')} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$$

seront différents, notamment

$$\Delta\tau_{\text{cosm}} < \Delta\tau_{\text{ter}}. \tag{3.21}$$

Des deux jumeaux dont l'un habite la Terre et l'autre retourne d'un voyage cosmique, le cosmonaute s'avère plus jeune que son frère.

Soient les segments OB et BO' correspondant à la loi du mouvement du photon $x^1 = ct$ et $x^1 = -ct + x_B$ se mouvant à la vitesse de la lumière. On voit que toujours pour le photon $\Delta\tau = 0$, c'est-à-dire que le temps propre du photon ne s'écoule pas.

Transformation de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ lors du passage de K à K'. On est maintenant en mesure de répondre à la question de savoir comment changent les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ lors du passage d'un système inertial K à un autre système initial « mobile » K' et, en particulier, lors du passage au système propre $K' = K^*$.

Il est aisé d'établir à partir des formules (2.11), (3.16) et (2.1) les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}'_{\parallel} &= \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right)_{\parallel}, \\ \boldsymbol{E}'_{\perp} &= \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right)_{\perp} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H}'_{\parallel} &= \left(\boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{v}}{v} \times \boldsymbol{E}\right)_{\parallel}, \\ \boldsymbol{H}'_{\perp} &= \left(\boldsymbol{H} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E}\right)_{\perp} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Le symbole $\parallel$ est employé pour désigner les composantes vectorielles parallèles à la vitesse $\boldsymbol{v}$ du système mobile K', le symbole $\perp$ pour les composantes perpendiculaires à $\boldsymbol{v}$. On voit aisément que les termes $(\boldsymbol{v}/c) \times \boldsymbol{H}$ et $(\boldsymbol{v}/c) \times \boldsymbol{E}$ ne contribuent pas aux expressions pour $\boldsymbol{E}'_{\parallel}$ et $\boldsymbol{H}'_{\parallel}$, de sorte que $\boldsymbol{E}'_{\parallel} = \boldsymbol{E}_{\parallel}$ et $\boldsymbol{H}'_{\parallel} = \boldsymbol{H}_{\parallel}$. On conserve pourtant ces termes dans (3.22) et (3.23) pour la symétrie de celles-ci, ce qui est très commode dans l'écriture des formules approchées lorsque les v^2/c^2 sont petits.

Les formules (3.22) et (3.23) permettent de voir que les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$, caractéristiques principales du champ électromagnétique, dépendent essentiellement du choix du système de coordonnées inertial d'où leur signification physique assez restreinte.

En mécanique newtonienne, si l'on veut utiliser comme référentiels des systèmes en mouvement accéléré, on est obligé d'introduire les forces d'inertie. Ainsi, en mécanique non relativiste le champ des forces extérieures dépend du choix du référentiel mobile. Il est important tout de même que ce champ des forces est le même dans tous les systèmes inertiaux et ne varie que si l'on passe à un système se mouvant avec accélération relativement au premier.

Quant aux caractéristiques électromagnétiques du champ $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$, elles changent en passant même d'un système inertial à un autre.

Attirons l'attention sur le fait suivant : si dans un système de coordonnées quelconque K il n'y avait que le champ électrique, on voit toujours apparaître le champ magnétique lorsqu'on passe à un système se mouvant relativement au premier, et vice versa.

Envisageons, par exemple, l'électron dans son système propre K^*. Le champ magnétique y est absent, $\boldsymbol{H}^* = 0$, et le champ électrique $\boldsymbol{E}^*$ est celui de Coulomb. Dans le système de coordonnées en mouvement rectiligne et uniforme à la vitesse $\boldsymbol{v}$ par rapport au système où l'électron est au repos, les vecteurs $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{H}'$ se définissent comme solutions des équations de Maxwell d'après les formules (3.22) et (3.23), où il faut poser $\boldsymbol{H} = 0$ et exprimer le vecteur $\boldsymbol{E}$ par r à l'aide de la formule

$$\boldsymbol{E} = -\frac{e}{r^2}\,\mathrm{grad}\, r$$

Les formules (3.22) et (3.23) permettent une analyse plus détaillée du champ obtenu de caractéristiques $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$.

Caractéristiques invariantes du champ électromagnétique. Chacun des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ pris à part varie selon le système inertial choisi. Le tenseur du champ électromagnétique $F = F_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$, défini à l'aide de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ par la matrice (2.1), représente une caractéristique physique invariante du champ électromagnétique, comme la température, le vecteur force, le tenseur des déformations, etc.

Le tenseur F possède six composantes indépendantes et seulement deux invariants indépendants, à savoir

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}F_{ij}F^{ij} &= H^2 - E^2, \\ \frac{1}{4}\left[F^{ik}F^{lm}F_{il}F_{km} - \frac{1}{2}(F^{ik}F_{ik})^2\right] &= (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})^2. \end{aligned}\right\} \qquad (3.24)$$

La transformation de Lorentz permet d'éliminer complètement le champ magnétique ou électrique seulement si $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} = 0$, autrement dit, lorsque les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ sont perpendiculaires l'un à l'autre. 0

Si dans un système quelconque $H^2 = E^2$, cette égalité est vraie dans tout autre système inertial. Lorsque $H^2 - E^2 = 0$ et $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} = 0$, les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ sont égaux et perpendiculaires l'un à l'autre dans tous les systèmes de coordonnées.

Vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ dans les systèmes de référence usuels. Les différents systèmes inertiaux employés couramment dans la pratique se distinguent par ce que leur vitesse relative est petite par rapport à celle de la lumière. Les différences respectives entre les vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ et

E', H' sont par conséquent souvent petites. On voit des formules (3.22) et (3.23) que les vecteurs E et H s'avèrent être les caractéristiques physiques invariantes si l'on néglige les quantités de l'ordre de v/c.

Formules approchées de transformation de E et H (compte tenu des petits de l'ordre de v/c). Dans la suite, nous adopterons le point de vue non relativiste de la mécanique des milieux continus et tiendrons compte des effets électromagnétiques. Nous utiliserons donc les seuls systèmes de coordonnées où la vitesse relative soit petite par rapport à la vitesse de la lumière c ($v^2/c^2 \ll 1$). Si l'on néglige les termes de second ordre en v/c en gardant en même temps les termes de premier ordre, le passage de K à K' se mouvant à la vitesse constante v relativement à K se définit par les transformations de Galilée

$$y^\alpha = x^\alpha - v^\alpha t, \quad t' = t,$$

et les transformations de E et H se simplifient pour prendre la forme

$$\left.\begin{aligned} E' &= E + \frac{1}{c}(v \times H), \\ H' &= H - \frac{1}{c}(v \times E) \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

(les grandeurs primées se rapportent au système K', non primées, au système K).

Dans les problèmes concrets, lorsque le vecteur E est petit par exemple, les formules (3.25) peuvent être encore simplifiées.

§ 4. Interaction du champ électromagnétique avec les conducteurs

Les conducteurs sont des corps dans lesquels sous l'action du champ électrique apparaît un courant électrique. Dans ce paragraphe on ne tiendra pas compte des phénomènes de polarisation et d'aimantation.

Parmi les conducteurs citons les corps métalliques: le cuivre, le fer, etc., et aussi le plasma, gaz ionisé, dont la conductivité électrique est très importante pour la pratique.

Tri- et quadrivecteurs densité du courant. Courant de conduction. Le courant électrique dans les conducteurs représente le mouvement des particules chargées (électrons et ions). En désignant par v_k les vitesses microscopiques de ces dernières dans un petit volume du milieu et par e_k les charges, la densité du courant j peut être introduite comme la somme $\sum_i e_i v_i$ moyennée sur le petit volume ΔV:

$$j = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i e_i v_i = j^* + \rho_c v. \tag{4.1}$$

Ici v est la vitesse macroscopique du milieu. Le vecteur j^* caractérise le « courant technique » usuel engendré dans les conducteurs mobiles ou immobiles sous l'effet du champ électromagnétique et appelé courant de conduction. Le vecteur $\rho_e v$ représente un courant résultant du transport de la charge macroscopique.

Comme

$$\sum_i e_i v_i = \sum_i e_i (v_i - v) + \Delta e v, \quad \left(\Delta e = \sum_i e_i\right),$$

le vecteur courant de conduction j^* s'exprime par les vecteurs de flux de diffusion I_i, introduits dans le chapitre III, selon la formule

$$j^* = \sum_i \frac{e_i}{m_i} I_i;$$

les rapports e_i/m_i ne dépendent que de l'espèce des ions, porteurs des charges.

En même temps que le trivecteur j défini dans l'espace géométrique on introduit le vecteur quadridimensionnel de densité du courant dans l'espace de Minkowski, lequel est défini dans le système cartésien propre par les formules

$$\left.\begin{aligned} &J = J^i \partial_i, \\ &J^1 = j^1,\ J^2 = j^2,\ J^3 = j^3,\ J^4 = \rho_e. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Dans tout autre système de coordonnées les composantes du vecteur J se définissent à l'aide des composantes dans le système propre d'après les formules de transformation générales du quadrivecteur dans l'espace de Minkowski.

Equations de Maxwell pour les conducteurs. En présence de courants et de charges et en l'absence de polarisation et d'aimantation dans les corps, les équations de Maxwell ont la forme

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \\ &\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

et

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div} H = 0, \\ &\operatorname{div} E = 4\pi\rho_e. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

En particulier, pour un champ électromagnétique stationnaire on a

$$\operatorname{rot} E = 0, \tag{4.5}$$

par conséquent, E est un vecteur potentiel et

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j, \tag{4.6}$$

c'est-à-dire que le courant électrique engendre toujours un champ rotationnel magnétique d'intensité $\boldsymbol{H}$.

Courant de déplacement. La grandeur $\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ provoque également l'apparition du champ magnétique, elle s'appelle courant de déplacement. En pratique, le courant de déplacement $\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ est souvent très petit. Maxwell l'a introduit dans ses équations en accord avec l'expérience et pour compléter les lois électrodynamiques expérimentales déjà établies de Coulomb, d'Ampère et de Faraday.

Principe de conservation de la charge totale. En formant la divergence des deux membres de la seconde équation (4.3) et en profitant des équations (4.4), on tire une conséquence importante des équations de Maxwell

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0 \tag{4.6'}$$

que l'on peut interpréter en tant qu'équation de continuité pour les charges ou comme condition de conservation de la charge.

En effet, en intégrant l'équation (4.6') par rapport à un certain volume géométrique immobile occupé par le milieu continu conducteur, on obtient

$$\int_V \frac{\partial \rho_e}{dt}\, d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_e\, d\tau = -\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{j}\, d\tau = -\int_\Sigma j_n\, d\sigma, \tag{4.7}$$

où Σ est une surface délimitant V et $\boldsymbol{n}$ est une normale extérieure à Σ. Le vecteur de courant $\boldsymbol{j}$ transporte les charges à travers la surface Σ; la quantité $-\int_\Sigma j_n\, d\sigma$ représente la charge totale entrant dans le volume V à travers la surface Σ en unité de temps. Cette quantité est égale à la variation de la charge dans le volume V en unité de temps, c'est-à-dire à la quantité

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_e\, d\tau = \frac{\partial e}{\partial t},$$

où e est la charge totale à l'intérieur de V. Lorsque $j_n = 0$ sur la surface Σ, $\partial e/\partial t = 0$ et la charge à l'intérieur du volume V se conserve.

La condition de conservation de la charge totale est une conséquence directe des équations (4.3) et (4.4) de Maxwell. Il faut ajouter que le principe de conservation de la charge, à la différence de la loi de conservation de la masse, s'avère de nos jours une loi physique fondamentale absolue.

Le système d'équations de Maxwell dans les conducteurs est un système incomplet. Le système d'équations de Maxwell (4.3) et (4.4) n'est pas complet. Le nombre des équations en est sept, car sous des conditions initiales correspondantes l'équation div $\boldsymbol{H} = 0$ est une conséquence immédiate de la première équation (4.3). Pourtant, le nombre d'inconnues qu'il comporte est dix: $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}$, ρ_e.

Lien existant entre les problèmes électrodynamiques et ceux de la mécanique des milieux continus. Ajoutons que, comme $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}^* + \rho_e \boldsymbol{v}$ dans les conducteurs mobiles, la répartition de la densité des charges dépend du mouvement du milieu et les problèmes électrodynamiques se trouvent liés à ceux de la mécanique des milieux continus.

Loi d'Ohm pour les conducteurs immobiles. Le système d'équations (4.3), (4.4) pour un milieu conducteur immobile peut être complété par la loi d'Ohm dans sa forme vectorielle. La loi d'Ohm établit la relation entre la densité du courant de conduction $\boldsymbol{j}^*$ et les caractéristiques du champ électromagnétique, qui dépend essentiellement des propriétés du conducteur. Dans nombre de cas importants la loi expérimentale d'Ohm pour les conducteurs immobiles a la forme

$$\boldsymbol{j}^* = \sigma \boldsymbol{E}. \tag{4.8}$$

Conductibilité. Le coefficient σ est dénommé conductibilité. Pour les conducteurs isotropes σ est un scalaire et s'exprime comme

$$\sigma = \frac{1}{R},$$

où R est la résistance du conducteur. Pour les conducteurs anisotropes, tels que les cristaux, la conductibilité σ est un tenseur de deuxième ordre et se contracte avec le vecteur $\boldsymbol{E}$ dans l'équation (4.8).

La conductibilité σ est différente pour les conducteurs différents et pour un même conducteur varie en fonction de la température T et d'autres paramètres thermodynamiques. La conductibilité d'un gaz croît avec la température. Par exemple, l'air qui n'est presque pas ionisé dans les conditions normales est un mauvais conducteur, mais lorsque sa température croît ou lorsqu'il reçoit une radiation intense, son degré d'ionisation croît, le nombre d'électrons libres augmente et l'air devient un bon conducteur. Pour les corps solides σ peut diminuer avec l'élévation de la température. La conductibilité est souvent envisagée comme une constante physique du matériel, analogue aux coefficients de viscosité μ et ζ ou au coefficient de conduction thermique $\varkappa$.

Loi d'Ohm dans le système de coordonnées propre. Postulons, pour les conducteurs mobiles, que la loi d'Ohm de la forme (4.8)

est vérifiée en chaque point du milieu dans le système propre (voir la définition du § 3).

Dans le système propre la loi d'Ohm prend la forme

$$\tilde{j}^* = \sigma \tilde{E}, \tag{4.9}$$

le signe $\sim$ est employé pour indiquer que les grandeurs correspondantes sont considérées dans le système de coordonnées propre. En passant de celui-ci au système de référence inertial principal par rapport auquel est envisagé le mouvement du milieu et en recourant aux formules (3.25) de transformation du vecteur champ électrique $\boldsymbol{E}$, on obtient la loi d'Ohm sous la forme

$$\boldsymbol{j}^* = \sigma \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} \right). \tag{4.10}$$

L'expérience appuyée par une analyse théorique approfondie montre que la loi d'Ohm dans la forme (4.10) n'est pas toujours utilisable. Pour un champ magnétique intense, par exemple, la loi d'Ohm doit être écrite comme suit:

$$\boldsymbol{j}^* = \sigma \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H} \right) + k (\boldsymbol{j}^* \times \boldsymbol{H}),$$

où k est une constante ou une fonction correspondante des paramètres thermodynamiques du milieu. Le terme supplémentaire $k\,(\boldsymbol{j}^* \times \boldsymbol{H})$ porte le nom de courant de Hall.

Milieux à conductibilité infinie. Il s'agit des milieux dont la conductibilité est très importante (tels sont le cuivre ou le plasma fortement ionisé). En pratique, il est souvent utile de considérer ces milieux comme possédant une conductibilité infinie, où σ est infinie et la résistance R est nulle. L'introduction de tels milieux est, dans certain sens, analogue à l'introduction du fluide parfait au lieu du fluide visqueux.

La densité du courant $\boldsymbol{j}^*$ étant finie par définition, il découle de la loi d'Ohm dans la forme (4.8) et (4.10) qu'à l'intérieur d'un milieu immobile à conductibilité infinie on doit avoir la condition

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = 0, \tag{4.11}$$

et pour un milieu à conductibilité infinie se mouvant à la vitesse $\boldsymbol{v}$ on doit avoir dans le système de l'observateur

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}. \tag{4.12}$$

Il en résulte que le champ du vecteur intensité électrique $\boldsymbol{E}$ dans un milieu à conductibilité infinie est défini à l'aide du champ du vecteur intensité magnétique $\boldsymbol{H}$ et le champ de la vitesse macroscopique $\boldsymbol{v}$ du milieu. Dans ce cas les deux équations de Maxwell (4.3) servent à définir le champ $\boldsymbol{H}$ et la densité du courant $\boldsymbol{j}$.

Force de Lorentz. On appelle forces pondéromotrices les forces qu'exerce sur un milieu le champ électromagnétique.

Lorsque le milieu est au repos, un élément infinitésimal de milieu $d\tau$ de charge de subit la force pondéromotrice

$$\boldsymbol{F}\,d\tau = \frac{de}{d\tau}\,\boldsymbol{E}\,d\tau = \rho_e \boldsymbol{E}\,d\tau.$$

Si en plus de la charge de l'élément $d\tau$ est traversé par des courants $\boldsymbol{j}$, l'unité de volume du milieu est soumise à la force pondéromotrice

$$\boldsymbol{F} = \rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H}), \tag{4.13}$$

appelée force de Lorentz.

Dans le cas d'un milieu en mouvement on admet pour la force pondéromotrice dans le système propre une formule analogue, à savoir

$$\widetilde{\boldsymbol{F}} = \rho_e \widetilde{\boldsymbol{E}} + \frac{1}{c}(\widetilde{\boldsymbol{j}} \times \widetilde{\boldsymbol{H}}), \tag{4.14}$$

où tous les vecteurs sont définis dans le système de coordonnées propre.

En se servant des formules approchées du passage du système propre K' se mouvant à la vitesse $\boldsymbol{v}$ relativement au système de coordonnées inertial K (voir (3.25)) et en négligeant les termes de l'ordre de v^2/c^2, on obtient dans le système K la formule suivante:

$$\boldsymbol{F} = \rho_e \left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right) + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j}^* \times \boldsymbol{H}); \tag{4.15}$$

on admet ici que $\widetilde{\boldsymbol{j}}^* = \boldsymbol{j}^*$. En comparant (4.15) avec (4.13) et compte tenu de (4.1) on en tire que

$$\widetilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F},$$

c'est-à-dire que la force de Lorentz dans l'approximation non relativiste est représentée dans le système de référence K par la formule (4.13) tout comme dans le cas d'un milieu immobile. L'égalité (4.13) définissant la force pondéromotrice qui agit sur l'unité de volume du milieu conducteur est établie à la base de l'expérience et représente l'un des principaux postulats électrodynamiques ou l'un des fondements servant à déterminer des caractéristiques électromagnétiques du champ et du courant.

Equations des impulsions tenant compte des forces pondéromotrices. Les forces pondéromotrices qu'exerce sur les éléments d'un milieu conducteur le champ électromagnétique sont des forces volumiques et doivent donc entrer, tout comme la force de la pesanteur par exemple, dans les équations des impulsions pour le milieu matériel:

$$\rho \boldsymbol{a} = \nabla_i \boldsymbol{p}^i + \boldsymbol{F}_{\text{Lorentz}} + \rho \boldsymbol{F}_{\text{pesanteur}}. \tag{4.16}$$

Dans le cas général, la détermination du mouvement d'un milieu continu conducteur est un problème complexe qui exige la résolution

des équations de la mécanique des milieux continus ensemble avec les équations électrodynamiques. Rappelons que l'expression pour la force pondéromotrice (4.13) rend compte uniquement des charges et des courants dans le milieu et doit être compliquée lorsque ce dernier est aimanté et polarisé.

Interactions énergétiques dans le champ et du champ avec le milieu conducteur. Considérons maintenant l'interaction énergétique entre le champ électromagnétique et le milieu conducteur. On connaît, par exemple, qu'un conducteur immobile traversé par un courant électrique s'échauffe, l'échauffement étant dû à l'échange énergétique entre le champ électrique et le conducteur.

Cherchons maintenant, en recourant aux équations de Maxwell, l'équation donnant la variation de l'énergie du champ électromagnétique et dite d'Oumov-Poynting. En soustrayant de la première équation de Maxwell (4.3) multipliée scalairement par $\boldsymbol{H}$ la seconde équation de Maxwell (4.3) multipliée scalairement par $\boldsymbol{E}$, on obtient

$$\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=-\frac{1}{c}\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}. \quad (4.17)$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes, le premier membre de cette relation peut être récrit sous la forme d'une différence de deux déterminants

$$\begin{vmatrix} H_1 & H_2 & H_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix}.$$

En permutant les lignes dans ces déterminants on obtient

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ E_1 & E_2 & E_3 \\ \boxed{H_1} & \boxed{H_2} & \boxed{H_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \boxed{E_1} & \boxed{E_2} & \boxed{E_3} \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix},$$

où l'on a marqué d'un carré les grandeurs qui ne doivent pas être différentiées quand on développe les déterminants.

On voit que le premier membre de la relation (4.17) peut être présenté par un seul déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ E_1 & E_2 & E_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix}.$$

Vecteur et équation d'Oumov-Poynting. Si l'on introduit le vecteur

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}), \tag{4.18}$$

dit vecteur d'Oumov-Poynting, la relation (4.17) prend la forme

$$\operatorname{div} \boldsymbol{S} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{8\pi}(H^2 + E^2) + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} = 0. \tag{4.19}$$

Cette équation est dénommée équation d'Oumov-Poynting. En intégrant (4.19) par rapport au volume fini immobile V on a

$$\int_{\Sigma} S_n \, d\sigma + \frac{d}{dt}\frac{1}{8\pi}\int_V (H^2 + E^2)\, d\tau + \int_V \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}\, d\tau = 0, \tag{4.20}$$

où Σ est la surface délimitant le volume V et $\boldsymbol{n}$ une normale extérieure à Σ.

Energie du champ électromagnétique. Chaque terme de la relation intégrale (4.20) possède une signification physique. Le scalaire tridimensionnel

$$\frac{1}{8\pi}(H^2 + E^2)$$

est introduit par définition comme la densité volumique $\mathscr{E}$ de l'énergie du champ électromagnétique; $\int_V \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}\, d\tau\, dt$ est considéré comme le travail élémentaire du champ électrique $\boldsymbol{E}$ effectué sur les particules chargées lors du déplacement intérieur microscopique dû au courant $\boldsymbol{j}^*$ et lors du mouvement macroscopique dû à la quantité $\rho_e \boldsymbol{v}$.

Chaleur Joule. Dans le cas d'un conducteur immobile

$$\int_V \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}\, d\tau\, dt = \int_V \boldsymbol{j}^* \cdot \boldsymbol{E}\, d\tau\, dt = dQ_{\text{Joule}} \tag{4.21}$$

représente la chaleur Joule. Pour un conducteur immobile, l'équation (4.20) peut être écrite sous la forme

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\int_{\Sigma} S_n \, d\sigma - \frac{dQ_{\text{Joule}}}{dt}. \tag{4.22}$$

La variation de l'énergie totale $\mathscr{E}$ du champ électromagnétique dans le volume V d'un conducteur immobile est conditionnée par le flux du vecteur d'Oumov-Poynting à travers la surface Σ délimitant V et par la chaleur Joule pénétrant dans le milieu.

Apport de l'énergie thermique du champ vers un milieu immobile. L'énergie thermique $dq_{\text{él}}^{(e)}$ apportée par le champ à l'unité de masse d'un milieu conducteur immobile est égale à

$$dq_{\text{él}}^{(e)} = \frac{dQ^{(e)}}{dm} = \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E})\,dt. \tag{4.23}$$

Variation de l'énergie du champ électromagnétique dans le vide. Il est à souligner que l'énergie du champ électromagnétique dans le volume V varie non seulement à cause de l'interaction du champ avec un milieu.

L'équation d'Oumov-Poynting est également valable pour les équations de Maxwell (1.11) et (1.12) dans le vide. Dans ce cas la relation (4.22) a la forme

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\int_{\Sigma} S_n\,d\sigma,$$

c'est-à-dire que la variation de l'énergie totale du champ électromagnétique dans le volume V n'est occasionnée que par le flux du vecteur d'Oumov-Poynting. Mais cette variation diffère de zéro seulement si le champ électromagnétique est non stationnaire. Dans le cas d'un champ électromagnétique stationnaire ($\partial\boldsymbol{H}/\partial t = \partial\boldsymbol{E}/\partial t = 0$) le flux du vecteur d'Oumov-Poynting à travers une surface fermée dans le vide est toujours nul en vertu des équations de Maxwell. Dans les conducteurs, le flux du vecteur d'Oumov-Poynting à travers la surface fermée Σ diffère de zéro même dans le cas d'un champ électromagnétique stationnaire. Le flux du vecteur d'Oumov-Poynting traversant une partie non fermée de Σ diffère en général de zéro lorsque le produit vectoriel $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \neq 0$. Le vecteur d'Oumov-Poynting caractérise l'échange énergétique entre différentes parties du champ électromagnétique et représente le flux d'énergie à travers la surface Σ séparant ces parties.

Dans le cas du mouvement macroscopique du milieu, toutes les interprétations précédentes sont applicables aux éléments infinitésimaux du milieu lorsque l'équation d'Oumov-Poynting est écrite dans le système de coordonnées inertial propre correspondant.

Dans les systèmes inertiaux se mouvant relativement au système inertial propre on a

$$\int_{\Delta V} \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,d\tau\,dt \neq \int_{\Delta V} \tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}\,d\tau\,dt, \tag{4.23'}$$

c'est-à-dire que la quantité $\int_{\Delta V} \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,dt\,d\tau$ n'est pas égale à la chaleur Joule. La différence constitue le travail de la force pondéromotrice (4.13).

Equation de la chaleur reçue pour un milieu conducteur. L'équation de la chaleur reçue pour une particule mobile d'un milieu continu dans le système de coordonnées propre s'écrit dans le cas général de la façon suivante:

$$dU = \frac{p^{\alpha\beta}\, d\varepsilon_{\alpha\beta}}{\rho} + dq^{(c)}_{\text{non él.}} + \frac{1}{\rho}\, \tilde{j}\cdot\tilde{E}\, dt + dq^{**}, \tag{4.24}$$

le signe $\sim$ désignant que les grandeurs correspondantes sont considérées dans le système de coordonnées propre. Le flux d'énergie $\frac{1}{\rho}\tilde{j}\cdot\tilde{E}\, dt = dq^{(c)}_{\text{él}}$ est la chaleur Joule, c'est-à-dire l'apport à la particule de l'énergie puisée dans le champ électromagnétique. Dans le cas considéré, la contribution du champ électromagnétique dans dq^{**} est posée nulle. On verra au paragraphe qui suit qu'il est nécessaire de tenir compte de dq^{**} si les effets de polarisation et d'aimantation ne sont pas négligeables.

Les relations pour les forces pondéromotrices et pour l'échange énergétique entre le champ et le milieu que l'on a envisagées dans ce paragraphe sont à la base de l'hydrodynamique magnétique dont l'exposé est remis au plus tard; nous nous occuperons maintenant à établir les relations pour les forces pondéromotrices et pour l'apport de l'énergie au milieu en provenance du champ électromagnétique lorsque les effets de polarisation et d'aimantation sont importants.

§ 5. Interaction du champ électromagnétique avec les corps compte tenu de la polarisation et de l'aimantation

Sous l'action du champ électromagnétique extérieur, dans certains corps apparaissent les effets de polarisation et d'aimantation, se crée un champ électromagnétique macroscopique déformant et modifiant le champ extérieur.

Equations de Maxwell compte tenu de la polarisation et de l'aimantation. Vecteurs induction électrique et induction magnétique, aimantation et polarisation. Pour des corps polarisés et aimantés les équations de Maxwell prennent la forme

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho_c, \tag{5.2}$$

où $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{B}$ sont respectivement les vecteurs induction électrique et magnétique.

Au lieu du vecteur induction magnétique $\boldsymbol{B}$ on peut envisager le vecteur aimantation $\boldsymbol{M}$ lié au précédent par la formule

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}. \tag{5.3}$$

Le vecteur $\boldsymbol{M}$ caractérise du point de vue macroscopique la distribution ordonnée des dipôles magnétiques dans le corps. De manière analogue, on peut remplacer le vecteur induction électrique $\boldsymbol{D}$ par le vecteur polarisation $\boldsymbol{P}$ lié au précédent par la relation

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}. \tag{5.4}$$

Le vecteur polarisation $\boldsymbol{P}$ du corps caractérise la répartition des dipôles électriques dans le corps.

La deuxième équation (5.1) est, comme précédemment, une conséquence de la première équation (5.1) lorsque à l'instant initial $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$.

Equations de Maxwell sous forme intégrale. Le système d'équations (5.1), (5.2) peut être écrit sous forme intégrale

$$\left.\begin{aligned} &\oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{1}{c}\int_{\Sigma_1} \frac{\partial B_n}{\partial t}\, d\sigma, \quad \int_{\Sigma} B_n\, d\sigma = 0, \\ &\oint_{\mathscr{L}} \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{4\pi}{c}\int_{\Sigma_1} j_n\, d\sigma + \frac{1}{c}\int_{\Sigma_1} \frac{\partial D_n}{\partial t}\, d\sigma, \quad \int_{\Sigma} D_n\, d\sigma = 4\pi\int_{V} \rho_e\, d\tau, \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

la conséquence de ce système, condition de la conservation de la charge totale, a alors pour expression

$$-\frac{d}{dt}\int_{V} \rho_e\, d\tau = \int_{\Sigma} j_n\, d\sigma,$$

où $\mathscr{L}$ est un contour fermé, au repos dans le système de coordonnées initial choisi, Σ_1 est la surface tendue sur ce contour, l'indice n désigne les composantes vectorielles normales aux surfaces Σ_1 et Σ, le sens de la normale $\boldsymbol{n}$ à la surface Σ_1 étant choisi de la sorte que, vu de son extrémité, le parcours du contour d'intégration $\mathscr{L}$ apparaît comme effectué dans le sens antihoraire; Σ est la surface fermée, au repos dans le système d'axes choisi, délimitant le volume V.

Equations de Maxwell dans la forme tensorielle tenant compte des courants électriques, de la polarisation et de l'aimantation. Tout comme les équations pour le champ électromagnétique dans le vide, les équations de Maxwell pour les milieux matériels peuvent être écrites dans la forme tensorielle dans l'espace de Minkowski. Pour le faire, introduisons selon (4.2) le vecteur quadricourant $\boldsymbol{J} = J^i \boldsymbol{e}_i$, de plus, au lieu des composantes covariantes et contravariantes F_{ij} et F^{ij} du tenseur du champ électromagnétique introduit au § 2 conformément aux matrices (2.1) et (2.3) considérons deux tenseurs antisymétriques F et H dont les composantes dans le système « carté-

sien » ($ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + c^2\,dt^2$) sont définies par les matrices

$$\| F_{ij} \| = \begin{vmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & cE_1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & cE_2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & cE_3 \\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0 \end{vmatrix} \tag{5.6}$$

et

$$\| H^{ij} \| = \begin{vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -\frac{1}{c}D^1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -\frac{1}{c}D^2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -\frac{1}{c}D^3 \\ \frac{1}{c}D^1 & \frac{1}{c}D^2 & \frac{1}{c}D^3 & 0 \end{vmatrix}. \tag{5.7}$$

Il est évident qu'en l'absence d'aimantation et de polarisation, c'est-à-dire lorsque $\boldsymbol{P} = 0$ et $\boldsymbol{M} = 0$, la matrice des composantes F_{ij} dans (2.1) coïncide avec la matrice des composantes F_{ij} dans (5.6), de même la matrice des composantes H^{ij} dans (5.7) coïncide avec celle des composantes F^{ij} dans (2.3).

Remplaçons le tenseur H par le tenseur polarisation $\mathcal{P}$ de composantes $\mathcal{P}_{ij}$ définies par la relation

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{1}{4\pi}(F_{ij} - H_{ij}).$$

On vérifie aisément que dans l'espace quadridimensionnel de Minkowski les équations (5.1) et (5.2) dans tout système de coordonnées curvilignes ont la forme tensorielle suivante

$$\nabla_i F_{jk} + \nabla_j F_{ki} + \nabla_k F_{ij} = 0 \tag{5.8}$$

et

$$\nabla_k H^{ik} = \frac{4\pi}{c} J^i. \tag{5.9}$$

Dans la forme tensorielle apparaît clairement l'invariance de ces équations par les transformations de Lorentz.

Transformations de principaux vecteurs du champ électromagnétique au changement de référentiels inertiaux. Si l'on passe d'un système inertial « immobile » K à un autre système « mobile » K', les vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{P}$ se transforment selon (3.22) et les vecteurs $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{M}$ d'après (3.23). Quant aux composantes du quadrivecteur

densité du courant électrique J^i; elles se transforment d'après les formules de transformation usuelles pour les composantes du vecteur. Notamment, lorsque le système K' est animé d'un mouvement de translation par rapport à K le long de l'axe x^1 avec la vitesse v, on obtient conformément à (3.16)

$$\left.\begin{aligned} &J'^1 = j'^1 = \frac{j^1 - v\rho_e}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad J'^2 = j^2, \\ &J'^3 = j^3, \quad J'^4 = \rho'_e = \frac{\rho_e - \frac{v}{c^2} j^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

Les composantes et la valeur du trivecteur densité du courant, ainsi que la densité de la charge, dépendent du choix du système de coordonnées inertial.

Potentiel-vecteur. Tout comme pour le champ électromagnétique dans le vide, on peut introduire le potentiel-vecteur $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}^i$ pour le champ dans un milieu en posant

$$F_{ij} = \nabla_j A_i - \nabla_i A_j.$$

Puis on voit que les équations (5.8) sont identiquement satisfaites. Les équations (5.9), écrites en négligeant la polarisation et l'aimantation, $J^i \neq 0$ et $\nabla^i A_i = 0$, se ramènent à l'équation d'onde inhomogène qui se présente en axes cartésiens comme suit:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial x^{3^2}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}.$$

Tenseur de Minkowski. S'il y a polarisation et aimantation, on peut prendre pour tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique le tenseur de Minkowski qu'on introduit, par définition, de la façon suivante:

$$S_i^{\cdot k} = -\frac{1}{4\pi}\left[F_{mi}^{\cdot\cdot}H^{mk} - \frac{1}{4}\delta_i^k F_{mn}H^{mn}\right]. \tag{5.11}$$

Ces formules sont une généralisation immédiate de la formule (2.22) pour le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique dans le vide. On vérifie aisément que le tenseur de Minkowski est, en général, non symétrique:

$$S^{ij} \neq S^{ji},$$

Quadrivecteur force pondéromotrice. Dans ce cas, les équations d'impulsions et d'énergie prennent la forme

$$\nabla_k S^{ik} = -F^i, \tag{5.12}$$

où F^i est le quadrivecteur densité de la force pondéromotrice volumique *).

A la base de la formule (5.12), on obtiendra dans la suite les formules générales pour la force pondéromotrice tridimensionnelle et l'échange d'énergie entre champ et milieu s'il y a polarisation et aimantation. Les expressions pour F^1, F^2, F^3 contiennent les composantes de la force de Lorentz. S'il n'y a ni polarisation ni aimantation du milieu mais sont présents les courants, la partie tridimensionnelle de la quadriforce pondéromotrice $\boldsymbol{F}$ s'identifie à la simple force de Lorentz et la quatrième composante est égale à $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}$, quantité équivalente dans le système de coordonnées propre à la chaleur Joule rapportée à l'unité de temps et à l'unité de volume de la substance.

Après l'introduction du tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique $S = S^{ij}\partial_i\partial_j$, les formules (5.12) définissent le quadrivecteur $\boldsymbol{F} = F^i\partial_i$, densité volumique de la force extérieure au corps. La densité volumique de la quadriforce qu'exerce le champ sur le corps, c'est-à-dire de la force pondéromotrice, est donnée par la répartition des caractéristiques du champ et s'introduit de cette manière pour le cas général lorsque le milieu (corps) se meut d'une façon arbitraire **).

Si l'on veut trouver les composantes F^i en fonction des caractéristiques vectorielles tridimensionnelles usuelles du champ, on doit recourir au système de coordonnées inertial dans lequel sont écrites les équations de Maxwell (5.1) et (5.2). On peut prendre comme système inertial les différents systèmes de coordonnées, en particulier, le système fixe de l'observateur relativement auquel se définit le mouvement du milieu, ou un ensemble de systèmes inertiaux propres en chaque point du milieu et à chaque instant de temps.

Les composantes des caractéristiques vectorielles tridimensionnelles du champ ainsi déterminées dans les systèmes de coordonnées propres peuvent être calculées dans le système concomitant qui est, en général, non inertial. Si éventuellement c'est un système inertial, le système concomitant et le système propre coïncident en chaque point, de sorte que dans ce cas l'interaction entre le champ et le

*) En axes cartésiens de métrique quadridimensionnelle $ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + c^2dt^2$ on a pour les composantes spatiales de la quadriforce $F^\alpha_{\text{quadr}} = -F_{\alpha\,\text{quadr}}$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Pour les composantes de la triforce usuelle on a $F^\alpha_{\text{quadr}} = F^\alpha_{\text{trl}} = F_{\alpha\text{trl}}$. Ces relations sont également valables en passant des quadrivecteurs quelconques dans l'espace pseudo-euclidien aux trivecteurs correspondants dans l'espace euclidien tridimensionnel.

**) Les formules (5.12) et (5.34) sont généralisations des lois expérimentales fondamentales de l'électrodynamique : celles de Coulomb, de Lorentz, de Joule, étendues au cas général du mouvement des corps matériels aimantés et polarisés. On verra dans la suite que cette généralisation est liée aux conditions du choix du tenseur énergie-impulsion et du moment propre du champ qui peuvent être différentes.

milieu peut être considérée comme une interaction entre le champ et un corps immobile dans le système de coordonnées concomitant.

Dans chaque système de coordonnées, trois composantes F^α ($\alpha = 1, 2, 3$) et la quatrième F^4, lors des transformations spatiales des coordonnées de la forme

$$y^\alpha = y^\alpha(x^\beta), \quad y^4 = x^4; \ \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

constituent respectivement les composantes du vecteur tridimensionnel et un scalaire tridimensionnel.

Il a été noté plus haut que ces vecteurs et le scalaire dépendent du choix du système initial x^i. Dans le cadre de la relativité restreinte, même dans les systèmes inertiaux en translation les uns par rapport aux autres avec une vitesse constante, ce vecteur tridimensionnel et ce scalaire tridimensionnel ne sont pas invariants *).

Pourtant, dans les systèmes inertiaux se mouvant les uns par rapport aux autres, ces caractéristiques ne diffèrent que peu lorsque les vitesses relatives sont petites comparativement à celle de la lumière. En mécanique non relativiste, on peut négliger ces différences dans les applications.

Pour rendre compte, dans le cas général, des processus physiques internes on peut choisir en tant que caractéristiques naturelles et commodes les vecteurs tridimensionnels de densité de la force pondéromotrice et les scalaires tridimensionnels $F_4 = c^2F^4$ considérés dans le système de coordonnées propre.

Relations complémentaires d'électrodynamique complétant les équations de Maxwell (5.1), (5.2). Le système d'équations de Maxwell (5.1), (5.2) n'est pas complet. Il comporte sept équations indépendantes et seize inconnues $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{j}, \rho_e$. Ces équations ne suffisent pas à définir les caractéristiques citées du champ électromagnétique.

Pour compléter le système il faut encore au moins trois relations vectorielles reliant les vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}^* = \boldsymbol{j} - \rho_e \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D}$.

On a recours alors à la loi d'Ohm et aux lois de polarisation et d'aimantation des corps. Ces relations complémentaires ne sont pas d'un caractère universel variant selon les corps et processus. En nombre de cas, la loi d'Ohm et les lois de polarisation et d'aimantation du corps sont utilisées sous la forme

$$\boldsymbol{j}^* = \sigma\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{H}\right), \tag{5.13}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \mu \widetilde{\boldsymbol{H}}, \tag{5.14}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{D}} = \varepsilon \widetilde{\boldsymbol{E}}, \tag{5.15}$$

*) C'est une propriété commune de tous les vecteurs tridimensionnels en relativité restreinte. Il en est ainsi du vecteur densité du courant (voir (3.16) et (5.10)).

σ désignant, comme précédemment, le coefficient de conductibilité, μ le coefficient de perméabilité magnétique et ε la constante diélectrique. En pratique σ, μ et ε sont souvent considérés constants. Dans le vide, $\sigma = 0$, $\mu = \varepsilon = 1$. Les grandeurs σ, μ et ε, tout comme les coefficients de viscosité et de conduction, peuvent être prises comme caractéristiques physiques du milieu. Elles dépendent de la température (aux basses températures, l'aimantation et la polarisation des corps sont plus prononcées) et peuvent être des caractéristiques tensorielles, comme c'est le cas des corps anisotropes.

Lois d'aimantation et de polarisation sous forme tensorielle. Les relations vectorielles tridimensionnelles (5.14) et (5.15) écrites dans le système de coordonnées propre sont équivalentes à une seule relation tensorielle quadridimensionnelle qui est invariante par le choix du système de coordonnées. Cette dernière s'écrit en composantes

$$F_{ij} = C_{ijkl} H^{kl}, \quad C_{ijkl} = -C_{jikl} = -C_{ijlk}. \tag{5.16}$$

Les composantes du tenseur C_{ijkl} dépendent de celles du tenseur métrique g_{ij}, des composantes du vecteur quadrivitesse $u^i = dx^i/ds$ des points du milieu et, en général, de divers autres paramètres physiques caractérisant l'état physique des particules du milieu tels que la température, les composantes du tenseur des déformations, etc.

Dans le cas isotrope, lorsque les coefficients μ et ε dans (5.14) et (5.15) sont des scalaires, il est facile de voir que l'on a pour les composantes du tenseur C_{ijkl} les formules suivantes :

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2}\left\{\mu(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon}(g_{ik}u_j u_l - g_{jk}u_i u_l + g_{jl}u_i u_k - g_{il}u_j u_k\right\},$$

où $\gamma_{ij} = g_{ij} - u_i u_j$, et u_i sont les composantes covariantes du vecteur quadrivitesse. Le plus facile serait de vérifier cette formule pour un corps immobile dans un système de coordonnées inertial cartésien associé au corps. Dans ce système on a

$$u^\alpha = u_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad u^4 = \frac{1}{c}, \quad u_4 = c.$$

Il est à noter que la loi d'aimantation (5.14) n'est pas remplie pour les champs magnétiques très intenses, lorsque le vecteur aimantation $\boldsymbol{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\boldsymbol{H}$ atteint sa valeur maximale en pleine saturation, tandis que celle du vecteur $\boldsymbol{H}$ peut être augmentée aux dépens des courants extérieurs. De même la loi de polarisation (5.15) n'est pas valable pour des matériaux dans lesquels les charges

dipolaires (dues à la polarisation du corps) demeurent constantes en l'absence du champ électrique $\boldsymbol{E}$ extérieur. Ainsi donc, les lois de polarisation et d'aimantation (5.14) et (5.15) sont fort utiles pour la résolution d'une classe considérable de problèmes, pour différents milieux, seulement si les champs électromagnétiques ne sont pas très intenses.

Forces pondéromotrices. Cherchons maintenant l'expression pour la densité des forces pondéromotrices, c'est-à-dire des forces qu'exerce le champ électromagnétique sur des corps dans lesquels se produisent l'aimantation et la polarisation. Cette expression pour les forces pondéromotrices n'est liée qu'aux équations de Maxwell (5.1), (5.2) et a lieu quelles que soient les lois d'Ohm, de polarisation et d'aimantation.

Si l'on tient compte de la polarisation et de l'aimantation, la force pondéromotrice tridimensionnelle rapportée à l'unité de volume diffère de celle de Lorentz; dans tout système curviligne inertial, lorsqu'on prend le tenseur de Minkowski en tant que tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique, elle s'exprime en conformité de (5.12) comme suit:

$$\boldsymbol{F} = \rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}) + \\ + \frac{1}{8\pi}(D_\alpha \nabla E^\alpha - E^\alpha \nabla D_\alpha + B_\alpha \nabla H^\alpha - H^\alpha \nabla B_\alpha), \qquad (5.17)$$

où $\nabla = \mathbf{э}^k \nabla_k$ est le vecteur-gradient tridimensionnel; dans les axes cartésiens orthogonaux

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

On voit tout de suite que dans le dernier terme de la formule (5.17) pour la force pondéromotrice les vecteurs inductions électrique et magnétique $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{B}$ peuvent être remplacés par les vecteurs polarisation et aimantation $4\pi\boldsymbol{P}$ et $4\pi\boldsymbol{M}$. Selon (5.17), la force $\boldsymbol{F}$ diffère de celle de Lorentz

$$\boldsymbol{F}_{\text{Lorentz}} = \rho_e \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H})$$

On aperçoit que le dernier terme de la parenthèse dans (5.17) se réduit à zéro lorsque sont valables les lois (5.14) et (5.15), quand ε et μ sont des scalaires et les mêmes pour toutes les particules du milieu (indépendants de coordonnées). En général, ce terme diffère de zéro dans les milieux anisotropes lorsque ε et μ sont des tenseurs, et dans les milieux isotropes lorsque les lois (5.14) et (5.15) ne jouent pas ou que ε et μ sont des fonctions des paramètres dépendant des coordonnées (de la température ou de la densité par exemple).

Dans les équations tridimensionnelles traduisant la loi de variation de la quantité de mouvement d'un milieu matériel, la force

pondéromotrice tridimensionnelle volumique extérieure au milieu est définie par la formule (5.17) dans chaque système inertial. L'invariance du vecteur force quadridimensionnel et la non-invariance du vecteur force pondéromotrice tridimensionnel dans différents systèmes inertiaux se mouvant les uns par rapport aux autres, ainsi qu'il en est de tous les vecteurs tridimensionnels en relativité restreinte, représentent un effet relativiste. En pratique, comme on l'a vu au § 4 pour le cas de la force de Lorentz, lorsque les vitesses de translation relatives des systèmes inertiaux sont petites par rapport à celle de la lumière, la différence entre les composantes du vecteur pondéromotrice tridimensionnel résultant de leur non-invariance est négligeable par rapport à leurs valeurs *).

Comme nous l'avons déjà remarqué, pour établir les équations du mouvement relativement aux systèmes non inertiaux et lors de l'étude des mouvements accélérés des particules par rapport aux systèmes inertiaux, on peut introduire localement les systèmes inertiaux propres. Dans ces systèmes, conformément à l'hypothèse physique fondamentale et compte tenu du principe de l'égalité d'action et de réaction, les forces quadridimensionnelles d'interaction entre le champ et le milieu se définissent d'après les formules (5.12) et les forces tridimensionnelles selon (5.17). De cette façon les lois établies pour les interactions entre le champ électromagnétique et les corps matériels au repos s'étendent aux cas de l'interaction du champ électromagnétique avec les milieux matériels se mouvant arbitrairement par rapport à l'observateur inertial.

Il faut faire la remarque suivante sur l'équation tridimensionnelle des impulsions (équation de la variation de la quantité de mouvement). D'après la définition du tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique, le champ possède une impulsion (quantité de mouvement) et une énergie s'exprimant par les caractéristiques du champ et, en particulier, par les vecteurs polarisation $\boldsymbol{P}$ et aimantation $\boldsymbol{M}$.

En mécanique newtonienne, l'impulsion et l'énergie cinétique d'un point matériel ou d'un corps fini en translation s'expriment uniquement par la masse et la vitesse du corps. Dans le cas général, lorsque le corps (milieu matériel) est polarisé et aimanté, la théorie de la relativité nous apprend que l'impulsion et l'énergie cinétique du corps en mouvement de translation dépendent non seulement de sa masse et de sa vitesse mais également des « paramètres internes », tels que les vecteurs polarisation et aimantation $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{M}$.

L'influence des vecteurs $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{M}$ sur la quantité de mouvement des particules du corps est un effet relativiste dont dans le cadre de la mécanique newtonienne on peut parfois rendre compte en

*) En passant d'un système inertial à un autre, « mobile », les vecteurs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D}$ se transforment conformément aux formules analogues à celles de transformation des vecteurs $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{E}$.

rapportant la partie correspondante du tenseur énergie-impulsion du milieu au tenseur énergie-impulsion du champ, autrement dit, en donnant une nouvelle définition, pour le modèle donné du milieu, au tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique. Par conséquent, on peut introduire pour le champ électromagnétique au lieu du tenseur de Minkowski d'autres tenseurs qui conduiront à des formules modifiées pour les forces pondéromotrices, différant par la présence de termes complémentaires. Si pour les mêmes équations du mouvement on utilise le tenseur de Minkowski pour le champ, on verra apparaître les termes complémentaires dont la présence est due à la prise en considération des propriétés dynamiques compliquées du milieu matériel polarisé et aimanté.

Les raisonnements ci-dessus viennent à l'appui de cette idée simple que pour construire la théorie des modèles des milieux polarisés et aimantés, il est commode et même nécessaire de profiter de la mécanique relativiste.

Apport d'énergie du champ au corps. Outre l'interaction dynamique, le champ et le milieu matériel s'échangent de l'énergie.

A partir des équations (5.12) et des formules pour les composantes du tenseur énergie-impulsion de Minkowski (5.11) on obtient dans le système de coordonnées inertial cartésien pour $i = 4$

$$F^4c^2 = F_4 = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} + E_\beta \frac{\partial P^\beta}{\partial t} + H_\beta \frac{\partial M^\beta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E_\beta P^\beta + H_\beta M^\beta}{2}\right). \qquad (5.18)$$

En effet, conformément à (5.6), (5.7) et (5.11) on a

$$S_4^{\cdot 4} = -\frac{1}{4\pi}\left(F_{m4}H^{m4} - \frac{1}{4}F_{mn}H^{mn}\right) = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}}{8\pi} \qquad (5.19)$$

et en outre

$$\boldsymbol{S} = S_4^{\cdot\alpha}\boldsymbol{\partial}_\alpha = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}).$$

Par définition

$$F_4 = -\left(\frac{\partial S_4^{\cdot 4}}{\partial t} + \frac{\partial S_4^{\cdot 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial S_4^{\cdot 2}}{\partial x^2} + \frac{\partial S_4^{\cdot 3}}{\partial x^3}\right) = -\frac{\partial S_4^4}{\partial t} - \operatorname{div}\boldsymbol{S}. \qquad (5.20)$$

Dans le cas considéré, si l'on tient compte de l'aimantation et de la polarisation, en vertu des équations de Maxwell (5.1) et (5.2) l'équation d'Oumov-Poynting prend la forme légèrement modifiée

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S} + \frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) + \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} = 0. \qquad (5.21)$$

En portant $S_4^{\cdot 4}$ de (5.19) et div $\boldsymbol{S}$ de (5.21) dans (5.20), on arrive après des transformations simples à (5.18). On voit aisément (cf. (5.3)) qu'au lieu des composantes H_β du vecteur $\boldsymbol{H}$ on peut écrire dans (5.18) les composantes B_β du vecteur $\boldsymbol{B}$ sans que la valeur de F_4 en soit modifiée.

L'énergie fournie par le champ à un élément $d\tau$ de volume du milieu matériel en temps dt au dépens du courant électrique, de la polarisation et de l'aimantation s'écrit

$$F_4\, d\tau\, dt. \tag{5.22}$$

Pour les mouvements continus, cette grandeur figurera dans le second membre de l'équation de l'énergie (2.18), ch. V, en tant que partie de l'apport macroscopique extérieur $dQ_{\text{él}} = dq_{\text{él}} dm$ résultant de l'interaction du milieu matériel avec le champ électromagnétique; $dq_{\text{él}}$ est l'apport d'énergie rapporté à l'unité de masse. Conformément à (5.18) et (5.22) on peut écrire dans tout système de coordonnées inertial

$$\begin{aligned} F_4\, dt\, d\tau = dQ_{\text{él}} = dq_{\text{él}}\, dm = \\ = \left[\boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{j}\, dt + E_\alpha\, dP^\alpha + H_\alpha\, dM^\alpha - \frac{1}{2}\, d\,(E_\alpha P^\alpha + H_\alpha M^\alpha) \right] d\tau = \\ = \left[\frac{1}{\rho}\, \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{j}\, dt + E_\alpha\, d\pi^\alpha + H_\alpha\, dm^\alpha - \frac{1}{2}\, d\,(E_\alpha \pi^\alpha + H_\alpha m^\alpha) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}\,(E_\alpha \pi^\alpha + H_\alpha m^\alpha)\, \nabla_\beta v^\beta\, dt \right] dm, \end{aligned} \tag{5.23}$$

où $dm = \rho\, d\tau$ est l'élément de masse, $\pi^\alpha = \frac{P^\alpha}{\rho} = \frac{P^\alpha d\tau}{dm}$, $m^\alpha = \frac{M^\alpha}{\rho} = \frac{M^\alpha d\tau}{dm}$ sont les composantes des vecteurs densité de polarisation et densité d'aimantation rapportés à la masse de l'élément qui en constitue la caractéristique physique principale. Les accroissements $d\pi^\alpha$ et dm^α des composantes des vecteurs π^α et m^α en temps dt sont pris par rapport au système de coordonnées inertial; en particulier, pour un point donné cela pourrait être le système propre. Dans la formule (5.23) la dérivée particulaire de la densité de la particule par rapport au temps $\frac{d\rho}{dt}$ est substituée, conformément à l'équation de continuité (1.3), ch. III, par $-\rho\nabla_\beta v^\beta = -\rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}$, où v^β sont les composantes de la vitesse des points du milieu matériel.

La formule (5.23) pour l'apport de l'énergie électromagnétique est étroitement liée à l'équation d'Oumov-Poynting (5.21) mais peut être récrite selon (5.19) et (5.20) sous la forme

$$dq_{\text{él}} = -\frac{1}{\rho}\left(d\,\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}}{8\pi} + \operatorname{div} \boldsymbol{S}\, dt \right). \tag{5.24}$$

Pour le milieu en mouvement ou immobile, dans le système de coordonnées propre on a $dq_{\text{él}} = dq^*_{\text{él}} = dq^{(e)}_{\text{él}} + dq^{**}_{\text{él}}$. La quantité $dq_{\text{él}}$, calculée dans un système de coordonnées quelconque, diffère de $dq^*_{\text{él}}$ de la valeur du travail élémentaire des forces électromagné-

tiques pondéromotrices extérieures au milieu. Le travail des forces extérieures n'entrant pas dans l'équation de la chaleur reçue, on y inclut donc $dq^*_{\text{él}}$.

A l'appui de (5.23) on peut écrire comme suit l'équation de la chaleur reçue (2.20), ch. V, pour le milieu matériel, en prenant en considération la polarisation et l'aimantation:

$$dU = \left(\frac{1}{\rho} p^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} \frac{E_\gamma \pi^\gamma + H_\gamma m^\gamma}{2}\right) \nabla_\beta v_\alpha \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} \, dt + E_\alpha \, d\pi^\alpha + H_\alpha \, dm^\alpha - \frac{1}{2} d\,(E_\alpha \pi^\alpha + H_\alpha m^\alpha) + dq^*_1. \quad (5.25)$$

Tous les vecteurs de nature électromagnétique et leurs accroissements sont pris ici dans le système de coordonnées propre; $dq^*_1 = dq^{(c)}_1 + dq^{**}_1$ est l'apport sommaire d'énergie vers la particule rapporté à l'unité de masse qui représente un supplément au travail des forces macroscopiques et à l'apport d'énergie provenant du champ électromagnétique. En particulier, la quantité $dq^{(c)}_1$ peut être un apport de chaleur dû à la conduction et dq^{**}_1 peut résulter, dans des modèles des milieux à propriétés complexes, des interactions de la particule envisagée avec les autres particules du milieu matériel.

La construction théorique du modèle d'un milieu matériel est basée sur la connaissance de l'énergie interne U rapportée à l'unité de masse figurant dans (5.25). Il est commode de porter la différentielle totale $d\frac{1}{2}(E_\alpha \pi^\alpha + H_\alpha m^\alpha)$, figurant à droite dans (5.25), dans le premier membre et de définir l'énergie interne du milieu conformément à l'égalité

$$U_1 = U + \frac{1}{2}(E_\alpha \pi^\alpha + H_\alpha m^\alpha). \quad (5.26)$$

Le passage de U à U_1 est analogue au passage, dans les équations de l'énergie ou de la chaleur reçue, de l'énergie interne à l'énergie libre ou au potentiel thermodynamique de Gibbs, etc. (voir ch. V, § 6). En omettant l'indice « unité » dans la notation de U_1, on peut utiliser l'équation de la chaleur reçue (5.25) sous la forme

$$dU = \left(\frac{1}{\rho} p^{\alpha\beta} - \frac{E_\gamma \pi^\gamma + H_\gamma m^\gamma}{2} g^{\alpha\beta}\right) \nabla_\beta v_\alpha \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} \, dt + E_\alpha \, d\pi^\alpha + H_\alpha \, dm^\alpha + dq^*_1. \quad (5.27)$$

Si le milieu est au repos, alors $v_\alpha = 0$ et l'équation (5.27) se simplifie

$$d\,(\rho U) = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{j} \, dt + E_\alpha \, dP^\alpha + H_\alpha \, dM^\alpha + \rho \, dq^*_1. \quad (5.28)$$

L'équation de la chaleur reçue sous cette forme est souvent rencontrée dans les problèmes statistiques de la physique. Notons ce fait essentiel que pour un milieu en mouvement on a au lieu de (5.28) l'équation (5.27) valable dans le système de coordonnées propre mobile pour lequel on sait écrire les équations de Maxwell.

La signification physique de différents termes de (5.23) en point considéré du milieu apparaît clairement lorsque le système de coordonnées est propre où l'on a

$$\frac{1}{\rho} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}\, dt = dq_{\text{él}}^{(c)}, \tag{5.29}$$

$dq_{\text{él}}^{(c)}$ étant la chaleur Joule, et

$$\frac{1}{\rho} (\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{P} + \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{M}) = dq_{\text{él}}^{**}, \tag{5.30}$$

si le processus de polarisation et d'aimantation est réversible.

Remarquons qu'une telle décomposition de $dq_{\text{él}}^{*}$ en $dq_{\text{él}}^{(c)}$ et $dq_{\text{él}}^{**}$ n'est justifiée que dans le cas du milieu au repos. Lorsque celui-ci se meut par rapport au système de référence, les formules (5.29) et (5.30) sont valables en chaque point seulement dans le système propre *).

Lorsque l'on a les lois d'aimantation et de polarisation (5.14) et (5.15), les phénomènes de polarisation et d'aimantation sont réversibles et le champ électromagnétique dépense en polarisation et en aimantation une énergie macroscopique différente de zéro

$$\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{P} + \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{M} \neq 0.$$

Les quantités $dq_{\text{él}}^{(c)}$, $dq_{\text{él}}^{**}$, les composantes des vecteurs $\tilde{\boldsymbol{E}}$, $\tilde{\boldsymbol{H}}$, $\tilde{\boldsymbol{P}}$ et $\tilde{\boldsymbol{M}}$ et leurs accroissements dans le système de coordonnées propre s'expriment par les composantes correspondantes et leurs accroissements dans le système de coordonnées concomitant en tenant compte du mouvement de celui-ci relativement au système inertial donné **).

Lorsque le mouvement du milieu est arbitraire, on peut définir les systèmes de coordonnées propres en chaque point et à chaque instant. L'ensemble des systèmes propres dans l'espace-temps quadridimensionnel représente évidemment une variété non holonome des systèmes de coordonnées, autrement dit, il n'existe pas de transformation unique de coordonnées par laquelle il soit possible de passer du système de l'observateur à tous les systèmes propres en

*) Voir (4.23').

**) La théorie correspondante est développée dans l'article de L. Sédov *Sur les forces pondéromotrices de l'interaction du champ électromagnétique et du continuum matériel en mouvement accéléré compte tenu de la finitude des déformations* (en russe), PMM, t. 29, Fasc. 1, 1965, pp. 4 à 17.

même temps. D'autre part, il existe une telle transformation quadridimensionnelle unique (qui est la loi du mouvement du milieu) permettant de passer du système de l'observateur au système de coordonnées concomitant, ce dernier n'étant pourtant pas inertial. Ainsi, pour établir les lois physiques d'un milieu il est plus commode d'utiliser un seul système de coordonnées concomitant mobile relativement auquel les vitesses de tous les points sont nulles, tandis que, dans le cas du système propre, ce n'est que la vitesse relative du point considéré qui est nulle à l'instant donné.

Vu l'arbitraire dans le choix du système de coordonnées spatial en tant que systèmes concomitant et propre, on peut admettre dans la théorie générale, sans restreindre la généralité (dans les espaces euclidien et pseudo-euclidien), qu'à tout l'instant fixe t' les courbes coordonnées et les systèmes de vecteurs de base $\hat{\mathfrak{e}}_i$ et $\tilde{\mathfrak{e}}_i$ coïncident dans les systèmes concomitant et propre en chaque point du milieu, c'est-à-dire que $\hat{\mathfrak{e}}_\alpha = \tilde{\mathfrak{e}}_\alpha$, lorsque $t = t'$. Si l'on choisit de la sorte les systèmes de coordonnées, on voit qu'il se produit à l'instant $t' + dt$ une séparation des courbes coordonnées. Les systèmes de coordonnées propres pour différents points se déplacent comme des corps rigides à des vitesses de translation $\boldsymbol{v}$ différentes, égales aux vitesses du point considéré du milieu par rapport au système de référence inertial de l'observateur lorsque les vecteurs de base $\tilde{\mathfrak{e}}_\alpha$ sont constants.

Au bout du temps dt, le trièdre des vecteurs de base $\hat{\mathfrak{e}}_\alpha$ du système concomitant en chaque point du milieu se déformera, subira une rotation et, en plus, se déplacera en translation avec la vitesse $\boldsymbol{v}$. A l'instant $t' + dt$ on a dans le cas général qu'en chaque point du milieu ou de l'espace $\hat{\mathfrak{e}}_\alpha \neq \tilde{\mathfrak{e}}_\alpha$.

Les caractéristiques vectorielles et tensorielles du champ et du milieu et leurs accroissements et dérivées par rapport au temps et aux coordonnées, définis relativement au système propre, peuvent être calculés dans le système concomitant. Si les trièdres spatiaux des systèmes concomitant et propre coïncident en chaque point du milieu et à l'instant donné, ce qui est toujours possible de supposer, les composantes de tous les vecteurs et tenseurs tridimensionnels coïncident également. Comme les systèmes concomitant et propre ne se meuvent pas de la même façon par rapport au système de l'observateur, les accroissements et les dérivées par rapport au temps des composantes tensorielles sont différents dans les systèmes concomitant et propre mais il existe entre elles des relations simples *).

*) Par exemple, pour tout vecteur $A = \tilde{A}^\alpha \tilde{\mathfrak{e}}_\alpha = \hat{A}^\alpha \hat{\mathfrak{e}}_\alpha = \tilde{A}_\alpha \tilde{\mathfrak{e}}^\alpha = \hat{A}_\alpha \hat{\mathfrak{e}}^\alpha$ sont vraies les formules

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d\tilde{A}^\alpha}{dt}\tilde{\mathfrak{e}}_\alpha = \frac{d\hat{A}^\alpha}{dt}\hat{\mathfrak{e}}_\alpha + \hat{A}^\beta \frac{d\hat{\mathfrak{e}}_\beta}{dt} = \left(\frac{d\hat{A}^\alpha}{dt} + \hat{A}^\beta \hat{\nabla}_\beta \hat{v}^\alpha\right)\hat{\mathfrak{e}}_\alpha$$

Nous avons exposé plus haut la théorie des forces pondéromotrices extérieures au milieu matériel et de l'apport extérieur de l'énergie provenant du champ électromagnétique *indépendamment des propriétés des modèles concrets* des milieux continus matériels.

Dans le cas général, les équations d'état pour les contraintes internes et l'énergie interne des éléments du milieu dépendent des différentes grandeurs et, en particulier, des vecteurs π et m. Le terme $\nabla_\beta p^{\alpha\beta}$ dans l'équation des impulsions et le terme $\frac{1}{\rho} p^{\alpha\beta}\nabla_\beta v_\alpha$ dans l'équation de la chaleur reçue dépendent non seulement des caractéristiques mécaniques et thermodynamiques macroscopiques du milieu *mais également des composantes des vecteurs π et m. Pourtant, ici ces termes sont dus aux interactions à l'intérieur du milieu matériel*, où les vecteurs π et m figurant également dans le système incomplet d'équations de Maxwell sont des caractéristiques de l'état du milieu.

Equation des moments sous forme quadridimensionnelle. Comme le prouvent les expériences avec l'aiguille aimantée dans le champ magnétique, l'interaction entre les corps et le champ ne se ramène pas uniquement aux forces pondéromotrices, les couples distribués dans le volume, donnés par leurs moments, y participent également. Introduisons et analysons l'équation différentielle des moments pour le champ. On pourrait prendre l'équation des moments tridimensionnelle usuelle où il n'y a que les moments ordinaires des forces tridimensionnelles. Cependant, en relativité restreinte où le champ électromagnétique est décrit par les équations de Maxwell, la force est un quadrivecteur. C'est pourquoi on doit considérer

---

et

$$\frac{dA}{dt}=\frac{d\widetilde{A}_\alpha}{dt}\widetilde{\mathfrak{s}}^\alpha=\left(\frac{d\hat{A}_\alpha}{dt}-\hat{A}_\beta\hat{\nabla}_\alpha\hat{v}^\beta\right)\hat{\mathfrak{s}}^\alpha,$$

car

$$\frac{d\hat{\mathfrak{s}}_\beta}{dt}=\hat{\nabla}_\beta\hat{v}^\alpha\hat{\mathfrak{s}}_\alpha \quad \text{et} \quad \frac{d\hat{\mathfrak{s}}^\beta}{dt}=-\hat{\nabla}_\alpha\hat{v}^\beta\hat{\mathfrak{s}}^\alpha.$$

Si à l'instant donné $\hat{\mathfrak{s}}_\alpha=\widetilde{\mathfrak{s}}_\alpha$ et $\hat{\mathfrak{s}}^\alpha=\widetilde{\mathfrak{s}}^\alpha$, on a les égalités

$$\frac{d\widetilde{A}^\alpha}{dt}=\frac{d\hat{A}^\alpha}{dt}+\hat{A}^\beta\hat{\nabla}_\beta\hat{v}^\alpha \quad \text{et} \quad \frac{d\widetilde{A}_\alpha}{dt}=\frac{d\hat{A}_\alpha}{dt}-\hat{A}_\beta\hat{\nabla}_\alpha\hat{v}^\beta.$$

Dans les axes curvilignes, ces formules sont une généralisation des formules connues d'Euler en cinématique des solides appliquées aux systèmes de coordonnées mobiles déformables et reliant les dérivées des composantes vectorielles par rapport au temps dans les systèmes de coordonnées parfaitement rigides immobiles et en rotation.

De même, on peut écrire les formules reliant les dérivées de tout ordre par rapport au temps des composantes des tenseurs de tout ordre et de toute structure d'indices dans les systèmes de coordonnées propre et concomitant.

l'équation des moments en formalisme quadridimensionnel, ce qui permet de généraliser la notion de moments des forces et de moment cinétique pour le milieu matériel, ainsi que pour le champ.

De l'équation quadridimensionnelle (5.12) de l'énergie-impulsion pour le champ écrite dans le repère cartésien inertial découlent les égalités suivantes:

$$x^j \nabla_k S^{ik} - x^i \nabla_k S^{jk} = -(x^j F^i - x^i F^j), \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (5.31)$$

où x^i sont les coordonnées des points dans le volume occupé par le corps. Le tenseur antisymétrique avec six composantes indépendantes $x^j F^i - x^i F^j$ peut être envisagé comme une généralisation au cas quadridimensionnel de la notion usuelle de tenseur tridimensionnel antisymétrique, correspondant à un seul vecteur axial qui est la densité volumique du moment de la force pondéromotrice tridimensionnelle par rapport à l'origine des coordonnées.

Il est à souligner qu'en relativité restreinte, le moment, tenseur antisymétrique du second ordre avec six composantes indépendantes, peut être ramené dans le cas général à deux vecteurs tridimensionnels (l'un axial et l'autre polaire) dans les axes cartésiens.

Les relations (5.31) se récrivent sous la forme

$$\nabla_k (S^{ik} x^j - S^{jk} x^i) - (S^{ij} - S^{ji}) = -(x^j F^i - x^i F^j). \quad (5.32)$$

Les composantes du tenseur du troisième ordre $S^{ik} x^j - S^{jk} x^i$ s'interprètent comme des composantes du tenseur généralisé de la densité du moment de l'énergie-impulsion du champ. Les formules (5.32), comme c'est le cas du théorème des forces vives, représentent une conséquence directe des équations des impulsions pour le champ et se vérifient identiquement en vertu de celles-ci. Les équations (5.32) contiennent les composantes des grandeurs tensorielles généralisées, notamment de la densité du moment cinétique du champ et du tenseur antisymétrique du moment de la densité des forces pondéromotrices nées de l'interaction avec le milieu.

En thermodynamique, l'équation de l'énergie représente dans le cas général une équation indépendante du théorème des forces vives. Par analogie, on peut introduire de nouvelles caractéristiques du champ: tenseurs des densités volumiques du moment interne propre de composantes $Q^{ijk} = -Q^{jik}$ et du moment pondéromoteur de composantes $\mathscr{H}^{ij} = h^{ij} + x^j F^i - x^i F^j$ qui se définissent en partant de l'équation des moments pour le champ et de celle des moments pour le milieu, toutes les deux indépendantes des équations (5.32).

On peut prendre les équations indépendantes des moments pour le champ électromagnétique sous la forme

$$\nabla_k (S^{ik} x^j - S^{jk} x^i + Q^{ijk}) = -\mathscr{H}^{ij} = -h^{ij} - (x^j F^i - x^i F^j). \quad (5.33)$$

Les composantes du tenseur de la densité du moment pondéromoteur $\mathscr{H}^{ij}$ extérieur au corps incluent, outre les composantes du moment de la force pondéromotrice, celles du tenseur densité du moment pondéromoteur extérieur supplémentaire, distribué sur le volume du corps, c'est-à-dire du tenseur antisymétrique du second ordre h^{ij}.

Ecrivant les équations (5.33) on admet que les moments extérieurs répartis sur le volume, agissant sur le champ électromagnétique, ne sont dus qu'au corps matériel.

Les équations des moments analogues à (5.33) peuvent être écrites également spécialement pour le milieu matériel. Elles contiendront à droite, avec le signe « plus », les composantes $\mathscr{H}^{ij}$ du tenseur densité du moment pondéromoteur total résultant de l'action du champ sur le milieu. En outre, le second terme comportera éventuellement les moments naissant des interactions internes entre les particules du milieu et les corps étrangers (sauf les champs électromagnétiques). De (5.33) et (5.32) il vient

$$h^{ij} = -(S^{ij} - S^{ji} + \nabla_k Q^{ijk}). \tag{5.34}$$

Ces relations peuvent être interprétées comme les équations pour les moments propres du champ (analogue quadridimensionnel de l'équation (3.6), ch. III). Les équations (5.34) et les équations correspondantes pour le milieu matériel servent à définir, avec l'ensemble les données expérimentales mises à la base de la construction du modèle du milieu, les composantes h^{ij}, S^{ij} et Q^{ijk}.

Si le modèle du milieu matériel est fixé et les composantes du moment pondéromoteur complémentaire h^{ij} sont définies expérimentalement (par exemple, le moment exercé sur l'aiguille magnétique par le champ), alors les expressions (5.34) donnent une liaison entre les composantes S^{ij} et Q^{ijk}. Si la condition complémentaire entrant dans la définition du champ électromagnétique ne fait dépendre ces grandeurs d'aucunes nouvelles caractéristiques essentielles du champ, les relations (5.34) et respectivement (5.33) doivent être vérifiées identiquement, comme l'est (5.32).

Les données expérimentales permettent de transformer les relations (5.34) en identités en faisant intervenir diverses conditions. En particulier, on peut adopter les conditions suivantes comme les plus simples et naturelles :

1) le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique est un tenseur de Minkowski dont les composantes sont définies par la formule (5.11) ;

2) les composantes du tenseur de la densité du moment interne propre Q^{ijk} pour des points à l'intérieur du volume donné du champ sont nulles, ou, plus généralement, on a les égalités

$$\nabla_k Q^{ijk} = 0, \tag{5.35}$$

qui sont satisfaites soit identiquement, soit en vertu des équations des impulsions. Ces deux conditions principales, que l'on peut inclure dans la définition du modèle du champ électromagnétique, sont en bon accord avec l'expérience (voir (5.39)).

Tenseur du moment pondéromoteur du champ électromagnétique. Conformément à (5.11) et (5.35), c'est-à-dire aux conditions 1) et 2), on tire de (5.34):

$$h^{ij} = \frac{1}{4\pi}\,[F_{m\cdot}^{\cdot i} H^{mj} - F_{m\cdot}^{\cdot j} H^{mi}]. \tag{5.36}$$

Regardons de plus près la formule (5.36). Dans le système inertial cartésien, la matrice $\| H^{ij} \|$ est définie par la formule (5.7), la matrice $\| F_{ij} \|$ par la formule (5.6). Comme $F_{m\cdot}^{\cdot l} = g^{lk} F_{mk}$ et $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$, et $g^{44} = 1/c^2$, $g^{ij} = 0$ lorsque $i \neq j$, la matrice $\| F_{m\cdot}^{\cdot l} \|$ vérifie la formule

$$\| F_{m\cdot}^{\cdot l} \| = \begin{Vmatrix} 0 & -B^3 & B^2 & \frac{E_1}{c} \\ B^3 & 0 & -B^1 & \frac{E_2}{c} \\ -B^2 & B^1 & 0 & \frac{E_3}{c} \\ cE_1 & cE_2 & cE_3 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5.37}$$

A l'aide de (5.7) et (5.37) et de la formule (5.36), on écrit facilement la matrice $\| h^{ij} \|$.

Vecteurs tridimensionnels spatiaux du moment pondéromoteur. Dans les axes cartésiens le tenseur quadridimensionnel antisymétrique du second ordre du moment pondéromoteur de composantes h^{ij} peut être ramené à deux vecteurs tridimensionnels $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$) et $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^2$, $\mathcal{L}^3$), dont les composantes entrent dans la matrice $\| h^{ij} \|$ (voir (3.26), ch. IV) de la façon suivante:

$$\| h^{ij} \| = \begin{Vmatrix} 0 & \mathcal{M}_3 & -\mathcal{M}_2 & -\frac{\mathcal{L}^1}{c} \\ -\mathcal{M}_3 & 0 & \mathcal{M}_1 & -\frac{\mathcal{L}^2}{c} \\ \mathcal{M}_2 & -\mathcal{M}_1 & 0 & -\frac{\mathcal{L}^3}{c} \\ \frac{\mathcal{L}^1}{c} & \frac{\mathcal{L}^2}{c} & \frac{\mathcal{L}^3}{c} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5.38}$$

A partir de (5.7) et (5.37), on obtient après le calcul élémentaire les formules très simples suivantes:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{H}) + \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E} \qquad (5.39)$$

et

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = \frac{1}{c}(\boldsymbol{S}^* - \boldsymbol{S}); \qquad (5.40)$$

ici $\boldsymbol{S}$ est le vecteur de Poynting; le vecteur $\boldsymbol{S}^* = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B})$ est de nature semblable. Dans la matrice S^{ij} du tenseur de Minkowski les composantes du vecteur $\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}$ forment la quatrième ligne et les composantes du vecteur $\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}^*$ la quatrième colonne.

Le vecteur tridimensionnel $\mathcal{M}$ n'est autre que la densité du moment pondéromoteur usuel. Pour les modèles de milieux matériels employés en pratique la formule (5.39) de $\mathcal{M}$ est en bon accord avec les mesures expérimentales. La formule (5.39) est une généralisation naturelle de la formule (1.3) au cas où l'on veut rendre compte de la polarisation. Evidemment, $\mathcal{M} = 0$ lorsque sont valables les lois d'aimantation et de polarisation (5.14) et (5.15), où ε et μ sont des scalaires. Dans le cas général, lorsque l'on a (5.14) et (5.15) et les milieux sont anisotropes, $\mathcal{M} \neq 0$.

En relativité restreinte, l'équation des moments pour le milieu continu est représentée en composantes par six équations dont trois « usuelles » pour le cas tridimensionnel qui sont les équations des moments en projections du vecteur $\mathcal{M}$ et trois autres, en projections du vecteur $\mathcal{L}$. Les trois dernières équations des moments pour le milieu sont satisfaites identiquement en vertu de la définition du modèle d'un milieu aimanté et polarisé ou bien représentent les relations fondamentales servant à définir certaines caractéristiques du milieu.

Les formules (5.39) et (5.40) sont établies dans un système inertial (la partie spatiale tridimensionnelle du repère peut être curviligne arbitraire). L'approbation expérimentale de la formule (5.39) se rapporte à des corps immobiles.

Différentes définitions du tenseur énergie-impulsion et du tenseur du moment du champ électromagnétique. Si l'on veut considérer le système « champ électromagnétique + milieu matériel » dans son ensemble comme un corps uni caractérisé par certaines propriétés mécaniques et électromagnétiques, on peut introduire le tenseur énergie-impulsion et le tenseur du moment pour l'ensemble du système comme une somme des tenseurs correspondants pour le

champ et le milieu. Les composantes de ces tenseurs s'écrivent

$$S^{ij}+T^{ij} \quad \text{et} \quad Q^{ijk}_{\text{champ}}+Q^{ijk}_{\text{milieu}},$$

où T^{ij} et Q^{ijk}_{milieu} sont les composantes des tenseurs correspondants écrits pour le milieu. Les équations des impulsions, de l'énergie et des moments s'écrivent pour le système « milieu-champ » comme suit :

$$\nabla_j (S^{ij}+T^{ij}) = F^i; \nabla_k (Q^{ijk}_{\text{champ}}+Q^{ijk}_{\text{milieu}}) + S^{ij}+T^{ij}-S^{ji}-T^{ji} = M^{ij},$$

$$i, j = 1, 2, 3, 4,$$

où F^i, M^{ij} sont les composantes des quadriforces massiques et des quadrimoments extérieurs au champ et au milieu. Dans nombre de cas on peut admettre $F^i = 0$ et $M^{ij} = 0$. Les problèmes de construction de modèles du champ et des milieux concrets impliquent la définition des tenseurs ci-mentionnés à l'aide des caractéristiques données ou recherchées.

Pour séparer le tenseur unifié énergie-impulsion et le tenseur des moments ayant une nature électromagnétique commune en deux, l'un pour le champ et l'autre pour le milieu, on peut procéder de différentes façons, selon les conditions du problème. Quand la somme est donnée, en fixant ces grandeurs pour le milieu on obtient immédiatement leurs valeurs pour le champ, et inversement. Il en résulte qu'en opérant avec les milieux matériels différents, il est raisonnable de déterminer l'impulsion, l'énergie et le moment électromagnétique toujours par le même procédé.

Cependant les propriétés dynamiques du champ, introduites chaque fois conformément à la condition fondamentale, peuvent être définies de différentes façons. Plus haut on a décrit les propriétés dynamiques du champ électromagnétique à l'aide d'un seul tenseur asymétrique énergie-impulsion de Minkowski de composantes S^{ij} définies selon (5.11), ce qui a permis d'écrire les formules pour les forces pondéromotrices et les moments pondéromoteurs.

Tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique d'Abraham. Dans plusieurs ouvrages, le tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique de Minkowski est remplacé par le tenseur symétrique d'Abraham avec les composantes A^{ij} dont la partie spatiale de la matrice s'obtient, dans le système de coordonnées *propre*, par une simple symétrisation de la partie correspondante de la matrice des composantes du tenseur de Minkowski, à savoir

$$A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(S^{\alpha\beta}+S^{\beta\alpha}),$$

et les composantes contravariantes des vecteurs des parties temporelles coïncident avec celles du vecteur de Poynting divisées par c^2, c'est-à-dire que l'on a

$$A^{4\alpha} = A^{\alpha 4} = \frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})^{\alpha},$$

et enfin, on admet par définition que $A^{44} = S^{44}$.

Outre les tenseurs énergie-impulsion de Minkowski et d'Abraham on propose également d'introduire d'autres tenseurs du champ électromagnétique. Notons que tous ces tenseurs ne diffèrent les uns des autres que si l'on a, en des points du volume occupé par le champ, un milieu matériel et, de plus, si le tenseur polarisation diffère de zéro : $\mathcal{P}^{ij} \neq 0$. Dans le vide ou dans un milieu conducteur quand la polarisation électrique et l'aimantation sont absentes, les tenseurs énergie-impulsion du champ électromagnétique définis de façons différentes coïncident.

Utilisant la définition du tenseur de Minkowski, on peut écrire les formules précédentes dans le système de coordonnées propre de la façon suivante :

$$\left.\begin{aligned} & A^{ij} - S^{ij} = \Omega^{ij}, \\ \text{où} \quad & \Omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^{\alpha\beta}, \quad \Omega^{\alpha 4} = h^{\alpha 4} \quad \text{et} \quad \Omega^{4i} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.41}$$

avec α, $\beta = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, 3, 4$, les composantes du tenseur h^{ij} étant définies par les formules (5.38), (5.39) et (5.40).

Forces pondéromotrices selon Minkowski et selon Abraham. D'après Minkowski et Abraham, les composantes des forces pondéromotrices quadridimensionnelles ont pour expression

$$F^i_{\text{Abr}} = -\nabla_j A^{ij} \quad \text{et} \quad F^i_{\text{Min}} = -\nabla_j S^{ij}.$$

Il vient immédiatement de (5.41) que, dans le système de coordonnées *propre*, on a

$$F^\alpha_{\text{Abr}} = F^\alpha_{\text{Min}} - \frac{1}{2} \nabla_\beta h^{\alpha\beta} - \frac{\partial h^{\alpha 4}}{\partial t} \tag{5.42}$$

ou, en conformité de (5.38), dans la forme vectorielle tridimensionnelle

$$\boldsymbol{F}_{\text{Abr}} = \boldsymbol{F}_{\text{Min}} - \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathcal{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{5.43}$$

Pour l'apport spécifique de l'énergie on a donc

$$F^4_{\text{Abr}} = F^4_{\text{Min}}. \tag{5.44}$$

Si le corps isotrope vérifie les lois d'aimantation et de polarisation (5.14) et (5.15), alors $\mathcal{M} = 0$ et l'égalité (5.43) prend la forme

$$\boldsymbol{F}_{\text{Abr}} = \boldsymbol{F}_{\text{Min}} + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}).$$

Lorsque le tenseur énergie-impulsion du milieu est fixé indépendamment de la définition du tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique, il découle de (5.42) que les équations

du mouvement (des impulsions) pour le milieu s'obtiennent différentes, car $F^{\alpha}_{\text{Abr}} \neq F^{\alpha}_{\text{Min}}$. Si pourtant on définit différemment les tenseurs énergie-impulsion, on peut s'assurer de l'identité des équations du mouvement du milieu.

On voit de (5.44) que les apports d'énergie électromagnétique vers le milieu figurant dans l'équation de la chaleur reçue sont les mêmes, que l'on se serve pour définir le champ du tenseur de Minkowski ou de celui d'Abraham.

Moments pondéromoteurs et tenseurs énergie-impulsion du champ. Adoptons comme résultat empirique le fait qu'un milieu aimanté et polarisé subit, du côté du champ, un quadrimoment distribué caractérisé par le tenseur dont les composantes sont définies par les formules (5.38), (5.39) et (5.40). L'analyse des équations quadridimensionnelles du moment cinétique permet, en se basant sur le principe d'action et de réaction déduit de celui de conservation de l'impulsion pour le système « milieu + champ » et en prenant le tenseur de Minkowski en tant que tenseur énergie-impulsion du champ, de vérifier pour les composantes du tenseur de la densité volumique du moment propre du champ les égalités suivantes:

$$\nabla_k Q^{ijk}_{\text{Min}} = 0.$$

On peut admettre, en particulier, que $Q^{ijk}_{\text{Min}} = 0$. D'autre part, si l'on prend le tenseur d'Abraham comme tenseur énergie-impulsion du champ, on obtient avec $A^{ij} = A^{ji}$ que

$$h^{ij} = -\nabla_k Q^{ijk}_{\text{Abr}} \neq 0. \tag{5.45}$$

Ainsi, si l'on veut utiliser le tenseur énergie-impulsion d'Abraham, il faut associer au champ électromagnétique une caractéristique complémentaire, le tenseur $Q^{ijk} = -Q^{jik}$ des moments cinétiques internes (pour $i = 4$ et $j = \alpha$) et des couples surfaciques (pour $i = \alpha$ et $j = \beta$). La divergence de ce tenseur $\nabla_k Q^{ijk}$ est définie par l'égalité (5.45) si pour les moments pondéromoteurs volumiques distribués agissant sur le milieu du côté du champ sont vraies les formules (5.38) à (5.40).

On voit que si le tenseur énergie-impulsion est défini non selon Minkowski mais autrement, il faut introduire sur les surfaces tridimensionnelles, sections des quadrivolumes, ou sur les surfaces bidimensionnelles séparant les volumes spatiaux du champ électromagnétique non seulement les forces d'interaction surfaciques mais également rendre compte de l'interaction due aux moments surfaciques distribués (couples de forces). Si l'on emploie le tenseur énergie-impulsion de Minkowski, l'introduction des moments distribués suivant les sections à l'intérieur du champ électromagnétique n'est pas nécessaire.

Comme les différentes conditions servant à définir les propriétés dynamiques du champ électromagnétique sont dans leur essentiel équivalentes, on a le droit de choisir, comme le montre l'analyse de l'équation des moments pour le champ électromagnétique et de la formule pour le moment pondéromoteur, en tant que condition naturelle et universelle le tenseur de Minkowski pour tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique. Si l'on adopte cette condition, on doit s'en guider non seulement dans la description des propriétés du champ électromagnétique mais également lors de la construction des modèles des milieux matériels.

Tenseurs énergie-impulsion du milieu pour des tenseurs énergie-impulsion du champ différents. Ajoutons encore que si l'on pose pour le tenseur énergie-impulsion global du champ et du milieu N^{ij}

$$N^{ij} = T^{ij}_{\text{Abr}} + A^{ij} = T^{ij}_{\text{Min}} + S^{ij},$$

on a pour les composantes contravariantes du tenseur énergie-impulsion du milieu, dans le cas général, les inégalités

$$T^{ij}_{\text{Abr}} \neq T^{ij}_{\text{Min}} \quad \text{et} \quad T^{(ij)}_{\text{Abr}} \neq T^{(ij)}_{\text{Min}}, \tag{5.46}$$

où $T^{(ij)} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji})$. On voit immédiatement que sont inégales entre elles non seulement les composantes des tenseurs énergie-impulsion du milieu T^{ij}_{Abr} et T^{ij}_{Min}, mais aussi leurs parties symétrisées. On vérifie aisément que la même chose a lieu lorsque le tenseur global N^{ij} est symétrique.

Les raisons de prendre le tenseur énergie-impulsion symétrique. On a tout l'intérêt d'introduire pour le champ électromagnétique le tenseur énergie-impulsion symétrique. Le tenseur énergie-impulsion figurant dans la théorie de la relativité généralisée aussi bien que celui obtenu comme moyenne du tenseur microscopique énergie-impulsion du champ dans le vide sont automatiquement symétriques. Pourtant, il en est ainsi soit pour l'ensemble du champ et du milieu (rappelons que les interactions microscopiques à l'intérieur du milieu sont de nature électromagnétique), soit pour le champ électromagnétique dans le vide ou dans le milieu matériel non aimanté et non polarisé. Dans tous ces cas ou bien le tenseur de Minkowski est symétrique en raison de $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} = 0$, ou bien seul l'est le tenseur global du champ et du milieu.

D'autre part, il est évident que les valeurs des composantes de la quadriforce pondéromotrice (force tridimensionnelle et apport d'énergie) se conservent si l'on remplace un tenseur énergie-impulsion arbitraire de composantes S^{ij} par un autre tenseur de compo-

santes S^{*ij}:

$$S^{*ij} = S^{ij} + \Omega^{ij}$$

lorsque pour les composantes du tenseur supplémentaire Ω^{ij} on a identiquement

$$\nabla_j \Omega^{ij} = 0. \tag{5.47}$$

L'introduction du tenseur dont les composantes Ω^{ij} vérifient la condition (5.47) n'influence pas la formule pour la force pondéromotrice. Dans de nombreux cas, on peut choisir les composantes Ω^{ij}, toujours sous la condition (5.47), telles que le tenseur S^{*ij} soit symétrique. Par ce procédé on peut rendre symétrique le tenseur énergie-impulsion S^{ij} en conservant le vecteur quadridimensionnel physique de la force pondéromotrice. Toutefois, pour obtenir au moyen d'une telle symétrisation la formule admissible pour le moment pondéromoteur volumique distribué agissant sur le corps matériel, on doit tout de même introduire, pour le champ, les moments internes propres $\nabla_k Q^{ijk} \neq 0$.

Enfin, comme dans tous les modèles classiques le tenseur énergie-impulsion pour le milieu matériel s'obtient symétrique, il paraît tout à fait naturel de conserver cette propriété dans le cas général, bien que l'asymétrie du tenseur énergie-impulsion pour le milieu matériel ne se manifeste que dans les modèles compliqués qui ne sont pas encore suffisamment étudiés sur le plan théorique et expérimental.

§ 6. Hydrodynamique magnétique

En hydrodynamique magnétique on envisage le modèle du fluide conducteur qui est un modèle du milieu continu dans lequel on tient compte des effets électromagnétiques. On admet que le fluide est un milieu continu où il n'y a pas de polarisation ni d'aimantation, mais qui laisse passer le courant électrique, c'est-à-dire que $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P} = 0$, $\boldsymbol{j}^* \neq 0$. En posant $dq^{**} = 0$ on convient que, dans les modèles envisagés, la particule individuelle du milieu continu n'est susceptible d'échanger, avec les particules voisines et les corps extérieurs, que d'énergie mécanique et thermique.

Pour simplifier, envisageons dans la suite le modèle d'un milieu parfait: $p^{ij} = -pg^{ij}$. Dans le cas plus général, on tient compte des propriétés de viscosité du milieu en hydrodynamique magnétique.

Le système d'équations de l'hydrodynamique magnétique qui suit est écrit dans l'approximation newtonienne et comporte les équations suivantes:

une équation scalaire de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0; \tag{6.1}$$

une équation vectorielle des impulsions

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}\right]=$$

$$=-\operatorname{grad} p+\rho_e\left[\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})\right]+\frac{1}{c}(\boldsymbol{j}^*\times\boldsymbol{H})+\rho\boldsymbol{F}_{\text{sup}}, \tag{6.2}$$

où $\boldsymbol{F}_{\text{sup}}$ désigne la densité des forces massiques usuelles autres que celles d'interaction du fluide avec le champ électromagnétique, la force de la pesanteur, par exemple;

une équation scalaire de la chaleur reçue

$$dU+pd\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho}(\tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})\,dt+dq^{(e)}_{\text{sup}}, \tag{6.3}$$

où $dq^{(e)}_{\text{sup}}$ est l'apport de chaleur de l'extérieur à l'unité de masse du fluide dû à la conduction, au rayonnement, etc.;

une relation scalaire exprimant le deuxième principe de la thermodynamique

$$T\,ds=\frac{1}{\rho}(\tilde{\boldsymbol{j}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})\,dt+dq^{(e)}_{\text{sup}}, \tag{6.4}$$

où l'on prend $dq'=0$.

Si l'on définit un milieu en donnant l'énergie interne U en fonction de ρ et s, la relation

$$dU=T\,ds-pd\frac{1}{\rho}$$

permet d'écrire deux équations scalaires d'état

$$T=\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_\rho,\qquad -p=\left(\frac{\partial U}{\partial\frac{1}{\rho}}\right)_s. \tag{6.5}$$

Les équations dynamiques et thermodynamiques (6.1) à (6.5) doivent être complétées par les équations électrodynamiques, à savoir par celles de Maxwell

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,\\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H}&=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho_e\end{aligned}\right\} \tag{6.6}$$

et par la loi d'Ohm qui, en hydrodynamique magnétique usuelle, a la forme

$$\boldsymbol{j}=\sigma\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right)+\rho_e\boldsymbol{v}. \tag{6.7}$$

Le système d'équations (6.1) à (6.7) est complet si sont données $dq^{(e)}_{\text{sup}}$ et $\boldsymbol{F}_{\text{sup}}$.

Equations de l'hydrodynamique magnétique pour un milieu à conductibilité infinie. Prenons le cas particulier lorsqu'un milieu conducteur, le gaz ionisé par exemple, possède la conductibilité infinie σ. Dans ce cas les équations de l'hydrodynamique se trouvent considérablement simplifiées.

Pour un milieu infiniment conducteur, il découle de la loi d'Ohm que l'intensité du champ électrique $\tilde{E}$ dans le système de coordonnées propre est nulle, car la densité de courant j est nécessairement finie. Dans le système inertial arbitraire le champ E est déterminé par v et H

$$E = -\frac{1}{c} v \times H. \tag{6.8}$$

Conformément à l'équation de Maxwell, la densité de courant j a pour expression

$$\frac{4\pi}{c} j = \operatorname{rot} H - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(v \times H). \tag{6.9}$$

En négligeant comme on le fait souvent en hydrodynamique magnétique le courant de déplacement, on écrit au lieu de (6.9)

$$j = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} H. \tag{6.9'}$$

A l'aide de (6.8), la densité de charge ρ_e s'exprime par v et H comme suit:

$$\rho_e = -\frac{1}{4\pi c} \operatorname{div}(v \times H). \tag{6.10}$$

On voit de cette dernière formule que ρ_e est petit pour des conditions usuelles. En hydrodynamique magnétique, on néglige généralement dans les équations du mouvement le terme $\rho_e \tilde{E}$ qui est petit devant $\frac{1}{c}(j^* \times H)$.

Dans le milieu à conductibilité infinie on déduit des équations de Maxwell pour le champ d'intensité magnétique H deux relations suivantes:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{rot}(v \times H), \quad \operatorname{div} H = 0, \tag{6.11}$$

auxquelles se réduit, dans ce cas, tout le système d'équations électrodynamiques.

La chaleur Joule $(1/\rho)\, \tilde{j} \cdot \tilde{E}\, dt$ est nulle pour le milieu à conductibilité infinie, car $\tilde{E} = 0$.

Si le processus est adiabatique, $dq^{(c)}_{\text{sup}} = 0$, d'où $s = \text{const}$ dans la particule. Si le milieu représente le gaz parfait, la pression p et la densité ρ sont liées par la formule usuelle

$$p = C\rho^{\gamma}. \tag{6.12}$$

Avec la relation (6.9) et (6.10) le système d'équations dynamiques (6.1), (6.2), thermodynamique (6.12) et électrodynamique (6.11) est complet.

§ 7. Lois régissant les lignes du champ magnétique et celles de rotation « figées »

Mettons en évidence maintenant les propriétés générales du champ du vecteur $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ satisfaisant aux relations de la forme

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{7.1}$$

Il a été montré plus haut (voir (6.11)) qu'à ces conditions satisfaisait le champ d'intensité magnétique $\boldsymbol{H}$ pour un milieu à conductibilité infinie. Ces mêmes conditions sont vérifiées par le champ du vecteur rotation $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ pour les processus barotropes se déroulant dans le fluide parfait dans le champ des forces massiques potentielles. En effet, soit l'équation des impulsions pour le fluide parfait non conducteur sous la forme de Groméko-Lamb :

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \boldsymbol{F}. \tag{7.2}$$

En supposant les forces massiques extérieures potentielles et le processus barotrope, c'est-à-dire $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U$ et $p = f(\rho)$, on peut introduire la fonction de la pression

$$\mathcal{P} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)}, \tag{7.3}$$

dont le gradient, comme on voit facilement, vaut

$$\operatorname{grad} \mathcal{P} = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p.$$

Ceci posé, l'équation des impulsions (7.2) se récrit sous la forme

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} \mathcal{P} + \operatorname{grad} U.$$

En prenant le rotationnel des deux membres de l'équation, il vient

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{7.4}$$

avec de plus

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Ces équations coïncident avec les équations (6.11) et (7.1). Notons que bien que (7.4) ne contienne que les grandeurs cinématiques, elle est déduite de l'équation dynamique des impulsions.

Ainsi donc, en établissant les propriétés générales du champ vectoriel $\boldsymbol{A}$ satisfaisant à (7.1), nous obtenons, en particulier, les propriétés importantes du champ d'intensité magnétique $\boldsymbol{H}$ pour le cas du milieu à conductibilité infinie et du champ du vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ lors des évolutions barotropes du fluide parfait dans le champ des forces massiques potentielles.

Formule de la dérivée par rapport au temps du flux du vecteur solénoïdal à travers une surface fluide. Obtenons d'abord la formule de la dérivée par rapport au temps du flux du vecteur solénoïdal $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ à travers une surface fluide non fermée Σ délimitée par le contour C, c'est-à-dire à travers une surface se déplaçant avec les particules du milieu continu.

Comme on le sait, on appelle flux d'un vecteur à travers la surface Σ l'intégrale

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_{\Sigma} A_n\, d\sigma,$$

où $\boldsymbol{n}$ désigne le vectur unitaire de la normale à l'élément $d\sigma$ de la surface Σ.

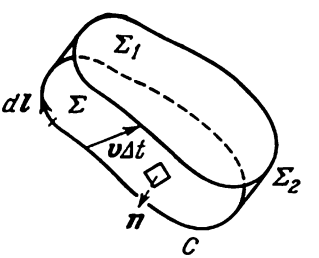


Fig. 40. A la déduction de la formule de la dérivée par rapport au temps du flux du vecteur solénoïdal à travers une surface fluide

Tout comme précédemment, choisissons le sens positif de la normale $\boldsymbol{n}$ et celui de parcours du contour C de telle sorte que ce parcours, regardé depuis l'extrémité de la normale $\boldsymbol{n}$, s'effectue dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Si à l'instant t cette surface occupait la position Σ et à l'instant $t + \Delta t$ la position Σ_1 (fig. 40), par définition de la dérivée on a

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} A_n\, d\sigma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{\Sigma_1} A_n(x, y, z, t+\Delta t)\, d\sigma - \int_{\Sigma} A_n(x, y, z, t)\, d\sigma}{\Delta t}. \quad (7.5)$$

Démontrons qu'en vertu des équations (7.1), cette dérivée est nulle et, par conséquent, on a pour un tel vecteur

$$\int_{\Sigma} A_n\, d\sigma = \text{const}.$$

En effet, désignons par Σ_2 la surface formée par les trajectoires des points du contour C lors de son déplacement pendant le temps

Δt et envisageons la surface fermée formée par les surfaces Σ, Σ_1 et Σ_2.

Conformément au théorème de Gauss-Ostrogradsky et mettant en jeu la seconde condition (7.1), on a

$$\int\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} A_n(x, y, z, t)\, d\sigma = \int\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, d\tau = 0, \tag{7.6}$$

où V est le volume délimité par la surface fermée $\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2$ et $\boldsymbol{n}$ une normale extérieure à V. En donnant à la normale $\boldsymbol{n}$ aux éléments de la surface Σ_1 le sens inverse et complétant les deux membres de l'égalité par $\int\limits_{\Sigma_1} A_n(x, y, z, t + \Delta t)\, d\sigma$, on obtient à partir de (7.6)

$$\int\limits_{\Sigma_1} A_n(x, y, z, t+\Delta t)\, d\sigma - \int\limits_{\Sigma} A_n(x, y, z, t)\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_1} A_n(x, y, z, t+\Delta t)\, d\sigma - \int\limits_{\Sigma_1} A_n(x, y, z, t)\, d\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma_2} A_n(x, y, z, t)\, d\sigma.$$

D'où pour la dérivée (7.5) on a

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Sigma} A_n(x, y, z, t)\, d\sigma = \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial A_n}{\partial t}\, d\sigma + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{\Sigma_2} A_n(x, y, z, t)\, d\sigma. \tag{7.7}$$

L'élément vectoriel $\boldsymbol{n}\, d\sigma$ de la surface latérale Σ_2 a pour expression

$$\boldsymbol{n}\, d\sigma = \boldsymbol{v}\, \Delta t \times d\boldsymbol{l},$$

où $d\boldsymbol{l}$ est l'élément du contour C délimitant la surface Σ (voir fig. 40). Il en résulte que l'on peut passer dans l'intégrale $\int\limits_{\Sigma_2} A_n\, d\sigma$ à l'intégration sur C:

$$\int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = -\int\limits_C \boldsymbol{A} \cdot (d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v})\, \Delta t = -\int\limits_C d\boldsymbol{l} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A})\, \Delta t,$$

ou bien, en employant le théorème de Stokes, effectuer l'intégration sur la surface initiale Σ tendue sur le contour C:

$$\frac{1}{\Delta t} \int\limits_{\Sigma_2} A_n\, d\sigma = -\int\limits_C (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{l} = -\int\limits_{\Sigma} [\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{A})]_n\, d\sigma.$$

L'expression (7.7) pour la dérivée cherchée se ramène maintenant à la forme

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} A_n\, d\sigma = \int_{\Sigma}\left[\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{A})\right]_n d\sigma. \tag{7.8}$$

C'est la formule générale de l'analyse vectorielle pour la dérivée du flux du vecteur solénoïdal $\boldsymbol{A}$ à travers la surface fluide Σ.

On voit bien que la formule (7.8) est valable si seulement la valeur du vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ est définie en des points de la surface Σ y compris sa frontière C.

Lorsque le champ du vecteur $\boldsymbol{A}$ satisfait aux conditions (7.1), le deuxième membre de (7.8) s'annule

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} A_n\, d\sigma = 0.$$

Aussi avons-nous démontré l'hypothèse formulée plus haut selon laquelle

$$\int_{\Sigma} A_n\, d\sigma = \text{const}, \tag{7.9}$$

où Σ est une surface se déplaçant avec les particules du milieu continu dans une région où le champ du vecteur $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ satisfait aux conditions (7.1). Il découle de la propriété démontrée (7.9) du champ du vecteur $\boldsymbol{A}$ plusieurs conséquences très importantes.

Première conséquence

Les surfaces vectorielles d'un tel champ du vecteur se transforment, lors du mouvement, également en surfaces vectorielles. En effet, envisageons à un certain instant t une surface vectorielle Π du champ du vecteur $\boldsymbol{A}$, telle que, en chaque point, le vecteur $\boldsymbol{A}$ soit contenu dans le plan tangent à cette surface. En vertu de la continuité du mouvement la surface Π se transformera, à l'instant $t + \Delta t$, en une surface Π' qui sera elle aussi, comme il est aisé de voir, une surface vectorielle. La surface Π étant vectorielle par hypothèse, le flux d'un vecteur $\boldsymbol{A}$ à travers toute surface Σ appartenant à Π est nul. D'après (7.9), le flux du vecteur $\boldsymbol{A}$ à travers la surface Σ' en laquelle passera au bout du temps Δt la surface Σ et qui, en raison de la continuité du mouvement, appartiendra à Π' sera également nul, c'est-à-dire qu'à l'instant $t + \Delta t$ le vecteur $\boldsymbol{A}$ sera dans le plan tangent à Π'. La surface Σ et, donc, la surface Σ' peuvent être aussi petites que l'on veut, de plus, la position de Σ sur Π est arbitraire, par conséquent, en tout point de Π' on a $A_n = 0$, ce qui veut dire que la surface Π' est également vectorielle.

En particulier, la surface latérale d'un tube de vecteur se transforme lors du mouvement en la surface latérale d'un tube de vecteur. Les tubes de vecteur passent en les tubes de vecteur.

Deuxième conséquence

Les lignes de vecteur du champ vectoriel $\boldsymbol{A}$ satisfaisant aux conditions (7.1) passent toujours lors du mouvement en des lignes de vecteur. En effet, à l'instant t on peut mener par la ligne de vecteur l deux surfaces vectorielles Π_1 et Π_2 pour lesquelles l est la ligne d'intersection. Vu la continuité du mouvement, la ligne l à l'instant $t + \Delta t$ deviendra l', ligne d'intersection des surfaces Π_1' et Π_2' qui sont des images des surfaces Π_1 et Π_2 respectivement et qui, en vertu de la première conséquence de (7.9), restent des surfaces vectorielles. On voit alors que l' est également une ligne de vecteur.

Troisième conséquence

L'intensité d'un tube de vecteur du champ du vecteur $\boldsymbol{A}$ envisagé demeure constante durant tout le temps du mouvement.

En effet, l'intensité d'un tube de vecteur, comme on le sait (voir ch. II, § 8), est définie par le flux d'un vecteur $\boldsymbol{A}$ à travers une section transversale du tube (dans un champ de vecteur solénoïdal, le flux est constant le long du tube). Ainsi, la proposition qu'on vient de formuler représente une conséquence directe de la propriété (7.9). On a pour le vecteur $\boldsymbol{A}$ satisfaisant à (7.1)

$$\int_{\Sigma} A_n \, d\sigma = \int_{\Sigma'} A_n \, d\sigma,$$

où Σ et Σ' sont des sections transversales arbitraires du tube de vecteur aux instants t et t'.

Par conséquent, dans le champ du vecteur $\boldsymbol{A}$ satisfaisant à (7.1), les surfaces, lignes et tubes vectoriels se conservent lors du mouvement en ce sens qu'ils se déplacent dans l'espace avec les particules du milieu continu; ils sont pour ainsi dire figés dans le milieu.

Comme on l'a vu plus haut, les conditions (7.1) sont remplies pour le champ vectoriel d'intensité magnétique $\boldsymbol{H}$ dans le cas des milieux à conductibilité infinie et le champ du vecteur rotation $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ lorsqu'il s'agit des processus barotropes du fluide parfait et des forces extérieures potentielles. Ainsi, le champ d'intensité $\boldsymbol{H}$ et le champ du vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ se trouvent, dans le sens et les cas indiqués, figés dans le milieu.

Ainsi, par exemple, si dans un certain domaine $\mathscr{D}$, occupé par le milieu continu à conductibilité infinie, à l'instant initial t_0 le champ magnétique $\boldsymbol{H}$ n'existait pas, il ne surgira pas dans le domaine $\mathscr{D}'$ en lequel passera le domaine $\mathscr{D}$ à l'instant arbitraire

t. Le champ magnétique se déplace avec les particules du milieu continu. Lorsque, au Soleil, a lieu une éruption du plasma qui forme un nuage de gaz incandescent à conductibilité infinie, le champ magnétique se déplace avec le plasma en sortant du Soleil dans l'espace interplanétaire.

Nous allons nous arrêter plus en détail sur les propriétés du champ du vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ dans le cas des mouvements barotropes du fluide parfait dans le champ des forces potentielles vu leur importance particulière pour les applications.

Théorème de Thomson. Si Σ est une surface fluide, la propriété (7.9) pour le champ du vecteur $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ s'écrira de la manière suivante:

$$\int_{\Sigma} \omega_n \, d\sigma = \text{const}, \tag{7.9'}$$

c'est-à-dire que le flux du vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ à travers une surface Σ quelconque se déplaçant avec les particules du milieu continu demeure constant.

En appliquant le théorème de Stokes, on écrira la propriété (7.9') sous la forme

$$\int_{C} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = \text{const}, \tag{7.10}$$

où C est un contour fermé arbitraire constitué toujours des mêmes particules du fluide, ou sous la forme

$$\Gamma = \text{const}, \tag{7.11}$$

c'est-à-dire que si les forces massiques extérieures sont potentielles et le mouvement du fluide parfait est barotrope, la circulation de vitesse Γ le long d'un contour « fluide » fermé arbitraire ne change pas lors du mouvement. Cette proposition est connue sous le nom de théorème de Thomson.

Eventualité d'apparition des contours fermés avec $\Gamma \neq 0$ dans le flux potentiel à surfaces de discontinuité des vitesses. Remarquons que, comme il découle de la démonstration du théorème de Thomson, on a $\Gamma = \text{const}$ seulement le long des contours qui s'obtiennent les uns à partir des autres par déformation continue.

Soit un fluide au repos à un certain instant. La circulation à cet instant y est nulle suivant tous les contours. Pourtant si le fluide commence à se mouvoir et s'il y a des discontinuités des vitesses, il est en général probable que surgissent dans le flux des contours fermés du type $\mathcal{L}$ suivant lesquels la circulation diffère de zéro (fig. 41).

En effet, lorsque le contour $\mathscr{L}$ traverse la ligne de discontinuité des vitesses, la circulation le long de ce contour peut différer de zéro, car les vitesses des points M et N sur la surface de discontinuité sont différentes; par conséquent, le contour $\mathscr{L}$ fermé à l'instant considéré devient ouvert à l'instant suivant et n'était pas fermé en général aux instants précédents et, en particulier, à l'instant initial quand le fluide était au repos. Le théorème de Thomson n'est pas valable dans le cas des contours fluides ouverts et la circulation suivant ces contours ne se conserve pas.

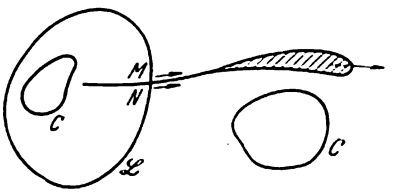


Fig. 41. La circulation suivant les contours C est nulle et diffère éventuellement de zéro suivant le contour $\mathscr{L}$

Une conséquence immédiate du théorème de Thomson est représentée par le théorème de Lagrange.

Théorème de Lagrange. Si, sous les conditions du théorème de Thomson, le mouvement d'une portion du fluide à un certain instant t_0 est irrotationnel, il l'était à $t < t_0$ et le sera à $t > t_0$. Soulignons que dans l'énoncé du théorème de Lagrange il ne s'agit pas d'un domaine de l'espace mais d'une certaine masse du fluide en mouvement continu.

Démontrons le théorème de Lagrange. Par hypothèse, à $t = t_0$ dans la région $\mathscr{D}$ il n'y a pas de rotation et, par conséquent, en chaque point de cette région $\boldsymbol{\omega} = 0$. Donc, d'après le théorème de Stokes ($\Gamma = 2\int\limits_{\Sigma} \omega_n \, d\sigma$) la circulation le long de tout contour fermé appartenant à $\mathscr{D}$ est nulle:

$$\oint\limits_{C} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = 0.$$

Conformément au théorème de Thomson la circulation Γ suivant tout contour fluide fermé est également nulle à tous les autres instants. Alors, en se référant de nouveau au théorème de Stokes on obtient pour toute surface Σ appartenant entièrement à la région du fluide que

$$\int\limits_{\Sigma} \omega_n \, d\sigma = 0.$$

Or, ce n'est possible que si, en tout point de $\mathscr{D}$ et pour tout sens de $\boldsymbol{n}$, on a $\omega_n = 0$, c'est-à-dire que dans tout élément du fluide à tout instant $\boldsymbol{\omega} = 0$.

Comme on sait, l'absence de rotation équivaut à l'existence du potentiel des vitesses. Par conséquent, le théorème de Lagrange peut être formulé d'une autre manière.

Si, à un certain instant t_0, le mouvement du fluide est potentiel, il l'était et le sera à tous les instants antérieurs comme postérieurs, si sont observées les conditions du théorème de Thomson.

Cela veut dire qu'il existe dans ce cas un potentiel des vitesses $\varphi(x, y, z, t)$ et que

$$v = \operatorname{grad} \varphi(x, y, z, t).$$

Le théorème de Thomson permet d'entrevoir une grande valeur physique des mouvements potentiels des fluides parfaits. Ce fait facilite considérablement la résolution des problèmes sur la définition du champ des vitesses.

On peut préciser que les tourbillons ne se créent et ne disparaissent dans un fluide qu'au cas où au moins une des hypothèses du théorème de Thomson n'est pas vraie, c'est-à-dire que soit le fluide est visqueux, soit il n'est pas barotrope, soit les forces massiques extérieures ne sont pas potentielles, soit le champ des vitesses n'est pas continu.

Les propriétés démontrées dans ce qui précède de conservation des lignes et surfaces vectorielles, ainsi que des intensités des tubes de vecteur pour le champ du vecteur rotation dans le cas des mouvements barotropes d'un fluide parfait sont connues sous le nom de théorèmes dynamiques de Helmholtz. Les voici.

Théorèmes dynamiques de Helmholtz sur les rotations. Premier théorème: dans les hypothèses du théorème de Thomson, les éléments d'un fluide constituant, à un certain instant, une surface, un tube ou une ligne de rotation constitueront durant tout le mouvement respectivement une surface, un tube ou une ligne de rotation.

Deuxième théorème: dans les hypothèses du théorème de Thomson, l'intensité d'un tube de rotation demeure constante pendant tout le temps de mouvement, c'est-à-dire que

$$\Gamma = \oint_C v \cdot dl = \text{const},$$

où C est un contour fermé arbitraire encerclant le tube de rotation donné.

Les théorèmes de Helmholtz trouvent leur application dans la résolution de beaucoup de problèmes fondamentaux de l'hydrodynamique (voir ch. VIII).

CHAPITRE VII

SUR LA POSITION DES PROBLÈMES DANS LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

§ 1. Bases générales de la position de problèmes concrets

Modèles et systèmes de référence. Lors d'une analyse théorique des problèmes concrets de mécanique des milieux continus on se sert obligatoirement, d'une façon explicite ou implicite *), de systèmes de référence de l'observateur dans lesquels on étudie le mouvement et l'état du milieu. En mécanique newtonienne tous les systèmes de référence, « immobiles » ou mobiles, conviennent comme systèmes de référence de l'observateur. Toutefois, il faut toujours choisir un repère inertial, car c'est uniquement dans un tel repère qu'on peut utiliser les données sur les forces d'inertie.

Il est des cas où l'on doit recourir au système de coordonnées lagrangiennes qui permet d'individualiser les points du continuum d'un milieu continu et sert, au fond, de base à la détermination des caractéristiques du mouvement et de l'état des particules du milieu.

Dans les chapitres précédents ont été établies et discutées les équations universelles de la mécanique, de la thermodynamique et de l'électrodynamique. Ces équations représentent des relations fondamentales servant de cadre à la construction des théories de tous les modèles concrets des milieux continus. Elles s'appliquent à tous les cas particuliers du mouvement et des transformations physiques quel que soit le modèle. On a montré plus haut que les équations universelles pour des distributions lisses et continues peuvent se présenter sous la forme d'équations différentielles aux dérivées partielles.

Parallèlement aux équations différentielles on a formulé les mêmes lois physiques sous forme intégrale; il s'agit notamment de l'équation de continuité ((1.2), ch. III), de l'équation des impulsions ((2.2), ch. III), du premier principe de la thermodynamique (équation de l'énergie (8.1), ch. V), du second principe de la thermodynamique ((8.2), ch. V) et des équations générales de Maxwell ((5.5), ch. VI).

Dans le cas des distributions lisses et continues des caractéristiques du mouvement les formes intégrale et différentielle sont équivalentes. Cependant on a souvent à étudier les distributions discontinues des caractéristiques des phénomènes dans l'espace et

---

*) Pour plus de précision et de clarté, il est toujours préférable de donner toutes les hypothèses et conditions du problème sous forme explicite.

dans le temps. Dans ce dernier cas la forme intégrale se trouve être d'un caractère plus général et conserve sa signification. Les expressions différentielles sont valables dans les domaines continus mais nécessitent l'introduction des conditions supplémentaires aux discontinuités. Les expressions intégrales contiennent déjà ces conditions supplémentaires. Dans les paragraphes suivants nous déduirons les conditions aux discontinuités à partir des relations intégrales.

Il a été déjà dit que pour établir des systèmes d'équations qui serviraient de base à une étude détaillée du mouvement d'un milieu continu donné il faut toujours introduire des hypothèses supplémentaires précisant les propriétés particulières et la nature physique du modèle envisagé. Il est nécessaire de choisir un modèle. Le choix du modèle représente l'objet de vastes recherches spécialisées et constitue dans beaucoup de cas un problème fondamental de physique faisant appel à l'idéalisation, à la schématisation, à l'introduction de diverses caractéristiques et notions. On a besoin de nouveaux modèles quand on a à décrire de nouveaux phénomènes et effets dont on connaît ou devine la nature et qui se manifestent dans divers domaines de la science ou de la technique en voie de développement.

Dans les chapitres précédents on a fait connaissance avec quelques modèles classiques des milieux continus, notamment le modèle d'un fluide parfait, le modèle d'un corps élastique, le modèle d'un fluide visqueux, le modèle d'un fluide conducteur dans l'hydrodynamique magnétique, etc. Cette liste est loin d'être complète; dans la suite nous étudierons certains autres modèles. A l'heure actuelle le besoin de nouveaux modèles se fait sentir dans plusieurs domaines de la science et de la technique; il s'agit notamment de l'emploi de nouveaux matériaux, de l'extension du domaine d'application des matériaux déjà connus, des problèmes où il faut rendre compte des propriétés et effets électromagnétiques en mécanique, de l'application d'un vide très poussé ou, au contraire, des pressions très élevées, de l'application de très basses températures ou, au contraire, de très hautes températures, de l'analyse de phénomènes compliqués se déroulant au sein d'un organisme vivant, etc. La théorie de construction de nouveaux modèles en physique et en mécanique connaît de nos jours un développement intense.

Dans le cadre d'un modèle donné, on peut introduire les hypothèses complémentaires concernant les actions extérieures telles que les forces massiques extérieures $\boldsymbol{F}^{(e)}$, les apports élémentaires d'énergie extérieure $dq^{(e)}$ et dq^{**}. On peut également, toujours dans le cadre du modèle donné, se proposer de déterminer les grandeurs mentionnées soit d'après le mouvement donné hypothétiquement, soit à partir des données expérimentales.

Sur la nécessité des conditions supplémentaires concrétisant les mouvements. Une fois le modèle choisi, il est nécessaire d'introduire les conditions supplémentaires pour concrétiser le phénomène ou une classe de phénomènes que sont les mouvements. Ceci est évident! En effet, dans le cadre du modèle théorique du fluide incompressible on peut traiter d'un grand nombre de fluides; ce peut être l'eau, le pétrole, divers autres fluides, même l'air et d'autres gaz où l'on peut négliger la compressibilité; on peut considérer, par exemple, toutes sortes de courants et de mouvements des vagues d'eau dans les océans et les mers; l'écoulement de l'eau sortant par jets d'un réservoir; l'écoulement de l'eau par un déversoir d'un barrage; les mouvements de l'eau de mer provoqués par les déplacements d'un navire et d'un sous-marin; l'écoulement de l'air autour des dirigeables se déplaçant à des vitesses subsoniques et maints autres problèmes. Dans tous ces cas on peut utiliser un même système complet d'équations différentielles. Par conséquent, un système d'équations différentielles, vérifié dans chaque point du volume d'un fluide et formant un système complet, ne suffit point pour résoudre un problème mathématique concret relatif à la détermination des champs des vitesses et des pressions dans le volume d'un fluide. On sait que les solutions générales des équations différentielles du mouvement contiennent des fonctions et constantes arbitraires qu'on doit déterminer à partir des conditions spéciales.

Envisageons maintenant les conditions supplémentaires types qui distinguent les mouvements les uns des autres.

Domaine occupé par un milieu continu et intervalle de temps du mouvement. Les solutions des problèmes mathématiques s'obtiennent sous la forme de fonctions définies dans les points du volume occupé par le milieu et dans l'intervalle de temps pendant lequel le mouvement est étudié. L'intervalle de temps peut être fini, commencer à un certain instant « initial » caractéristique $t = t_0$ ou bien y être « attaché »; on peut étudier les états et les mouvements du milieu continu pour tous les $t > t_0$ ou $t < t_0$ ou, en général, $t \lessgtr t_0$. Les instants caractéristiques à déterminer sont suggérés par le contenu du problème.

Le domaine de volume $\mathscr{D}$ occupé par un milieu mobile peut être soit donné, soit inconnu à l'avance. Par exemple, on suppose le domaine $\mathscr{D}$ connu si le fluide se meut à l'intérieur d'un récipient en le remplissant entièrement ou lorsque le fluide occupe tout l'espace dans un écoulement autour de divers obstacles fixes, donnés à l'avance à l'intérieur du fluide. Dans nombre de cas le domaine $\mathscr{D}$ est inconnu à l'avance; on le détermine, par exemple, en résolvant le problème sur l'écoulement de l'eau d'un récipient, lors de l'étude de la déformation d'un corps élastique soumis à l'action d'un système de charges extérieures données, etc.

Dans certains cas la frontière du domaine $\mathscr{D}$ peut être composée des parties connues comme, par exemple, la surface du fond de mer, des récipients ou, en général, des surfaces mobiles des corps dans des fluides et des parties inconnues à l'avance qu'il est nécessaire de déterminer au cours de la résolution du problème comme, par exemple, surface ondulante de la mer ou la frontière d'un jet sortant d'un récipient, etc.

Le domaine $\mathscr{D}$ occupé par un milieu continu peut être fini comme, par exemple, le volume intérieur d'un récipient ou d'une tuyère dans le cas d'un fluide ou le volume d'une barre, d'une poutre, d'une pièce de machine dans le cas d'un « solide » déformable. Souvent dans les problèmes schématisés on a affaire à un domaine $\mathscr{D}$ contenant un point infiniment éloigné; il s'agit des cas où un corps fluide, un « solide » déformable ou un champ électromagnétique occupent tout l'espace ou l'extérieur d'un certain système de corps donnés ou bien du cas d'un filet ou d'une bande s'étendant à l'infini.

Conditions à l'infini. Lorsque le domaine $\mathscr{D}$ s'étend à l'infini, pour résoudre le problème il faut, en partant des hypothèses de caractère physique, donner les conditions supplémentaires à l'infini.

Dans nombre de cas on peut supposer que le phénomène étudié n'est qu'une perturbation locale et qu'à l'infini l'état et le mouvement du milieu sont donnés. Par exemple, en étudiant le mouvement absolu d'un volume infini d'un fluide provoqué par le mouvement d'un corps solide de dimensions finies on peut admettre qu'à l'infini la vitesse du fluide tend vers zéro, la pression vers une valeur donnée, le champ électromagnétique a des propriétés connues à l'avance; de la même manière on peut supposer qu'un corps déformable se trouve à l'infini dans son état naturel, défini par des conditions physiques supplémentaires, etc.

En abordant les problèmes sur l'écoulement d'un fluide autour des corps immobiles il faut admettre qu'en s'éloignant à l'infini en amont du courant ou, dans certains cas, dans un sens quelconque, le flux incident a des propriétés données, c'est-à-dire que l'on suppose données la vitesse, la pression, la température, etc.

Toutefois les conditions à l'infini peuvent avoir un caractère plus compliqué. Par exemple, si en s'éloignant à l'infini suivant différentes directions on observe un certain phénomène régulier, voire périodique, on doit s'attendre à ce que la propagation dans ces différentes directions sera caractérisée par des ondes du type donné, etc.

Très souvent l'établissement des conditions supplémentaires à l'infini est lié aux effets fins relevant de la présence ou de l'absence d'apport d'énergie de l'infini ou d'un rayonnement quelconque.

Points singuliers au sein d'un milieu. Les conditions à l'infini peuvent s'interpréter comme celles en un point singulier infiniment éloigné. Pour rendre compte de certaines actions sur un milieu ou un champ il est possible d'introduire les points singuliers même dans une partie finie du domaine $\mathscr{D}$. Tels sont, par exemple, les sources et les puits des masses fluides, les dipôles et les multipôles du débit massique, les charges, les dipôles et les multipôles dans un champ électromagnétique, les points singuliers de types déterminés par lesquels on évalue l'action des forces concentrées extérieures et des sources d'énergie, etc. De telles singularités peuvent traduire l'effet et la présence d'autres corps éloignés de la région étudiée d'un champ ou d'un mouvement.

Ainsi donc il est possible d'introduire dans le domaine $\mathscr{D}$ des points singuliers où le comportement asymptotique de certaines fonctions est donné; l'apparition de ces points peut être justifiée par la nécessité de prendre en considération certaines actions extérieures dont on ne tient pas compte dans les équations du mouvement.

Conditions initiales. Dans la théorie des équations différentielles, tant ordinaires qu'aux dérivées partielles, une grande importance est attachée au problème de Cauchy. Pour une équation différentielle ordinaire du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{1.1}$$

il s'énonce ainsi : trouver une solution $x(t)$ de l'équation (1.1) telle que pour $t = t_0$ soient satisfaites les conditions suivantes

$$(x)_{t=t_0} = x_0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = x_0', \tag{1.2}$$

où t_0, x_0 et x_0' sont des nombres donnés. On connaît de la théorie des équations différentielles que le problème de Cauchy a, dans maints cas importants, la solution unique. Les conditions supplémentaires (1.2) sont dites conditions initiales ou données de Cauchy.

On peut énoncer, de façon analogue, le problème de Cauchy pour les équations différentielles aux dérivées partielles en introduisant, pour les mouvements *non stationnaires*, comme données dictées par la forme des équations les fonctions recherchées et leurs quelques dérivées par rapport au temps pour $t = t_0$. Par exemple, en résolvant le problème dynamique relatif à un corps élastique à l'aide des équations de Lamé ((2.26), ch. IV) on doit se donner les déplacements et les vitesses initiaux de tous les points du corps.

Pour résoudre un problème sur l'écoulement non stationnaire d'un fluide parfait homogène incompressible (système d'équations

(1.10), ch. IV) il suffit de donner la distribution des vitesses dans tout le domaine $\mathscr{D}$ à l'instant initial.

Si le domaine $\mathscr{D}$ est un espace illimité, les conditions initiales s'avèrent dans plusieurs cas suffisantes pour obtenir une solution déterminée. Le nombre et la forme des données initiales dépendent de l'ordre du système d'équations. Toutefois, l'énoncé des données de Cauchy ainsi que l'unicité et l'existence de la solution exigent une analyse particulière selon le cas étudié.

Conditions aux limites. Si le domaine $\mathscr{D}$ fini ou infini possède une frontière S, afin d'obtenir des solutions déterminées il faut poser, outre les conditions initiales, les conditions spéciales à la frontière S. Ces conditions s'appellent conditions aux limites ou conditions aux frontières. Elles peuvent avoir les diverses formes. Les conditions aux limites sont établies à partir des hypothèses physiques complémentaires. Voici quelques-unes des conditions aux limites importantes types.

Conditions d'adhérence aux frontières pour les déplacements et vitesses. Supposons connus la position et le mouvement de toute la frontière S ou d'une de ses parties S_1. Par définition le milieu et sa frontière S_1 sont en contact, ce qui entraîne que les déplacements des points individualisés du milieu sur la surface S_1 et de la surface S_1 elle-même doivent satisfaire à la condition de conservation du contact. S'il n'y a pas de glissement tangentiel des points du milieu par rapport à la surface S_1, les vecteurs déplacements w_{milieu} des points du milieu et $w_{\text{frontière}}$ des points de la surface S_1 seront les mêmes.

Il en est ainsi, par exemple, lorsqu'un corps élastique est fixé dans des supports d'un type donné, ou bien quand des objets extérieurs sont introduits dans un milieu « solide » déformable ou encore lors de l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'un corps solide de forme donnée, etc.

Il est évident que l'on a sur la surface S_1 les conditions suivantes :

$$w_{\text{milieu}} = w_{\text{frontière}}, \qquad v_{\text{milieu}} = v_{\text{frontière}}. \tag{1.2'}$$

Si le mouvement de la frontière S_1 est donné, en l'absence de glissement sur S_1 on y aura les conditions (1.2'), où le vecteur déplacement $w_{\text{frontière}}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ et le vecteur vitesse $v_{\text{frontière}} = \left(\frac{dw_{\text{milieu}}}{dt}\right)$ sont des fonctions connues des coordonnées lagrangiennes ξ^1, ξ^2, ξ^3. Ce genre de conditions se rencontre souvent dans la mécanique des corps « solides » déformables. La condition (1.2') joue également dans la théorie du mouvement d'un fluide visqueux où on l'appelle condition d'adhérence.

En théorie de l'élasticité une importance particulière est attachée à la condition portant sur les déplacements, ceux-ci définissant le tenseur des déformations et le tenseur contrainte.

En théorie du mouvement des fluides, les déplacements n'entrent pas directement dans les équations du mouvement. Celles-ci contiennent les composantes des vitesses, c'est pourquoi dans l'hydrodynamique c'est la condition aux frontières (1.2') pour les vitesses qui joue le rôle essentiel.

Evidemment en cas d'un mouvement continu la condition (1.2') pour les vitesses est remplie automatiquement si la condition pour les déplacements est satisfaite.

Si la frontière S_1 s'est déplacée d'une certaine position initiale dans une position actuelle, alors $w_{\text{frontière}}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \neq 0$; si la frontière S_1 initialement déplacée demeure ensuite immobile, la vitesse $v_{\text{frontière}}$ sera nulle.

Chacune des conditions vectorielles (1.2') pour les déplacements et les vitesses équivaut à trois égalités scalaires.

Le nombre de conditions initiales et de celles aux limites dépend de l'ordre de l'équation. Il s'ensuit que le nombre et la forme des conditions aux limites diffèrent selon les modèles.

Condition d'écoulement d'un fluide parfait. Par exemple, les équations dynamiques du mouvement d'Euler pour un fluide parfait ne contiennent que les dérivées premières des composantes de la vitesse.

Les équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux contiennent les dérivées secondes partielles par rapport aux coordonnées des composantes de la vitesse. Il paraît naturel dans les deux cas de considérer la condition aux frontières (1.2') pour les vitesses.

Cependant les trois conditions d'adhérence (1.2') sont trop fortes pour un fluide parfait. S'il y a une adhérence complète sur les parois, les équations d'Euler n'ont pas de solution, on doit donc admettre, dans le cas d'un fluide parfait, l'éventualité d'un glissement des particules le long de la frontière avec les corps extérieurs solides ou déformables.

Pour un liquide parfait la condition (1.2') sur S_1 est remplacée par une seule condition scalaire d'écoulement plus faible

$$v_{n\,\text{fluide}} = v_{n\,\text{frontière}} \quad \text{sur} \quad S_1, \tag{1.3}$$

où $v_{n\,\text{fluide}}$ et $v_{n\,\text{frontière}}$ sont les composantes des vitesses des éléments du fluide et de la surface frontière normales à S_1. La condition (1.3) traduit la conservation du contact entre le fluide et la surface donnée S_1; d'après cette condition le fluide ne peut pas pénétrer à l'intérieur des corps, dont S_1 est la surface de contact avec le fluide, ni se détacher de cette surface S_1.

Sur la surface S_1 limitant des corps en contact avec un fluide parfait on a, en règle générale, l'inégalité

$$v_{\tau\,\text{fluide}} \neq v_{\tau\,\text{corps}}, \tag{1.4}$$

où l'indice τ désigne les composantes des vitesses tangentes à la surface S_1. En vertu de l'inégalité (1.4) il y a glissement du fluide parfait le long de la surface S_1 se déplaçant dans un mouvement donné.

Si l'écoulement d'un fluide parfait est potentiel, donc $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi$, la condition (1.3) peut s'écrire sous la forme

$$v_{n\,\text{fluide}} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_{n\,\text{frontière}} \quad \text{sur} \quad S_1.$$

On se donne, donc, d'après la condition d'écoulement sur la surface S_1 les valeurs de la dérivée normale du potentiel φ. Si la frontière S_1 est immobile, la condition (1.3) prend la forme

$$v_{n\,\text{fluide}} = 0 \quad \text{sur} \quad S_1$$

ou

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad S_1.$$

Pour les différents modèles outre la condition (1.2′) ou (1.3) il est possible de poser d'autres conditions aux frontières données. Par exemple, on peut se donner sur S_1 la température ou l'apport de chaleur.

Si un système complet d'équations comporte des caractéristiques électromagnétiques, on se donne sur S_1 les conditions portant sur les vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{j}$, par exemple. En établissant les conditions aux frontières il faut s'inspirer des conditions générales aux surfaces de discontinuité exposées dans les paragraphes qui suivent.

Ici nous allons étudier d'une façon détaillée certaines conditions aux frontières fréquemment utilisées qu'on peut énoncer à l'aide des conditions aux surfaces de discontinuité.

Conditions à la frontière libre. Dans nombre de problèmes la frontière S ou une certaine partie d'elle S_2 d'un domaine de mouvement continu du milieu continu n'est pas connue à l'avance et l'on doit la déterminer en résolvant le problème. D'habitude on se donne sur la frontière inconnue S_2 des efforts extérieurs. La théorie de l'élasticité et d'autres théories permettent de connaître la densité des forces surfaciques sur les éléments de la surface S_2

$$\boldsymbol{p}_n = p_{nn}\boldsymbol{n} + p_{n\tau}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{f}(M, t), \tag{1.5}$$

où M est un point de la surface S_2. La condition (1.5) enferme trois relations sur S_2. Ce genre de conditions aux frontières se rencontre fréquemment en pratique dans les calculs des pièces de machines.

En théorie de la propagation des ondes élastiques ou sismiques on introduit les surfaces dites libres sur lesquelles les contraintes surfaciques sont dues à la simple pression atmosphérique s'exerçant suivant la normale $\boldsymbol{n}$ aux éléments de surface. Dans ce cas on obtient les conditions suivantes:

$$p_{nn} = -p_0, \quad p_{n\tau} = 0, \tag{1.6}$$

où p_0 est la valeur de la pression atmosphérique.

Les conditions aux frontières de la forme (1.5) ou (1.6) se rencontrent dans les problèmes sur l'écoulement d'un fluide visqueux lorsque sa surface libre est une surface de contact avec un autre fluide visqueux ou parfait dont toutes les caractéristiques de l'écoulement sont supposées connues.

Conditions à la surface libre dans un fluide parfait. Dans les problèmes sur l'écoulement des fluides parfaits on envisage souvent les surfaces libres. Par définition, pour un fluide parfait on a toujours $p_{n\tau} = 0$. Il s'ensuit que les conditions à la surface libre (1.6) dans un milieu parfait se ramènent à une seule égalité

$$p = p_0, \tag{1.7}$$

où p_0 est la valeur donnée de la pression dans le milieu extérieur pouvant être prise égale, par exemple, sur la surface perturbée d'eau inconnue à l'avance, à la pression atmosphérique. En pratique, on rencontre des cas où la pression donnée sur la surface libre diffère de la pression atmosphérique; sur les surfaces libres des fluides remplissant partiellement les réservoirs fermés la pression p_0 peut être arbitraire.

En définissant le mouvement et les formes des frontières S_2 au moyen des composantes recherchées du champ des vitesses ou des déplacements on a également besoin des égalités de la forme (1.2′). Il faut avoir en vue que les égalités (1.2′) pour les surfaces libres S_2 ne relient que les composantes de vitesse normales à S_2, la vitesse d'une frontière libre étant définie comme la vitesse de déplacement de cette frontière suivant la normale à celle-ci.

Généralement on a à résoudre les problèmes aux conditions mixtes aux frontières lorsque le volume d'un milieu mobile est limité en partie par des parois extérieures immobiles données ou par des parois dont les conditions de fixation sont connues, et en partie par des surfaces libres. En outre, certaines portions de la frontière peuvent satisfaire à d'autres types de conditions, notamment la frontière peut n'être donnée qu'en partie, ou les frontières données satisfont aux conditions aux limites plus compliquées représentant des relations linéaires ou non linéaires, finies ou différentielles entre les fonctions recherchées. On fera connaissance avec quelques-unes

des conditions compliquées aux paragraphes suivants et dans le second volume de ce livre.

Ici on se borne à indiquer la nécessité des conditions aux limites et à dégager la signification de certains types de ces conditions. L'énoncé des problèmes concrets et leur résolution sont rapportés aux chapitres consacrés à l'hydrodynamique, à la théorie de l'élasticité et à la théorie de la plasticité (voir tome II).

§ 2. Simplifications usuelles dans la position de certains problèmes conduisant à la réduction du nombre de variables indépendantes

Du point de vue mathématique le problème de détermination des solutions des équations décrivant le mouvement ou autres processus physiques dans le formalisme d'Euler se ramène à la recherche des fonctions inconnues de quatre variables x^1, x^2, x^3, t : par exemple, la vitesse, la pression, la température, la densité, les champs électrique et magnétique, etc.

Ce problème mathématique est bien difficile dans la plupart des cas. Sa résolution exige, d'une part, d'apporter une schématisation supplémentaire dans la position des problèmes physiques concrets et, d'autre part, d'apporter des simplifications admissibles dans la position mathématique de ces problèmes physiques.

Un grand nombre de variables indépendantes (ici quatre) complique fortement le problème.

Dans certains problèmes les simplifications permettant de résoudre le problème consistent à réduire le nombre de variables indépendantes ou à supposer que les fonctions recherchées dépendent d'une façon déterminée de certaines variables rapportées aux axes de coordonnées correspondantes du type particulier spécialement choisi.

Mouvements stationnaires. On peut évidemment supposer, dans certains cas pratiquement admissibles, que les mouvements et les processus étudiés sont stationnaires dans un système d'axes correspondant. Cela permet, en appliquant la description eulérienne, de réduire de l'unité le nombre de variables indépendantes, puisque le temps t s'élimine. Pour un mouvement stationnaire les conditions initiales sur le temps t sont superflues, car dans toutes les équations du mouvement stationnaire les dérivées partielles par rapport au temps disparaissent. Cette circonstance facilite généralement la résolution des problèmes mathématiques.

Mouvements plans. Le mouvement d'un milieu continu est dit plan si l'on peut choisir un système de coordonnées cartésiennes x, y, z tel que les vitesses de toutes les particules du milieu se trouvent parallèles au plan (x, y), toutes les caractéristiques du mou-

vement et de l'état n'étant fonctions que de deux coordonnées x, y et, éventuellement, du temps t.

Le mouvement et l'état des particules du milieu ne dépendant pas dans ce cas de la coordonnée z, le milieu se meut parallèlement au plan (x, y), ses mouvements dans tous les plans parallèles au plan (x, y) étant identiques.

On ne peut supposer le mouvement plan que dans certains problèmes particuliers, par exemple, dans le problème de l'aérodynamique sur une aile cylindrique infinie se déplaçant dans un fluide perpendiculairement à sa génératrice; dans certains problèmes sur les ondes sur la surface d'un fluide pesant; dans un groupe de problèmes de la théorie de l'élasticité comme, par exemple, celui d'équilibre d'une longue poutre cylindrique dont la section transversale est soumise à l'action des charges extérieures statiquement nulles disposées arbitrairement dans le plan de la section, lorsque ces charges ne dépendent pas de la coordonnée longitudinale et les déplacements dans la direction longitudinale sont interdits par les conditions de fixation, etc.

La théorie mathématique consacrée aux problèmes du mouvement plan est très développée, elle est à la base de diverses méthodes approximatives de la résolution des problèmes spatiaux où l'hypothèse du mouvement plan n'est pas entièrement valable pour les champs recherchés.

Ecoulement plan potentiel d'un fluide parfait. Un grand succès de la théorie des écoulements plans d'un fluide parfait est dû au fait que le potentiel des vitesses $\varphi(x, y, t)$ d'un écoulement potentiel est une fonction harmonique

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \tag{2.1}$$

Pour une fonction harmonique $\varphi(x, y, t)$ on peut définir une fonction harmonique conjuguée $\psi(x, y, t)$ conformément aux équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{2.2}$$

ou

$$d\psi(x, y, t)=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy. \tag{2.3}$$

La condition d'intégrabilité de (2.3) est assurée par l'équation (2.1). La fonction $\psi(x, y, t)$ s'appelle *fonction de courant*. Conformément à (2.3) et aux équations des lignes de courant il vient que $\psi = \text{const}$ le long de toute ligne de courant.

Comme on sait les équations de Cauchy-Riemann (2.2) permettent de définir une fonction analytique w de la variable complexe $z =$

$= x + iy$, où $i = \sqrt{-1}$:

$$w(z) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t). \tag{2.4}$$

La fonction $w(z, t)$ est appelée fonction caractéristique.

Le problème de la détermination du potentiel des vitesses $\varphi(x, y)$ peut être ramené à celui de la détermination de la fonction caractéristique de la variable complexe z.

Pour résoudre ce problème on fait appel à des méthodes très efficaces de la théorie des fonctions de la variable complexe. Cette théorie permet de résoudre une quantité de problèmes difficiles et de développer notablement l'hydrodynamique des écoulements plans d'un fluide parfait incompressible.

Les écoulements plans stationnaires ne font introduire qu'une seule variable indépendante, la variable complexe $z = x + iy$. C'est là une simplification très forte de la théorie.

Sous une forme quelque peu compliquée les méthodes analogues de résolution des problèmes plans basées sur les applications de la théorie des fonctions de la variable complexe sont développées dans la théorie de l'élasticité (voir tome II, ch. XI).

Mouvement de révolution. Les problèmes présentant une symétrie de révolution constituent une classe importante de problèmes. Ces problèmes permettent de choisir un système de coordonnées cylindrique dans lequel les arguments essentiels des fonctions recherchées ne seront que les coordonnées r, z et t, tandis que la coordonnée angulaire φ ne l'est plus. Toutes les équations et formules donnant la solution du problème seront invariantes par rotation autour de l'axe z.

Parmi les problèmes susceptibles d'être résolus dans le cadre de la théorie du mouvement des milieux continus à symétrie axiale citons les problèmes traitant de la résistance et du mouvement des corps de révolution: des tuyères, des réservoires, des enveloppes spéciales, etc., les problèmes où l'on envisage le mouvement de translation le long de l'axe de symétrie ou le mouvement de rotation autour de cet axe, au sein d'un fluide, des corps de révolution, etc.

Les mouvements plans et ceux de révolution sont des exemples de mouvements où ne sont essentielles que deux coordonnées géométriques.

Mouvements unidimensionnels non stationnaires. Les mouvements et les processus où il n'y a qu'une seule coordonnée essentielle η sont dits unidimensionnels. Le mouvement est dit unidimensionnel non stationnaire s'il dépend du temps t. On démontre *) que

*) Voir Lipschitz, *Z. f. reine und angew. Math.*, v. 100, 1887, page 89. Voir également G. Lioubimov, *Sur les écoulements unidimensionnels non stationnaires possibles d'un gaz visqueux* (en russe), recueil n° 19, « Teor. hydromech. », op. 7, p. 132, Oboronguiz, 1956.

dans un fluide les écoulements unidimensionnels non stationnaires où les déplacements sont orthogonaux aux plans de coordonnées η = const ne sont possibles que dans les trois cas suivants.

Mouvement par ondes planes. 1. Le mouvement par ondes planes est un mouvement que l'on peut décrire dans un système de coordonnées cartésiennes où les variables indépendantes essentielles sont la coordonnée x (on notera dans ce qui suit $x = r$) et le temps t. Dans ce cas toutes les caractéristiques du mouvement dans le plan x = const (plan de la phase d'onde) sont les mêmes, autrement dit, toutes les dérivées des caractéristiques des mouvements et des processus par rapport à y et z sont nulles.

Mouvement par ondes cylindriques. 2. Le mouvement par ondes cylindriques qui peut être décrit dans un système de coordonnées où les variables indépendantes essentielles sont la distance r jusqu'à l'axe de symétrie et le temps t. Dans ce cas sur les surfaces cylindriques r = const (surfaces de la phase d'onde) toutes les caractéristiques du mouvement sont constantes, c'est-à-dire toutes les dérivées des grandeurs cherchées par rapport à z et à l'angle polaire φ sont nulles.

Mouvement par ondes sphériques. 3. Pour décrire un mouvement par ondes sphériques on peut choisir un système de coordonnées tel que seuls la distance r jusqu'au centre de symétrie et le temps t soient les variables indépendantes essentielles. Dans ce cas aux sphères r = const (surfaces de la phase d'onde) toutes les caractéristiques du mouvement sont les mêmes, c'est-à-dire toutes les dérivées des grandeurs cherchées par rapport à la longitude θ et à la latitude φ sont nulles.

La théorie des mouvements unidimensionnels s'applique avec succès à de nombreux problèmes théoriques et pratiques; il s'agit des problèmes de la théorie de la propagation des ondes lumineuses et acoustiques, de ceux de la théorie des ondes de choc, de la théorie de la détonation.

Ainsi donc les simplifications mentionnées ci-dessus se ramènent à l'élimination d'une, de deux ou même trois variables indépendantes (un mouvement unidimensionnel stationnaire ne dépend que d'une seule variable r, un mouvement non stationnaire dans le cas nuldimensionnel dépend d'une seule variable t).

Mouvements automodèles. Notons l'importance des solutions où la réduction du nombre des arguments des fonctions cherchées s'obtient en rendant essentielles seules certaines combinaisons des variables indépendantes. Les exemples en sont les mouvements automodèles où l'on remplace quatre variables x, y, z, t par trois

arguments indépendants, seuls essentiels

$$\frac{x}{t^\alpha}, \quad \frac{y}{t^\alpha}, \quad \frac{z}{t^\alpha},$$

où α est une constante.

Un mouvement unidimensionnel non stationnaire à deux variables r et t se réduit à un mouvement automodèle à une seule variable $\lambda = r/t^\alpha$. Il est évident que dans ce cas les équations aux dérivées partielles par rapport à r et t deviennent les équations ordinaires à une seule variable indépendante λ.

Il sera montré par la suite qu'il est possible d'établir directement si la solution admet le procédé d'automodélage, ceci à partir de la position du problème en attirant les méthodes de la théorie des dimensions. Cela n'exige même pas d'écrire les équations du mouvement ni les conditions aux limites; il suffit de connaître les paramètres et les caractéristiques inclus dans ces équations et conditions. En se guidant de ces idées, on peut dans certains cas schématiser au préalable le phénomène étudié et poser le problème de façon à appliquer les simplifications décrites et, en particulier, de façon à rendre la solution automodèle. La propriété d'une solution d'être automodèle est bien précieuse, car, du point de vue théorique, réduire les équations aux dérivées partielles aux équations ordinaires c'est arriver aux solutions numériques du problème par des méthodes plus simples.

§ 3. Linéarisation des équations et des problèmes de la mécanique des milieux continus

Non-linéarité des problèmes de la mécanique des milieux continus. Les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus sont généralement non linéaires. Cela relève du fait qu'en général les fonctions cherchées entrent dans les équations et les conditions aux limites de façon non linéaire. Citons l'exemple des équations d'Euler (l'expression de l'accélération) qui comportent les produis $u^i\ (\partial u_k/\partial x^i)$, de plus dans le cas du mouvement des milieux déformables accompagnés de fortes variations de la densité et de la pression, elles contiennent les termes non linéaires $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^k}$.

Les équations de Maxwell sont linéaires pour un champ dans le vide; la non-linéarité apparaît en présence des interactions du champ électromagnétique avec le milieu dont on rend compte à l'aide de la loi d'Ohm compliquée et des lois compliquées de polarisation et d'aimantation.

La non-linéarité des équations initiales est due à des effets physiques particuliers ayant en général une grande portée pratique. La propriété de non-linéarité complique fortement la résolution mathématique des problèmes.

Petites perturbations de l'état d'équilibre ou du mouvement permanent. Certains problèmes de la mécanique des milieux continus traitent des mouvements ou des transformations qui sont des petites perturbations de certains états d'équilibre ou du mouvement permanent.

Par exemple, dans les corps élastiques (pièces de machines et de constructions) les déformations sont souvent petites et les composantes du tenseur des déformations, qui sont dans les axes cartésiens des nombres abstraits, ont une grandeur de l'ordre de quelques fractions de pour cent; d'où l'intérêt de la théorie linéaire des déformations infinitésimales, où l'on néglige les produits des petites quantités.

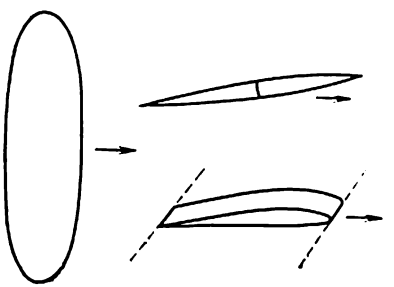


Fig. 42. Mouvement des ailes minces et des corps de révolution

La théorie des ondes dans un liquide pesant envisage souvent les mouvements de l'eau où la surface libre de l'eau ne diffère que peu de celle du niveau horizontal de l'eau au repos. Dans ce cas les valeurs de la vitesse absolue et des déplacements correspondants des particules fluides sont petites.

Dans l'aérodynamique il s'agit souvent des mouvements dans l'air des corps minces (profils d'ailes, projectiles, etc.) dans la direction de leur dimension principale (fig. 42).

Lorsque l'angle entre la vitesse du vol et les éléments de surface du corps est petit, ce mouvement provoque dans la masse principale de l'air de petites perturbations de vitesse proportionnelles au produit de la vitesse du vol par les petits angles d'inclinaison que fait la surface du corps avec la direction du vecteur vitesse du vol.

On pourrait citer d'autres exemples qui sont très nombreux. Les hypothèses sur la petitesse des perturbations des fonctions recherchées des déplacements, des vitesses, des valeurs de la densité, des pressions, de la température, des caractéristiques du champ électromagnétique, etc. ne sont pas généralement strictes, devenant même erronées dans certaines petites régions du flux. Néanmoins, ces hypothèses s'avèrent très bien justifiées dans des régions importantes du point de vue pratique. Certes, il y a des cas importants où les hypothèses des petites fonctions recherchées sont absolument inadmissibles et l'on doit tenir compte des effets non linéaires.

Linéarisation des problèmes de la mécanique des milieux continus. Lorsque l'hypothèse de la petitesse des fonctions recherchées est admissible, on peut effectuer la linéarisation des problèmes consistant en les simplifications suivantes.

Linéarisation des équations. 1. Pour les fonctions recherchées regardées comme des petits du premier ordre non négligeables, toutes les équations, les relations du type équations d'état, les relations exprimant les conditions aux frontières, etc. s'écrivent sous forme d'équations linéaires où l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

Linéarisation des conditions aux frontières. 2. La déformation des frontières étant petite par hypothèse, les conditions aux frontières sur la surface déformée S limitant le domaine $\mathscr{D}$ sont transposées à S_0, frontière du domaine $\mathscr{D}_0$ correspondant à l'état principal non perturbé, suivant la normale à S_0.

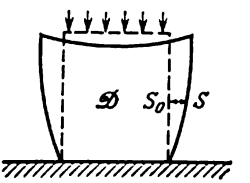


Fig. 43. Pièce élastique encastrée soumise à l'action des forces réparties

Ainsi donc, on définit les fonctions recherchées comme les solutions d'un système d'équations linéaires dans un domaine $\mathscr{D}_0$ aux conditions aux frontières linéaires sur la surface connue S_0. En résolvant le problème aux limites on peut définir d'après les fonctions trouvées pour un mouvement perturbé, en première approximation, les petites déformations de la frontière S.

Par exemple, en résolvant pour un corps élastique les équations linéaires dans le domaine de l'état non déformé avec les conditions aux frontières linéarisées sur la frontière non déformée, on obtient les déplacements de ses points en fonction des coordonnées; à partir des déplacements trouvés il est possible de calculer les petites déformations de la frontière et d'en définir également, en première approximation, la forme. En particulier, en envisageant le problème des petites déformations d'une pièce élastique à base encastrée soumise à l'action des forces distribuées on peut écrire les conditions aux frontières sur la surface non déformée S_0 de la pièce (fig. 43).

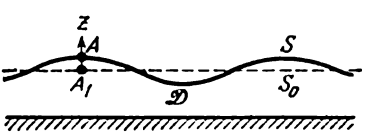


Fig. 44. Sur la linéarisation des problèmes de la théorie des ondes à petites amplitudes

Dans la théorie des ondes de petite amplitude sur la surface d'un liquide pesant, les conditions aux frontières sur la surface libre S (condition de la pression constante) sont rapportées au plan horizontal S_0 coïncidant avec le niveau du liquide au repos (fig. 44).

Ayant trouvé, d'après les vitesses déterminées sur le niveau horizontal S_0, le champ linéarisé des vitesses, on peut calculer les déplacements des points de la surface libre qui définissent, aux petits du premier ordre près, la forme de la surface libre perturbée.

En aérodynamique linéarisée un domaine de forme compliquée $\mathscr{D}$ occupé d'un gaz en mouvement perturbé et dont les frontières coïncident avec la surface d'une aile fine est remplacé par l'extérieur d'une plaque plane que l'on suppose approcher la surface de l'aile fine. On rapporte les conditions d'écoulement autour de la surface de l'aile baignée respectivement aux deux côtés de la plaque plane, en ne gardant que les petits du premier ordre. Cela fait, on envisage le mouvement du fluide dans un espace illimité, la plaque frontière étant considérée comme surface de discontinuité des pressions et des vitesses; la discontinuité des pressions y est équilibrée par les forces distribuées qu'exerce l'aile sur le fluide. Dans la position approchée du problème, ces forces agissent sur le fluide du côté de la plaque. Lorsqu'on analyse un mouvement d'un fluide illimité à une discontinuité des vitesses sur la surface de discontinuité correspondant à l'aile, il faut introduire des forces extérieures distribuées.

Il est également possible de remplacer, dans un problème non linéarisé exact, l'intérieur d'une aile par le fluide en introduisant des discontinuités et des forces surfaciques extérieures réparties sur la surface de l'aile.

La linéarisation constitue la base de la théorie de l'élasticité dans le cadre de la théorie de petites déformations. Sur cette théorie reposent de nombreuses méthodes du calcul des problèmes appliqués.

En aérodynamique, en même temps que les théories linéarisées, les théories non linéaires ont connu un développement considérable, étant donné qu'il n'est pas possible dans nombre de cas de supposer petites les perturbations d'un courant.

La théorie des ondes sur la surface d'un liquide pesant et de nombreux problèmes de l'électrodynamique et d'autres domaines de la physique sont développés dans le cadre des problèmes linéarisés. En ce qui concerne la théorie mathématiquement difficile des ondes d'amplitude finie sur la surface d'un liquide pesant lorsque les conditions aux limites sont linéaires et doivent être satisfaites sur la surface libre inconnue, on n'y a considéré que très peu de problèmes.

Superposition des solutions. Les équations différentielles linéaires possèdent une propriété remarquable qu'est la superposition des solutions: la somme des solutions particulières est également une solution. Il va de soi qu'en cas des équations non linéaires la somme des solutions particulières n'est pas une solution. En formant des sommes finies, des séries ou des intégrales à partir des solutions particulières on peut construire les solutions des équations linéaires de la mécanique des milieux continus contenant des fonctions arbitraires et des constantes qui, étant dûment choisies, permettent de

satisfaire aux conditions initiales, aux limites et autres du problème posé. Par la suite on illustrera cette proposition sur des exemples.

Ondes stationnaires. Parmi les solutions particulières des systèmes d'équations linéaires comportant les dérivées partielles des fonctions inconnues par rapport au temps et les coefficients indépendants du temps t sont particulièrement intéressantes les suivantes:

$$F = \operatorname{Re}[g(x, y, z, \omega) e^{i\omega t}], \tag{3.1}$$

où $i = \sqrt{-1}$, $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ est un nombre constant, en général complexe, F sont des fonctions cherchées. La formule (3.1) donne F en fonction du temps; les fonctions complexes $g(x, y, z, \omega)$ caractérisent les distributions des amplitudes et des phases selon les points de l'espace.

Ces fonctions dépendent de la « fréquence » ω. Les surfaces $\arg(g) = \text{const}$ s'appellent surfaces de phase; les surfaces où $|g| = 0$ s'appellent nœuds, celles où l'on a le maximum de $|g|$ sont dites ventres. Les oscillations (3.1) peuvent être appelées stationnaires. Il est d'usage de supposer que le domaine $\mathcal{D}$ des oscillations stationnaires contient les nœuds.

Dans les applications on étudie d'habitude les oscillations stationnaires de phase égale en tous les points de l'espace.

S'il s'agit, par exemple, d'une fixation rigide aux points de la surface S, les conditions aux frontières se ramènent à l'exigence de la coïncidence des frontières avec les nœuds; dans d'autres cas les conditions sur les frontières libres entendent la coïncidence des parties de la frontière avec les ventres. Les conditions aux frontières restreignent, en général, le domaine des valeurs admissibles des fréquences ω. Si $\omega = \omega_1$ est réel, la relation (3.1) liant les grandeurs cherchées et le temps représente des oscillations harmoniques d'amplitudes différentes et décalées généralement en phase selon les points et les grandeurs à déterminer. Si l'on a l'égalité (3.1), le problème se ramène à la définition des fonctions $g(x, y, z, \omega)$ et des fréquences ω. Pour $\omega_2 < 0$ les amplitudes s'amplifient, pour $\omega_2 > 0$ elles s'amortissent.

Pour les équations linéaires il est possible de construire des solutions plus générales en appliquant la méthode de Fourier consistant à superposer les oscillations stationnaires du type (3.1) à différentes ω, ces dernières pouvant varier, selon le cas envisagé, soit d'une façon discontinue, soit continue.

Ondes progressives. Une autre forme particulièrement importante de solutions des équations linéaires est représentée par une onde progressive non amortie de la forme

$$F(x, y, z, k, \omega, t) = \operatorname{Re} g(y, z, k, \omega) e^{i(kx - \omega t)}, \tag{3.2}$$

où k et ω sont des nombres constants réels, g est une fonction complexe. Dans le cas général on a un ensemble de valeurs admissibles de ω et de k, la valeur de k pouvant se définir en fonction de ω. La solution (3.2) traduit des distributions périodiques par sinusoïdes de phases différentes des fonctions cherchées tant en coordonnée x qu'en temps t.

Les valeurs fixées de la fonction F se propagent le long de l'axe x à la vitesse $a = \omega/k$. La grandeur a s'appelle célérité de propagation de l'onde progressive, sinusoïdale dans le cas considéré.

Si pour les différents ω ou k la valeur de a est différente, c'est-à-dire si $a(k) \neq \text{const}$, alors il y a dispersion des ondes. Les ondes de longueurs différentes se propagent avec des célérités différentes.

L'onde progressive plane sinusoïdale se propageant suivant le vecteur $\boldsymbol{\varkappa} = \varkappa_1 \boldsymbol{i} + \varkappa_2 \boldsymbol{j} + \varkappa_3 \boldsymbol{k}$ vérifie la formule

$$F = \operatorname{Re} A e^{i(\boldsymbol{\varkappa} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)}, \tag{3.3}$$

où A est une constante, $\boldsymbol{r}$ le rayon-vecteur. La célérité de propagation de l'onde est ici $a = \omega / |\boldsymbol{\varkappa}|$.

Dans le cas général, à une onde progressive de forme non sinusoïdale avec des surfaces planes de phase égale correspondent des solutions du type

$$F = f(\boldsymbol{\varkappa} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t). \tag{3.4}$$

Si $\boldsymbol{\varkappa}$ et ω sont des constantes, l'onde plane se propagera suivant le vecteur $\boldsymbol{\varkappa}$ comme un corps rigide; si $\boldsymbol{\varkappa}$ et ω sont des fonctions d'état des particules, les états différents auront des célérités de propagation différentes, ce qui se traduira par la modification de la forme de l'onde sur le graphique de f en fonction des coordonnées.

Linéarisation à l'aide des variables spéciales. Dans certains cas particuliers, il est possible, sans faire aucune approximation, de transformer les équations non linéaires en équations linéaires en passant à de nouvelles variables indépendantes convenablement choisies.

Une telle linéarisation est rencontrée dans la théorie des mouvements du gaz plans barotropes potentiels stationnaires *).

§ 4. Conditions sur les surfaces de fortes discontinuités

Surfaces de discontinuité dans la mécanique des milieux continus. Jusqu'à maintenant, en introduisant ces notions fondamentales et en établissant les systèmes d'équations relatifs aux modèles des milieux continus on supposait que, dans le domaine $\mathscr{T}$ occupé par

*) B. Riemann, *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.* Göttingen Abhandlungen, 1860, bd. 8.

le milieu dont les points vérifiaient les équations correspondantes, les fonctions données et cherchées étaient continues et avaient autant de dérivées continues qu'il en fallait.

Cette supposition s'avère être une restriction très forte, inadmissible dans de nombreuses applications pratiques. En effet, dans les problèmes sur la vibration d'un système composé d'un liquide parfait et des corps élastiques qui y sont plongés, on a à considérer les interactions des milieux continus à des propriétés et des caractéristiques de mouvement nettement différentes. Sur les surfaces de séparation de tels milieux les caractéristiques d'état et celles de mouvements, telles que densité, vitesse, déplacements, etc., peuvent être, en général, des fonctions discontinues des coordonnées.

Dans cet exemple, en étudiant les mouvements continus du liquide et des corps élastiques, on peut envisager leurs surfaces de séparation comme surfaces de discontinuité auxquelles il est nécessaire d'établir pour les fonctions recherchées des conditions spéciales jouant le rôle de conditions aux limites sur les frontières mobiles dans le cas général et inconnues au préalable. On a déjà fait connaissance avec une telle condition simple au § 1 de ce chapitre. Dans le cas général les conditions de ce type sur les surfaces de discontinuité peuvent être d'une nature plus compliquée; c'est le cas de la surface de la glace fondante ou de la glace en train de se former immergées dans de l'eau; il peut s'agir également de la surface d'action de l'air avec les produits de combustion d'une charge de poudre qui se consomme en se déplaçant dans l'atmosphère.

Outre les surfaces de discontinuité des deux côtés desquelles on applique deux modèles différents pour décrire le mouvement du milieu, on a affaire aux surfaces mobiles de discontinuité de la densité, de la vitesse, de la pression, de l'entropie, etc., des deux côtés desquelles le milieu continu n'est schématisé que par un seul modèle (par exemple, d'un gaz parfait).

Dans nombre de problèmes de la dynamique des gaz, l'exigence de la continuité en coordonnées des solutions recherchées dans le domaine $\mathscr{D}$ occupé par un gaz parfait, ainsi que dans beaucoup d'autres cas, conduit à l'inexistence de solutions. En levant l'exigence de la continuité et en admettant que les solutions recherchées soient lisses par morceaux, on assure, à condition de poser le problème convenablement, l'existence et l'unicité de la solution. Les solutions discontinues qu'on obtient alors peuvent être en bon accord avec les effets réels.

Lorsque les surfaces de discontinuité demeurent des surfaces isolées séparant les domaines de continuité des processus, il se trouve que sur les différentes faces de telles surfaces doivent être vérifiées certaines relations universelles entre les caractéristiques du mouvement et de l'état. Ici nous indiquerons les méthodes générales permettant d'obtenir ces relations et, ensuite, établirons celles-ci.

Les raisonnements concernant les conditions à la surface de discontinuité s'appuient sur l'hypothèse de l'existence des surfaces de discontinuité. La question de savoir si la solution cherchée admet des surfaces de discontinuité est une question spéciale liée aux propriétés du modèle admis ainsi qu'aux particularités du problème envisagé.

On peut recourir à des solutions discontinues dans les méthodes approchées afin de simplifier le problème et d'obtenir des solutions efficaces là où il y a également des solutions continues.

Mouvement discontinu en tant que limite vers laquelle tendent les mouvements continus pour divers modèles compliqués. Bien qu'il soit d'usage d'envisager les mouvements des milieux continus avec des surfaces de discontinuité et qu'on reconnaisse la fécondité de ces méthodes et solutions, il existe un point de vue répandu d'après lequel il est possible et même nécessaire, en décrivant les phénomènes réels dans le cadre de la mécanique des milieux continus, de ne considérer que les mouvements continus. Dans les cas où la solution continue n'existe pas ou cesse d'exister à partir d'un certain moment, il est nécessaire, pour obtenir des solutions continues, de s'adresser à un modèle plus compliqué, d'introduire dans les équations du mouvement des termes complémentaires et des relations tenant compte à l'intérieur des couches minces ou sur la frontière du domaine $\mathscr{D}$ des effets dissipatifs causés par des sauts brusques des vitesses, des températures, des densités, des pressions, etc.

Par exemple, il existe des cas où le problème décrit par les équations d'Euler dans le cadre du modèle du gaz parfait n'a pas de solution continue, tandis que les équations du mouvement de Navier-Stokes appliquées au modèle du gaz visqueux fournissent une solution à brusques variations de paramètres du mouvement et de l'état dans les couches minces.

Structure des discontinuités. L'analyse des solutions continues auxquelles correspondent des discontinuités dans un modèle simplifié constitue pour un modèle compliqué un problème d'établissement de la structure d'une discontinuité.

L'existence d'une solution, son unicité et la résolution de problèmes concernant la structure des discontinuités relèvent des méthodes d'introduction des modèles compliqués. Dans le cas d'un grand nombre des fonctions inconnues ou lorsque les équations des processus sont non linéaires, décrire la structure d'une discontinuité constitue un problème mathématique fort compliqué.

On peut réconcilier la théorie des solutions continues avec celle des solutions discontinues grâce à l'hypothèse selon laquelle les solutions discontinues sont considérées dans le cadre d'un modèle simple donné comme la limite vers laquelle tendent les solutions

continues d'un même problème pour une suite des modèles compliqués lorsque les coefficients dans les équations du mouvement des modèles compliqués tendent continûment vers ceux des équations du modèle simple. Par exemple, lorsque les coefficients de viscosité tendent vers zéro, les équations de Navier-Stokes pour un gaz visqueux se transforment en celles d'Euler pour un gaz parfait.

L'existence et l'unicité du passage à la limite pour les solutions correspondantes représentent un problème mathématique fort difficile, car en général on n'arrive pas à trouver une telle suite de solutions.

Les modèles complexes sont décrits par des équations plus compliquées d'ordre plus élevé, les coefficients des dérivées supérieures s'annulant lorsqu'on passe à la limite dans les équations différentielles aux dérivées partielles. Il en est ainsi, par exemple, du passage des équations d'un fluide visqueux à celles d'un fluide parfait.

En passant d'un modèle donné aux solutions discontinues aux modèles compliqués admettant les solutions continues on introduit ceux-ci de diverses façons en utilisant diverses lois de dissipation, diverses lois non linéaires de la viscosité, etc. Il devient alors intéressant d'établir que le passage à la limite ne dépend pas de l'introduction de modèles compliqués auxiliaires.

Solutions discontinues en tant que limites vers lesquelles tendent les solutions continues pour un modèle fixé. Dans le cadre d'un modèle fixé de tels problèmes se résolvent assez facilement au cas des systèmes spéciaux d'équations qui admettent une suite de solutions continues tendant vers un mouvement discontinu limite donné. Il en est ainsi pour certains systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles. Notons toutefois que même pour des systèmes d'équations linéaires ce n'est pas toujours la règle. Cette circonstance est liée au fait que les mouvements discontinus sont généralement irréversibles et s'accompagnent de pertes finies de l'énergie mécanique même quand les mouvements continus sont réversibles.

Ainsi par exemple, dans le cas des équations non linéaires de la dynamique des gaz décrivant les transformations adiabatiques il n'existe pas de suite des solutions continues tendant à la limite vers une solution discontinue adiabatique donnée irréversible.

Solutions discontinues en tant que limites vers lesquelles tendent les solutions continues au cas des actions extérieures convenablement choisies. Voici une autre voie permettant d'obtenir les mouvements discontinus limites et les conditions correspondantes aux discontinuités. On peut envisager des suites des mouvements continus pour un système donné d'équations où l'on introduit de façon convenable, dans les couches minces à variations brusques mais continues des caractéristiques du mouvement, des forces massiques

extérieures, des apports de chaleur extérieure et d'autres espèces d'énergie. Ensuite on effectue des passages à la limite tels que les caractéristiques globales des actions extérieures soit tendent vers zéro, soit vers une valeur donnée selon les propriétés de la discontinuité découlant de la nature du problème étudié (la surface portante en aérodynamique, la surface de dégagement de chaleur lors de la combustion dans une couche mince ou au cours d'une réaction chimique, etc.).

Ainsi donc, en s'appuyant sur les équations des processus d'un modèle donné ou sur des systèmes d'équations compliquées des modèles « approchés » ou, enfin, en introduisant des actions extérieures artificielles on peut toujours introduire à l'aide des hypothèses complémentaires, explicites ou implicites, des mouvements aux discontinuités comme des limites vers lesquelles tendent les mouvements continus et obtenir les conditions aux discontinuités.

Utilité des solutions discontinues. Afin d'illustrer l'importance des questions portant sur les corrélations entre les solutions continues et discontinues imaginons un problème exotique sur le mouvement, dans les mains d'un hôte gesticulant, d'un système mécanique constitué d'un bocal, du vin et de morceaux de glace dans le vin. Les parois du bocal et les surfaces de séparation entre le vin et la glace peuvent être regardées comme des surfaces de discontinuité de la densité de la substance. Dans ce cas, même si l'on veut détailler le problème dans le cadre de la mécanique des milieux continus, il paraît peu utile d'introduire les couches minces à variation continue de la densité, bien que de telles approches ne soient pas à rejeter.

Dans l'exemple ci-dessus comme dans beaucoup d'autres cas « pratiquement plus importants » (le problème du bocal de vin est analogue au problème actuel du mouvement du combustible et des gaz remplissant les réservoirs d'une fusée en vol cosmique), les solutions continues sont d'une importance purement théorique, fournissant divers critères et relations supplémentaires sur les discontinuités ou servant de base pour évaluer le côté pratique des solutions discontinues effectivement obtenues. Si l'on restait dans le cadre des théories compliquées introduisant des couches minces avec les variations brusques mais continues des paramètres du mouvement et de l'état, on ne serait pas arrivé à résoudre nombre de problèmes, résolus quand même en ayant fait recours à des surfaces de discontinuité au sein et sur les frontières du milieu continu.

Rôle de lois intégrales dans la définition d'un modèle. Les passages à la limite s'avèrent inutiles quand les équations physiques fondamentales sont écrites sous forme intégrale où les fonctions cherchées ne sont pas au fond censées d'être continues. La forme intégrale des

lois physiques est pleinement équivalente à la forme différentielle pour des processus continus, étant plus générale pour des processus discontinus.

Cependant, même en utilisant la forme intégrale des lois de mouvement et d'état du milieu pour l'établissement des conditions aux discontinuités, il est impossible de se passer d'hypothèses supplémentaires permettant, en particulier, d'élargir le cadre des modèles réversibles ou irréversibles, d'introduire l'effet d'augmentation de l'entropie dans les particules traversant les surfaces de fortes discontinuités.

Conditions supplémentaires aux discontinuités. Il faut ajouter à ce qui vient d'être dit les remarques sur la stabilité des fortes discontinuités. Il est des cas où les fortes discontinuités satisfont à toutes les conditions établies plus bas, y compris celle de l'accroissement de l'entropie. En même temps, il y a des discontinuités qui ne peuvent pas se réaliser à cause de leur instabilité relevant de la forme du saut et des propriétés du système d'équations différentielles décrivant le mouvement continu des deux côtés du saut.

Il est à retenir également qu'en introduisant des discontinuités physiquement admissibles (stables et satisfaisant aux relations universelles de la mécanique et de la thermodynamique) dans certains problèmes il y a lieu d'y établir, pour assurer l'unicité et la concordance avec la réalité des solutions cherchées, des relations complémentaires de nature physique.

Actuellement, les conditions de stabilité des sauts et les relations physiques complémentaires font l'objet de l'hydrodynamique magnétique *) et de la théorie mathématique générale des modèles compliqués des milieux continus **). On n'a pas à traiter ces questions dans la théorie des sauts dans les modèles du gaz parfait.

Solution des problèmes dans la classe des fonctions lisses par morceaux. Lorsqu'on a à résoudre les équations données sous forme intégrale dans la classe des fonctions lisses par morceaux, les solutions discontinues tenant compte de l'accroissement supplémentaire à déterminer de l'entropie aux discontinuités et d'autres conditions supplémentaires sont obtenues, en général, automatiquement à partir de la position du problème.

La construction des solutions lisses par morceaux pour les systèmes d'équations différentielles par généralisation de celles-ci à l'aide

*) A. Koulikovski, G. Lioubimov, *Sur les ondes de choc magnétohydrodynamiques ionisant le gaz* (en russe). DAN SSSR, v. 129, n° 1, 1958. A. Koulikovski, A. Barmine, *Sur les ondes de choc ionisant le gaz dans un champ électromagnétique* (en russe). DAN SSSR, v. 178, n° 1, 1968.

**) A. Koulikovski, *Sur les surfaces de discontinuité séparant les milieux parfaits à propriétés différentes. Les ondes de recombinaison dans l'hydrodynamique magnétique* (en russe). PMM n° 6, 1968.

des relations intégrales correspondantes conduit à la théorie des solutions généralisées développée pour les équations linéaires dans la théorie générale des équations différentielles de la physique mathématique.

La théorie des solutions lisses par morceaux peut être établie et développée de façon naturelle lorsque les problèmes physiques et mécaniques sont formulés à l'aide des équations aux variations (voir supplément II, p. 504).

Faibles et fortes discontinuités. Il est d'usage de distinguer les surfaces à faible et à forte discontinuité. Les surfaces sur lesquelles les fonctions cherchées sont continues, mais certaines de leurs dérivées par rapport aux coordonnées et au temps subissent les discontinuités, sont appelées surfaces à faibles discontinuités; lorsque ce sont les fonctions cherchées elles-mêmes qui subissent les discontinuités à la traversée d'une surface, celle-ci est appelée surface à forte discontinuité.

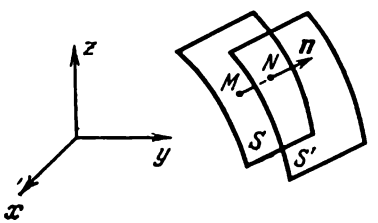


Fig. 45. Sur la définition de la vitesse des points d'une surface mobile

Plus bas on étudiera les conditions aux surfaces à forte discontinuité. On introduit de telles surfaces soit comme des surfaces données dont les lois du mouvement sont données sous forme de liaisons extérieures, soit comme porteuses d'actions extérieures, données ou cherchées, soit comme des surfaces inconnues sans actions extérieures dont la forme et le mouvement ne sont pas connus au préalable et doivent être trouvés au cours de la résolution du problème.

Vitesse des points de la surface de discontinuité. Soit une surface mobile S d'équation

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{4.1}$$

En se déplaçant, la surface S occupe aux instants différents t et $t + \Delta t$ des positions différentes S et S' (fig. 45).

Prenons sur S à l'instant t un certain point M et supposons qu'au point M existe une normale déterminée à S *). Dirigeons le vecteur unitaire de la normale $\boldsymbol{n}$ au point M à la surface S du côté du vecteur $\overline{MN}$, le point N étant celui d'intersection de la surface déplacée S' avec la normale à S au point M.

*) Une normale déterminée aux points de la surface S existe lorsque le vecteur grad f est défini univoquement en tout point de S ; plus loin on omet de considérer les surfaces S avec les cassures et autres singularités.

Le signe de la fonction $f(x, y, z, t)$ est fourni par la condition

$$f(M, t) = 0, \quad f(N, t) > 0, \quad \text{il en découle alors } \boldsymbol{n} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}. \tag{4.2}$$

On appelle vitesse de déplacement au point M dans l'espace de la surface S le vecteur $\mathcal{D}$ normal à S et défini comme la limite suivante:

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{n} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MN}{\Delta t}. \tag{4.3}$$

Si l'équation (4.1) de la surface S est connue, on calcule aisément le vecteur $\mathcal{D}$. En effet, en désignant par

$$n_x = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad n_y = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad n_z = \frac{1}{|\operatorname{grad} f|} \frac{\partial f}{\partial z}$$

les composantes du vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ on peut écrire

$$f(x + MNn_x, y + MNn_y, z + MNn_z, t + \Delta t) = 0.$$

D'où il vient, aux petits d'ordre supérieur près, que

$$MN\left(\frac{\partial f}{\partial x} n_x + \frac{\partial f}{\partial y} n_y + \frac{\partial f}{\partial z} n_z\right) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = 0$$

ou

$$MN\,|\operatorname{grad} f| + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = 0.$$

En exploitant ceci et en vertu de la définition (4.3) on trouve

$$\mathcal{D} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\operatorname{grad} f|} \boldsymbol{n}. \tag{4.4}$$

Il est évident que $\mathcal{D} = 0$ en tout point M de S si la fonction f de l'équation (4.1) ne dépend pas du temps.

Le vecteur vitesse $\mathcal{D}$ dépend du choix du repère si la transformation de coordonnées conduit aux repères se déplaçant différemment.

On peut indiquer pour chaque point M de la surface S son référentiel « propre » K^*, où la vitesse $\mathcal{D}$ du point M à un instant actuel s'annule. Ici le mot « propre » est mis entre guillemets, car plus haut nous avons défini le système de coordonnées propre comme un système inertial, où la vitesse d'un point *du milieu* est nulle. Dans ce sens, en s'approchant de la surface de discontinuité des vitesses S des côtés différents on obtient des systèmes propres différents vu que les vitesses des points du milieu de part et d'autre de la surface S sont différentes.

Choix d'un système de coordonnées. Essayons d'établir maintenant les conditions à la surface de forte discontinuité. Supposons qu'en traversant la surface lisse S (ayant des normales déterminées) certaines caractéristiques d'état et du mouvement du milieu subissent des discontinuités. Prenons sur S un point (arbitraire) M. Toutes les équations de la physique en général — mécaniques, thermodynamiques, électrodynamiques — conservant leur forme dans tout référentiel inertial, choisissons, pour établir les conditions au point M, en tant que système de référence le référentiel « propre » K^* où la vitesse $\mathcal{D}$ au point donné de la surface à un instant donné est nulle, $\mathcal{D} = 0$.

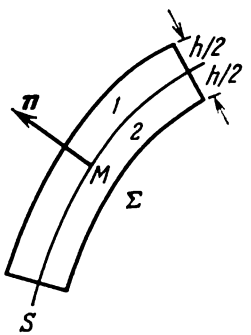


Fig. 46. Schéma de la surface de discontinuité S et de la surface fermée Σ

Volume V tendant vers la surface de discontinuité. Isolons une portion de la surface de discontinuité S et introduisons une surface fermée Σ comme frontière d'un volume obtenu de la façon suivante. Menons en chaque point de la partie isolée de S une normale sur laquelle portons de part et d'autre de S des segments longs de $h/2$, où h est une très petite longueur constante. L'ensemble de tels segments issus de tous les points de la portion considérée de S forme, à l'instant actuel, le volume correspondant V limité par la surface Σ (fig. 46).

Considérons maintenant dans le référentiel choisi K^* deux volumes : l'un V défini plus haut et pris comme immobile et l'autre V^* mobile, substantiel, lié aux points du milieu matériel. A l'instant t les deux volumes coïncident. A l'instant suivant $t + dt$ le volume V^* se déplace relativement à sa position V à l'instant t. La surface de discontinuité S se déplace elle aussi à l'intérieur du volume V mais le point considéré M ne change pas de position au bout du temps infinitésimal dt *), sa vitesse dans le référentiel K^* à l'instant t étant nulle.

Par définition, le volume V est immobile dans le référentiel K^*, le volume V^*, en général, mobile sauf le cas où les points du milieu sur la surface Σ dans le référentiel K^* sont immobiles ou lorsque les composantes normales de leurs vitesses sont nulles sur Σ.

---

*) En relativité restreinte, l'élément de temps dt doit être rapporté au référentiel K^*, en mécanique newtonienne l'élément dt est indépendant du choix du référentiel inertial. Dans ce qui suit tous les raisonnements et, en particulier, la règle de la composition des vitesses se rapportent à la mécanique newtonienne.

Il découle de la formule (8.15), ch. II, que pour toute fonction intégrable $A(x, y, z, t)$ lisse par morceaux a lieu, dans le référentiel K^*, l'égalité suivante:

$$\frac{d}{dt}\int_{V^*} A\,d\tau = \frac{d}{dt}\int_{V} A\,d\tau + \int_{\Sigma} Av_n\,d\sigma, \tag{4.5}$$

v_n étant la projection de la vitesse des points du milieu relativement à K^* sur la normale extérieure à Σ.

Limite vers laquelle tend la dérivée de l'intégrale de volume fluide lorsque celui-ci tend vers un point de la surface de discontinuité. Si la surface de discontinuité S est immobile à l'intérieur du volume V, alors la dérivée de l'intégrale étendue au volume V immobile dans le référentiel K^* s'écrit

$$I = \frac{d}{dt}\int_{V} A\,d\tau = h\frac{d}{dt}\int_{S} A^*\,d\sigma,$$

où A^* est la valeur moyenne de la fonction A sur un segment correspondant de longueur h perpendiculaire à la surface S.

Il est évident que si la surface S est immobile et la quantité A ne dépend pas explicitement du temps, alors $I = 0$. Pour un mouvement non stationnaire, lorsque la fonction A est finie et continue avec ses dérivées par rapport aux coordonnées et au temps de part et d'autre de la surface immobile S (cette dernière pouvant contenir des discontinuités), la quantité I est une fonction continue de t se réduisant à zéro quand h tend vers zéro.

Le choix du référentiel K^* est dicté par la condition $\mathscr{D} = 0$ au point M. Comme en des points voisins de M de la surface S la vitesse $\mathscr{D} \neq 0$, la surface S est, d'une façon générale, une surface mobile à l'intérieur de V. Pour un élément infinitésimal de S entourant le point M, les vitesses $\mathscr{D}$ des points voisins étant infiniment petites, on a lorsque le volume V tend vers le point M

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ h\to 0}} \frac{1}{\Delta\sigma}\frac{d}{dt}\int_{V} A\,d\tau = 0, \tag{4.6}$$

$\Delta\sigma$ étant l'élément de S tendant vers le point M.

Affectons de l'indice 1 les caractéristiques du mouvement et de l'état d'une face de la surface S, et de l'indice 2 celles de l'autre face. Numérotons les faces de S de telle sorte que le passage de la face 2 à la face 1 s'effectue dans le sens de la normale.

En passant à la limite lorsque $h \to 0$, $\Delta\sigma \to 0$, on obtient de (4.5) l'égalité cinématique

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ h\to 0}} \frac{1}{\Delta\sigma}\frac{d}{dt}\int_{V^*} A\,d\tau = A_1 v_{n1} - A_2 v_{n2}, \tag{4.7}$$

v_{n1} et v_{n2} étant les projections des vitesses des points du milieu des deux faces de la surface S sur une même direction positive de la normale à S.

En s'aidant de l'égalité (4.7) on peut écrire dans le référentiel K^* toutes les conditions dynamiques et thermodynamiques universelles aux fortes discontinuités pour les milieux matériels. Viennent ensuite les conditions aux sauts pour un champ électromagnétique.

Equations universelles de la mécanique et de la thermodynamique. Pour plus de commodité écrivons d'abord sous forme intégrale les équations fondamentales obtenues précédemment.

1. L'équation de continuité (voir équation (1.2) ch. III)

$$\frac{d}{dt}\int_{V^*} \rho\, d\tau = 0. \tag{4.8}$$

2) L'équation des impulsions (voir équation (2.2) ch. III)

$$\frac{d}{dt}\int_{V^*} \rho \boldsymbol{v}\, d\tau = \int_V \boldsymbol{F}\rho\, d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n\, d\sigma. \tag{4.9}$$

3. L'équation des moments (voir équation (3.4) ch. III)

$$\frac{d}{dt}\int_{V^*} \boldsymbol{r}\times \boldsymbol{v}\rho\, d\tau + \frac{d}{dt}\int_{V^*} \rho \boldsymbol{k}\, d\tau =$$
$$= \int_V \boldsymbol{h}\rho\, d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{Q}_n\, d\sigma + \int_V \boldsymbol{r}\times \boldsymbol{F}\rho\, d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{r}\times \boldsymbol{p}_n\, d\sigma. \tag{4.10}$$

4. L'équation de l'énergie (voir équation (8.1) ch. V)

$$\frac{d}{dt}\int_{V^*} \rho\left(\frac{v^2}{2}+U\right) d\tau =$$
$$= \int_V \rho \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{v}\, d\tau + \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n\cdot \boldsymbol{v}\, d\sigma - \int_\Sigma q_n^*\, d\sigma + \int_V \frac{dq^*_{\text{mass}}}{dt}\rho\, d\tau. \tag{4.11}$$

Ici q_n^* est l'apport extérieur d'énergie spécifique supplémentaire tant calorifique que d'autre nature (y compris le travail des moments surfaciques, etc.) par la surface frontière Σ, dq^*_{mass}/dt est l'apport total en unité de temps d'énergie spécifique supplémentaire provenant des sources massiques. A l'aide de ces deux quantités on tient compte de l'apport d'énergie supplémentaire qui n'est pas pris en considération dans les deux premiers termes de (4.11) traduisant l'apport d'énergie mécanique égal au travail des forces massiques et surfaciques macroscopiques présentes dans l'équation des impulsions.

Ici et plus loin on ne considère que des modèles usuels pour lesquels l'énergie interne U et l'entropie S sont des fonctions additives de la masse.

5. L'équation de l'entropie découlant du second principe de la thermodynamique peut s'écrire ainsi

$$\frac{dS}{dt}=\frac{d}{dt}\int\limits_{V^*} s\rho\, d\tau=\int\limits_{V}\frac{\rho}{T}\left(\frac{dq^{(e)}}{dt}+\frac{dq'}{dt}\right)d\tau,\qquad \frac{dq'}{dt}\geqslant 0. \quad (4.12)$$

Pour les modèles à transformations réversibles dans le domaine des mouvements continus on a $dq' = 0$. Toutefois, comme il a été mentionné plus haut, dans le cas de fortes discontinuités accompagnées de brusques variations des caractéristiques du mouvement l'hypothèse de réversibilité de ce phénomène contredit le second principe de la thermodynamique traduit par l'équation (4.12). Il n'est donc pas possible, dans le cas général, d'admettre au préalable qu'à la traversée de la surface de discontinuité par les particules du milieu $dq' = 0$.

Pour $dq^{(e)}$ donnés et, en particulier, pour les transformations adiabatiques on peut utiliser l'équation (4.12) pour calculer le second membre de (4.12) représentant la somme de deux intégrales de volume ayant des valeurs finies lorsque V tend vers zéro.

Appliquons maintenant les équations (4.8) à (4.12) au volume V^* défini plus haut contenant la surface de discontinuité S et servons-nous au point M de S de la formule (4.7) ayant divisé au préalable par l'élément $\Delta\sigma$ de la surface S les deux membres des égalités (4.8) à (4.12).

Densités surfaciques d'actions extérieures sur la surface de discontinuité. Faisons les hypothèses suivantes relativement aux conditions à la surface de discontinuité.

1. Toutes les fonctions sous le signe de l'intégrale dans les intégrales de surface étendues à Σ pour Σ tendant vers S admettent des valeurs finies mais, en général, différentes de part et d'autre de la surface S.

2. Lorsque $h \to 0$, les égalités limites suivantes ont lieu :

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{V}\rho \boldsymbol{F}\, d\tau=\int\limits_{S}\boldsymbol{R}\, d\sigma;$$

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{V}\rho \boldsymbol{h}\, d\tau=\int\limits_{S}\mathfrak{M}\, d\sigma,$$

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{V}\left(\rho \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}+\rho\frac{dq^*_{\text{mass}}}{dt}\right)d\tau=\int\limits_{S}W\, d\sigma,$$

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{V}\frac{\rho}{T}\left(\frac{dq^{(e)}}{dt}+\frac{dq'}{dt}\right)d\tau=\int\limits_{S}\Omega\, d\sigma,$$

$\boldsymbol{R}$, $\mathfrak{M}$ et W étant les densités surfaciques de distribution sur S respectivement des forces, moments, flux d'énergie extérieurs au milieu, Ω la densité de distribution sur S de la variation de l'entropie due aux apports de chaleur extérieure et à l'accroissement irréversible de l'entropie.

Il est évident que si $\rho\boldsymbol{F}$, $\rho\boldsymbol{h}$ et $\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} + \rho\,\frac{dq^*_{\text{mass}}}{dt}$ sont finis dans le volume V, alors

$$\boldsymbol{R} = 0, \quad \mathfrak{M} = 0, \quad W = 0. \tag{4.13}$$

Il en est ainsi, en particulier, pour les forces massiques extérieures représentées par les forces de pesanteur ou d'inertie dans un mouvement relatif et en général pour tout champ continu des forces massiques, notamment pour les forces pondéromotrices, les moments et les flux d'énergie occasionnés par le champ électromagnétique (voir les formules (5.14), (5.15) et (5.16), ch. VI) lorsque celui-ci est continu sur la surface S.

Dans le cas important où la surface S représente non seulement la surface de discontinuité des caractéristiques mécaniques mais aussi de celles du champ électromagnétique, les grandeurs $\boldsymbol{R}$ et W diffèrent généralement de zéro. Nous donnerons au paragraphe suivant les formules pour $\boldsymbol{R}$ et W exprimés par les valeurs des composantes des vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ de part et d'autre de la surface S.

Aux discontinuités simulant les surfaces portantes des ailes d'avion ou aux discontinuités du type de disques actifs simulant les hélices d'avion ou de navire créant la force de traction les grandeurs $\boldsymbol{R}$, W et, éventuellement, $\mathfrak{M}$ diffèrent de zéro.

Aux discontinuités surgissant au sein des flux de gaz en aérodynamique, en théorie d'explosion et dans nombre d'autres cas on a $\boldsymbol{R} = \mathfrak{M} = W = 0$ (mais $\Omega \neq 0$). Le fait que les actions extérieures sont généralement nulles aux discontinuités est exploité comme condition typique dans les applications de la mécanique des milieux continus.

Conditions aux surfaces de discontinuité dans un référentiel « propre ». Il découle du principe de conservation des masses compte tenu de l'égalité (4.7) que

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}, \tag{4.14}$$

de l'équation des impulsions

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{p}_{n1} - \rho_1 \boldsymbol{v}_1 v_{n1} = \boldsymbol{p}_{n2} - \rho_2 \boldsymbol{v}_2 v_{n2}, \tag{4.15}$$

de l'équation des moments compte tenu de (4.15)

$$\mathfrak{M} + \boldsymbol{Q}_{n1} - \rho_1 \boldsymbol{k}_1 v_{n1} = \boldsymbol{Q}_{n2} - \rho_2 \boldsymbol{k}_2 v_{n2}, \tag{4.16}$$

de l'équation de l'énergie

$$W + \boldsymbol{p}_{n1} \cdot \boldsymbol{v}_1 - \rho_1 \left(\frac{v_1^2}{2} + U_1\right) v_{n1} - q_{n1}^* =$$

$$= \boldsymbol{p}_{n2} \cdot \boldsymbol{v}_2 - \rho_2 \left(\frac{v_2^2}{2} + U_2\right) v_{n2} - q_{n2}^* \qquad (4.17)$$

et, enfin, de l'équation de l'entropie

$$\rho_1 v_{n1} s_1 - \rho_2 v_{n2} s_2 = \Omega. \qquad (4.18)$$

Les transformations étant adiabatiques ($dq^{(c)} = 0$), la valeur de Ω (lorsque $\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2} \neq 0$) est, en général, différente de zéro. L'irréversibilité faisant que $dq' \geqslant 0$, alors

$$\Omega = \rho_1 v_{n1} (s_1 - s_2) \geqslant 0. \qquad (4.19)$$

Pour les transformations adiabatiques l'égalité (4.18) peut être regardée comme la définition de la grandeur Ω, cette dernière devant être non négative pour les processus effectivement réalisables.

Les valeurs des sauts de toutes les grandeurs entrant dans les relations (4.15), (4.16) et (4.17) étant données ou trouvées comme solutions du problème, celles-ci peuvent servir à calculer les actions extérieures $\boldsymbol{R}$, $\mathfrak{M}$ et W.

Instabilité d'une discontinuité arbitraire. Lorsque les égalités (4.13) sont remplies, il s'ensuit des conditions obtenues que les discontinuités subies par les différentes caractéristiques du mouvement et de l'état ne peuvent pas être arbitraires. Les égalités (4.14) à (4.18) peuvent ne pas être satisfaites si les conditions initiales sont données arbitrairement. Cela signifie qu'aux instants suivants la discontinuité initiale donnée peut ne plus exister, qu'elle sera décomposée généralement en plusieurs discontinuités dont certaines peuvent être fortes, certaines faibles. Une situation semblable apparaît lors d'une collision de deux ou plusieurs discontinuités.

Nous n'aborderons pas ici le problème pratique important de la décomposition d'une discontinuité arbitraire.

La forme des conditions (4.14) à (4.19) est bien commode pour les applications lorsque les discontinuités sont immobiles, en particulier, pour les mouvements stationnaires du milieu.

Conditions aux surfaces de discontinuité dans un référentiel quelconque. Lorsque le mouvement est non stationnaire les vitesses $\mathcal{D}$ des surfaces de discontinuité peuvent différer par valeur et par sens dans les référentiels différents. D'où l'intérêt d'établir la forme de ces relations dans un système de référence arbitraire non lié au mouvement des points de la surface de discontinuité.

Pour obtenir les conditions générales aux différents points de la surface S dans un même référentiel il suffit de remplacer, dans toutes

les équations, le vecteur vitesse v^* du mouvement relativement au système K^* par le vecteur vitesse $v = v^* + \mathcal{D}$ ($v^* = v - \mathcal{D}$) relativement au référentiel fixé K.

En exploitant l'équation de conservation des masses et celle des impulsions on peut présenter les conditions correspondantes sous la forme

$$\rho_1 (\mathcal{D} - v_{n1}) = \rho_2 (\mathcal{D} - v_{n2}), \tag{4.20}$$

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{p}_{n1} + \rho_1 \boldsymbol{v}_1 (\mathcal{D} - v_{n1}) = \boldsymbol{p}_{n2} + \rho_2 \boldsymbol{v}_2 (\mathcal{D} - v_{n2}), \tag{4.21}$$

$$W_1 + \boldsymbol{p}_{n1} \cdot \boldsymbol{v}_1 - q^*_{n1} + \rho_1 (\mathcal{D} - v_{n1}) \left(\frac{v_1^2}{2} + U_1\right) =$$
$$= \boldsymbol{p}_{n2} \cdot \boldsymbol{v}_2 - q^*_{n2} + \rho_2 (\mathcal{D} - v_{n2}) \left(\frac{v_2^2}{2} + U_2\right), \tag{4.22}$$

$$\rho_1 (v_{n1} - \mathcal{D}) (s_1 - s_2) = \Omega. \tag{4.23}$$

Dans (4.22) la quantité $W_1(v)$ est égale à $W(v^*) + \boldsymbol{R} \cdot \mathcal{D}$.

Les relations aux discontinuités établies sont valables dans tout référentiel (inertial ou non inertial) et en tous les points de la surface de discontinuité.

Nous n'avons pas écrit les conditions pour les moments, puisque dans ce qui suit on n'étudiera que les modèles pour lesquels $\mathfrak{M} = Q_n = \boldsymbol{k} = 0$ en tous les points du domaine du mouvement.

Vitesse de la surface de discontinuité par rapport au milieu. Il est aisé de voir que les vitesses $\mathcal{D} - v_{n1}$ et $\mathcal{D} - v_{n2}$ ne sont autres que celles de la surface de discontinuité par rapport aux particules matérielles de part et d'autre de la discontinuité.

Discontinuité tangentielle. Si $\mathcal{D} - v_{n1} = 0$ et $\mathcal{D} - v_{n2} = 0$, les particules du milieu ne passent pas d'un côté de la discontinuité à l'autre et $v_{n1} = v_{n2}$. Dans ce cas sont possibles, en général, une discontinuité de la composante tangentielle de la vitesse de part et d'autre de la discontinuité et une discontinuité arbitraire des densités ($\rho_1 \neq \rho_2$). Cette discontinuité est dite tangentielle. Dans le cas d'une discontinuité tangentielle les conditions (4.21), (4.22) et (4.23) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{p}_{n2} - \boldsymbol{p}_{n1}, \\ W_1 &= q^*_{n1} - q^*_{n2} - \boldsymbol{p}_{n1} \cdot \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{p}_{n2} \cdot \boldsymbol{v}_2, \\ \Omega &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

Par conséquent, pour $\boldsymbol{R} = 0$ les contraintes sur un élément de surface d'une discontinuité tangentielle sont continues et le travail

des forces de contraintes sur la différence des vitesses tangentielles (par rapport à la discontinuité) pour $W = 0$ est égal à la différence des courants d'énergie q_n^* à travers la discontinuité. Dans le cas d'un fluide parfait les conditions (4.24) pour $\boldsymbol{R} = 0$ et $W = 0$ deviennent les conditions de continuité des pressions et de la composante normale du vecteur courant d'énergie sur la surface de la discontinuité tangentielle, sur la surface de contact de deux corps différents, par exemple.

Sauts de compression et sauts de détente. Lorsque $v_{n2} \neq v_{n1}$ les caractéristiques des particules qui passent d'un côté à l'autre varient par saut (par choc).

Il est facile de se convaincre que la différence $v_{n2} - v_{n1} \neq 0$ ne dépend ni du choix du référentiel ni de la numérotation des faces de S. En effet, le changement de l'ordre de numérotation entraîne celui du sens de la normale, c'est-à-dire il y a permutation des composantes normales de la vitesse avec intervertissement de leurs signes.

Convenons de numéroter les faces de S de façon que le milieu traverse S de la face 1 à la face 2. Si l'on utilise un référentiel où $\boldsymbol{v}_1 = 0$, on a évidemment dans ce système d'axes $\mathscr{D} > 0$. On obtient donc que la surface S se déplace dans un milieu immobile affecté de l'indice 1.

Il est évident que si $v_{n2} - v_{n1} > 0$, on aura dans les hypothèses faites $v_{n2} > 0$, ce qui veut dire que le milieu en arrière du saut se heurte contre le milieu immobile en avant du saut. Si la loi de conservation des masses (4.20) est vérifiée sur le saut, pour de tels sauts $\rho_2 > \rho_1$, c'est-à-dire qu'en arrière du saut la densité du milieu augmente. Les sauts satisfaisant à $v_{n2} - v_{n1} > 0$ sont dits sauts de compression.

Si $v_{n2} - v_{n1} < 0$, la composante normale à S de la vitesse du milieu en arrière du saut est dirigée dans le sens opposé à celui de la vitesse de déplacement du saut dans le milieu immobile. Cela signifie que dans le milieu en arrière du saut se crée une dépression ($\rho_2 < \rho_1$). De tels sauts sont dits sauts de détente.

Les conditions aux discontinuités établies dans ce paragraphe peuvent servir à obtenir les conditions aux frontières pour la résolution des équations différentielles dans le domaine des mouvements continus d'un milieu.

Dans certains cas on peut donner les propriétés, le mouvement et l'état des particules matérielles d'un côté de la surface de discontinuité, les caractéristiques correspondantes de l'autre côté devant satisfaire aux relations établies.

En particulier, c'est ainsi qu'on peut obtenir les conditions aux frontières libres d'un liquide ou aux frontières des corps solides, etc.

§ 5. Fortes discontinuités dans un champ électromagnétique

Envisageons un champ électromagnétique en interaction avec un milieu matériel et supposons que dans le champ il y ait une surface de discontinuité S. Etablissons les relations auxquelles doivent satisfaire les valeurs des caractéristiques électromagnétiques de part et d'autre de la surface S. Pour les obtenir nous partirons des équations de Maxwell sous forme intégrale étendues au cas des champs électromagnétiques présentant des discontinuités. Pour plus de commodité recopions ces équations (voir ch. VI, (5.5)). Dans tout référentiel inertial on a

$$\int_{\Sigma} B_n \, d\sigma = 0, \qquad \int_{\Sigma} D_n \, d\sigma = 4\pi \int_{V} \rho_c \, d\tau, \tag{5.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_{\mathscr{L}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_1} B_n \, d\sigma, \\ \int_{\mathscr{L}} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} &= \frac{4\pi}{c} \int_{\Sigma_1} j_n \, d\sigma + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma_1} D_n \, d\sigma \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

et, comme conséquence de ces équations, le principe de conservation de la charge

$$-\frac{d}{dt} \int_{V} \rho_c \, d\tau = \int_{\Sigma} j_n \, d\sigma. \tag{5.3}$$

Ici Σ est une surface fermée délimitant un volume immobile V, Σ_1 une surface ouverte immobile s'appuyant sur le contour $\mathscr{L}$.

Soit M un point quelconque de la surface de discontinuité S et K^* un référentiel inertial dans lequel la vitesse $\mathscr{V}$ du point M de S est nulle (fig. 47). Le référentiel K^* est un référentiel « propre » pour le point M, les points voisins pouvant avoir dans le référentiel K^* des vitesses non nulles. On admet que les équations (5.1) et (5.2) sont écrites dans le référentiel K^*. Le volume V utilisé dans les équations (5.1) et (5.3) est intérieur à la surface Σ et défini comme au § 4. Dans les équations (5.2) prenons pour surface Σ_1 et contour $\mathscr{L}$ respectivement la section du volume V et de la surface Σ par un plan passant par la normale $\boldsymbol{n}$ et la tangente $\boldsymbol{\tau}$ à la surface S au point M. Le sens du vecteur $\boldsymbol{\tau}$ tangent à la surface S peut être arbitraire. Par hypothèse, les vecteurs $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ et le vecteur $\boldsymbol{n}^*$ normal à Σ_1 constituent un trièdre droit, c'est-à-dire que $\boldsymbol{n}^* = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\tau}$.

Conditions aux surfaces de discontinuité. Considérons une surface de discontinuité S telle que les vecteurs $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ sont finis et continus de part et d'autre de S, mais peuvent subir des discontinuités en traversant S. Quant à la distribution des charges ρ_c et des courants $\boldsymbol{j}$, on suppose l'existence éventuelle sur S de charges

surfaciques γ et de courants surfaciques $\boldsymbol{i}$ (vecteurs contenus dans le plan tangent à la surface S) définis au point M par les passages à la limite suivants:

$$\lim_{V\to M} \frac{1}{\Delta\sigma} \int\limits_{V\approx h\Delta\sigma} \rho_e \, d\tau = \gamma(M), \tag{5.4}$$

$$\lim_{\substack{\Delta\sigma\to M\\ h\to 0}} \frac{h}{\Delta\sigma} \int\limits_{\Sigma_1\approx\Delta\sigma} \boldsymbol{j}_\tau \, d\sigma = \boldsymbol{i}(M), \tag{5.5}$$

où $\Delta\sigma \to M$ est un élément de S ou de Σ_1 tendant vers le point M, $\boldsymbol{j}_\tau$ la composante vectorielle de la densité volumique du courant parallèle au plan tangent à S en point M.

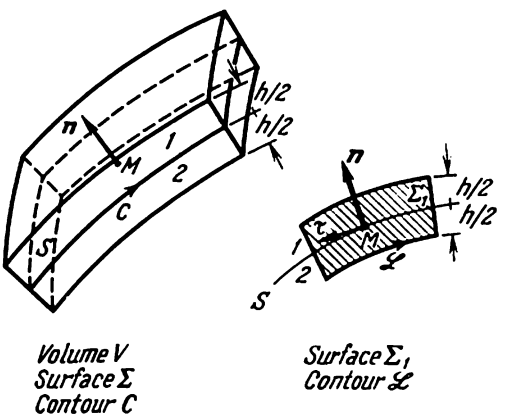


Fig. 47. Domaines d'intégration pour la déduction des conditions à la surface de discontinuité

En procédant de la même façon comme au § 4 on obtient des équations (5.1) et (5.3) compte tenu de (5.4)

$$B_{n1} - B_{n2} = 0, \qquad D_{n1} - D_{n2} = 4\pi\gamma \tag{5.6}$$

et

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} + j_{n1} - j_{n2} = -\frac{\partial\gamma}{\partial t}, \tag{5.7}$$

où

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} = \lim_{C\to M} \frac{1}{\Delta\sigma} \int\limits_C i_n \, dl = \nabla_1 i^1 + \nabla_2 i^2,$$

C étant un contour fermé tendant vers le point M sur la surface de discontinuité S; i_n la composante normale du vecteur $\boldsymbol{i}$ sur le contour C; $\Delta\sigma$ l'aire de l'élément de S s'appuyant sur le contour C;

div $\boldsymbol{i}$ la divergence bidimensionnelle du vecteur $\boldsymbol{i}$ définie sur la surface S; i^1 et i^2 les composantes du vecteur $\boldsymbol{i}$, ∇_k les dérivées covariantes dans un système d'axes sur la surface S.

De façon analogue, en passant à la limite lorsque $h \to 0$ et en faisant tendre l'arc du contour $\mathscr{L}$ vers le point M on obtient des équations (5.2)

$$\begin{gathered} \boldsymbol{E}_{\tau 1} - \boldsymbol{E}_{\tau 2} = 0, \\ \boldsymbol{H}_{\tau 1} - \boldsymbol{H}_{\tau 2} = \frac{4\pi}{c}\, \boldsymbol{i} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\tau}). \end{gathered} \tag{5.8}$$

Il est évident que la dernière égalité peut s'écrire sous forme vectorielle comme suit:

$$\boldsymbol{H}_{\tau 1} - \boldsymbol{H}_{\tau 2} = \frac{4\pi}{c}\, (\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n}), \tag{5.9}$$

où $\boldsymbol{H}_{\tau 1}$ et $\boldsymbol{H}_{\tau 2}$ sont les composantes du vecteur $\boldsymbol{H}$ parallèles au plan tangent à S au point M.

Le système des conditions (5.6) à (5.9) est un système complet de relations à la surface de discontinuité pour les caractéristiques électromagnétiques, compte tenu de la polarisation, de l'aimantation et des courants. Ces relations sont établies dans un référentiel d'inertie K^*, « propre » pour le point M de la surface de discontinuité où sa vitesse $\mathscr{D}$ est nulle.

Compte tenu des formules générales des transformations de Lorentz régissant le passage du référentiel K^* se déplaçant avec la vitesse $\mathscr{D}$ relativement au référentiel d'inertie fixé « immobile » K à ce dernier (voir les formules (3.22), (3.23) ch. VI), on peut récrire les conditions (5.6), (5.8) et (5.9) dans le référentiel K:

$$B_{n1} - B_{n2} = 0, \quad D_{n1} - D_{n2} = 4\pi\gamma^*, \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{E}_{\tau 1} - \boldsymbol{E}_{\tau 2} = \frac{1}{c}\, [(\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) \times \mathscr{D}]_\tau, \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{H}_{\tau 1} - \boldsymbol{H}_{\tau 2} - \frac{1}{c}\, [(\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \times \mathscr{D}]_\tau = \frac{4\pi}{c} \sqrt{1 - \frac{\mathscr{D}^2}{c^2}}\, (\boldsymbol{i}^* \times \boldsymbol{n}). \tag{5.12}$$

Ici $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont la normale et la tangente à la surface de discontinuité S en M. La vitesse $\mathscr{D}$ est calculée dans le référentiel K, elle est dirigée suivant la normale à S. La quantité γ^* et le vecteur $\boldsymbol{i}^*$ sont définis dans le référentiel propre. Quant à la formule (5.7) elle conserve sa forme lorsqu'on néglige les termes de l'ordre de $\mathscr{D}^2/c^2$ pour $\gamma = \gamma^*$ et $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}^*$.

Densités surfaciques des forces pondéromotrices et des courants d'énergie fournis par le champ au milieu sur la surface de discontinuité. Analysons maintenant les formules pour les composantes du vecteur densité surfacique de la force pondéromotrice $\boldsymbol{R}$ et pour la densité

surfacique du courant d'énergie W affluant au milieu sur la surface de discontinuité des caractéristiques électromagnétiques. Dans un référentiel cartésien les composantes de la force volumique *) sont par définition de la forme

$$-\rho F^{\alpha}=\nabla_k S^{\alpha k}=\frac{\partial S^{\alpha 1}}{\partial x^1}+\frac{\partial S^{\alpha 2}}{\partial x^2}+\frac{\partial S^{\alpha 3}}{\partial x}+\frac{\partial S^{\alpha 4}}{\partial t}, \quad \alpha=1,\ 2,\ 3, \tag{5.13}$$

et

$$-F_4=\nabla_k S_4^k=\frac{\partial S_4^1}{\partial x^1}+\frac{\partial S_4^2}{\partial x^2}+\frac{\partial S_4^3}{\partial x^3}+\frac{\partial S_4^4}{\partial t}, \tag{5.14}$$

où S^{ik} sont les composantes du tenseur énergie-impulsion. Multiplions les deux membres des égalités (5.13) et (5.14) par l'élément de volume $d\tau = dx^1\, dx^2\, dx^3$ et intégrons-les dans le volume immobile V dans le référentiel K^* pour le point donné M sur S (voir fig. 47). En appliquant la formule de Gauss-Ostrogradsky il vient

$$\int\limits_V \rho F^{\alpha}\, d\tau=-\int\limits_{\Sigma} S^{\alpha\beta} n_\beta\, d\sigma-\frac{d}{dt}\int\limits_V S^{\alpha 4}\, d\tau, \quad \alpha=1,\ 2,\ 3, \tag{5.15}$$

$$\int\limits_V F_4\, d\tau=-\int\limits_{\Sigma} S_4^{\beta} n_\beta\, d\sigma-\frac{d}{dt}\int\limits_V S_4^4\, d\tau, \tag{5.16}$$

n_β étant les composantes du vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ normal à Σ dans un système de coordonnées cartésiennes tridimensionnel.

Appliquons la formule de Minkowski ((5.11), ch. VI) aux composantes S^{ik} du tenseur énergie-impulsion :

$$S^{ik}=-\frac{1}{4\pi}\left[F_m^{\cdot i} H^{mk}-\frac{1}{4} g^{ik} F_{mn} H^{mn}\right]. \tag{5.17}$$

La matrice pour S^{ik} peut se présenter sous la forme

$$\| S^{ik} \| = \begin{Vmatrix} S^{11} & S^{12} & S^{13} & S^{14} \\ S^{21} & S^{22} & S^{23} & S^{24} \\ S^{31} & S^{32} & S^{33} & S^{34} \\ S^{41} & S^{42} & S^{43} & S^{44} \end{Vmatrix}.$$

Si l'on utilise les définitions matricielles (5.6) et (5.7), ch. VI, des $\| F_{ij} \|$ et $\| H^{ij} \|$ et que l'on tient compte de ce que (voir égale-

*) Ici F^{α} sont les composantes spatiales de la force massique quadridimensionnelle ou les composantes de la force massique tridimensionnelle. La formule (5.12), ch. VI, se rapporte aux composantes de la force volumique.

ment (5.37))

$$\| F_{m\cdot}^{\cdot i} \| = \| F_{mj} g^{ji} \| = \begin{Vmatrix} 0 & -B^3 & B^2 & \frac{1}{c} E_1 \\ B^3 & 0 & -B^1 & \frac{1}{c} E_2 \\ -B^2 & B^1 & 0 & \frac{1}{c} E_3 \\ cE_1 & cE_2 & cE_3 & 0 \end{Vmatrix},$$

on obtient dans les coordonnées cartésiennes les composantes tensorielles S^{ik} exprimées par celles des vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$

$$S^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}\left[E^\alpha D^\beta + H^\alpha B^\beta + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\right], \tag{5.18}$$

où α, $\beta = 1, 2, 3$ et où l'on a pris en considération que $E_\alpha = E^\alpha$ et $D_\beta = D^\beta$ dans un système cartésien tridimensionnel;

$$S^{\alpha 4}\mathfrak{e}_\alpha = \frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}), \quad S_{\cdot 4}^{\alpha\cdot}\mathfrak{e}_\alpha = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}), \tag{5.19}$$

$$S^{4\alpha}\mathfrak{e}_\alpha = \frac{1}{4\pi c}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}), \quad S_{4\cdot}^{\cdot\alpha}\mathfrak{e}_\alpha = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}), \tag{5.20}$$

$$S_{4\cdot}^{\cdot 4} = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}); \tag{5.21}$$

ici $\mathfrak{e}_\alpha$ sont les vecteurs de base d'un système d'axes tridimensionnel.

Soulignons une fois de plus que dans les formules (5.18), (5.19) et (5.20) les composantes S^{ij} du tenseur sont définies dans un système d'axes quadridimensionnel pour lequel on a *)

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + c^2\,dt^2.$$

C'est là une remarque essentielle que l'on ne doit pas perdre de vue lorsqu'on compare les formules du présent ouvrage avec celles rencontrées dans d'autres livres où g_{ij} est défini autrement.

Ainsi donc, les grandeurs sous le signe de l'intégrale dans (5.15) et (5.16) s'expriment par $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D}$, ces derniers étant finis, par hypothèse, sur la surface S et dans le volume V.

En effectuant dans les égalités (5.15) et (5.16) les passages à la limite au point M de la surface de discontinuité S comme indiqué au § 4 on obtient

$$R^\alpha = (S^{\alpha\beta})_2\, n_\beta - (S^{\alpha\beta})_1\, n_\beta \tag{5.22}$$

et

$$W = (S_4^\beta)_2\, n_\beta - (S_4^\beta)_1\, n_\beta. \tag{5.23}$$

*) Voir le renvoi à la page 342.

Les formules (5.22) et (5.23) compte tenu de (5.18) et (5.20) conduisent aux formules suivantes pour R^α et W exprimés au moyen de $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D}$ dans le référentiel K^* pour le point M:

$$R^\alpha = -\frac{1}{4\pi}\left[E^\alpha D_n + H^\alpha B_n - \frac{n^\alpha}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\right]_2 + \\ + \frac{1}{4\pi}\left[E^\alpha D_n + H^\alpha B_n - \frac{n^\alpha}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\right]_1, \quad (5.24)$$

$$W = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{n}. \quad (5.25)$$

Ici $n^\alpha = -g^{\alpha\beta}n_\beta$ sont les composantes contravariantes du vecteur tridimensionnel $\boldsymbol{n}$. Ces expressions peuvent être utilisées dans les relations aux discontinuités (4.14) à (4.17) pour un milieu matériel. Comme, d'après les formules (5.39), ch. VI, les densités volumiques des moments pondéromoteurs sont finies même en présence des discontinuités des $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, les densités surfaciques des moments pondéromoteurs figurant dans les conditions aux discontinuités pour les moments seront évidemment nulles. Les forces pondéromotrices, étant exprimées par les gradients des $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$, peuvent contribuer dans les conditions aux discontinuités.

§ 6. Surfaces de discontinuité au sein des milieux parfaits compressibles

Examinons d'une façon plus détaillée les conditions aux surfaces de fortes discontinuités (et les conséquences qui en découlent) au sein des milieux parfaits compressibles introduits au § 1, ch. IV. Dans ce cas les contraintes intérieures ne peuvent être, par définition, que des pressions: $\boldsymbol{p}_n = -p\boldsymbol{n}$. En outre, on envisagera dans ce paragraphe les surfaces de discontinuité telles qu'aucune action surfacique extérieure ne s'exerce sur le milieu, c'est-à-dire qu'on admettra $\boldsymbol{R} = 0$, $W = 0$; on supposera également $q_n^* = 0$ sur la surface de discontinuité et, en particulier, on ne tiendra pas compte de la conduction thermique du milieu sur le saut.

Conditions à des discontinuités immobiles. Si un milieu se déplace par rapport à un référentiel « propre » K^*, pour un élément donné de la surface de discontinuité S on peut écrire la condition (4.14)

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}. \quad (6.1)$$

On admet par la suite que v_{n1}, composante de la vitesse normale à S, n'est pas nulle, ce qui signifie que les particules passent d'un côté de la surface de discontinuité à l'autre. Alors il découle de (4.15) pour un milieu parfait que

$$\boldsymbol{v}_{\tau 1} = \boldsymbol{v}_{\tau 2}, \quad (6.2)$$

$v_{\tau i}$ étant les composantes vectorielles de v parallèles au plan tangent à S au point M.

Compte tenu de (6.1) et (6.2), l'équation des impulsions (4.15) en projection sur la normale à S donne

$$\rho_1 v_{n1}^2 + p_1 = \rho_2 v_{n2}^2 + p_2. \tag{6.3}$$

L'équation de l'énergie avec (6.1) et (6.2) aura pour expression

$$U_1 + \frac{v_{n1}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} = U_2 + \frac{v_{n2}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2}. \tag{6.4}$$

Enfin, l'égalité (4.18) pour le saut de l'entropie compte tenu de (6.1) fournit

$$\rho_1 v_{n1} (s_1 - s_2) = \Omega. \tag{6.5}$$

Rappelons que les vitesses dans les relations (6.1) à (6.5) sont considérées dans le référentiel K^* où celle du point M de la surface de discontinuité est nulle.

Pour un mouvement stationnaire à discontinuités immobiles on peut admettre que K^* coïncide avec le référentiel principal, « immobile ».

Propagation de la discontinuité par les particules du milieu. On voit de (6.1) que v_{n1} et v_{n2} sont de même signe. Si l'on introduit un référentiel K où la vitesse devant le saut est nulle et $\mathcal{D} > 0$, il devient possible d'exploiter dans ce référentiel K les conditions au saut (6.1) à (6.5) en y posant

$$v_{n1} = -\mathcal{D}, \qquad v_{n2} = v_n - \mathcal{D}$$

et

$$v_{\tau 1} = v_{\tau 2} = 0,$$

où $v_n = v_{n2} - v_{n1}$ est la composante normale à S de la vitesse du milieu par rapport au référentiel K du côté marqué de l'indice 2. Dans ce cas la quantité $\mathcal{D}$ peut être regardée comme vitesse de propagation de la surface de discontinuité par les particules du milieu du côté 1. Dans ce qui suit on comprendra $\mathcal{D}$ justement en ce sens et l'on substituera, pour simplifier les formules, à la densité ρ le volume spécifique $V = 1/\rho$.

Il est aisé de voir que les relations (6.1) et (6.3) équivalent aux égalités suivantes:

$$-v_{n2} = V_2 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}}, \qquad -v_{n1} = \mathcal{D} = V_1 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}}, \tag{6.6}$$

$$v_{n2} - v_{n1} = v_n = \mathcal{D}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \pm \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}. \tag{6.7}$$

Comme $\mathscr{D} > 0$, le signe « plus » dans (6.7) correspond à $\rho_1 < \rho_2$, le signe « moins » à $\rho_1 > \rho_2$. En éliminant les vitesses dans la relation (6.4) on obtient

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_1 - V_2). \tag{6.8}$$

On remarque en examinant (6.6) que si $V_1 > V_2$, c'est-à-dire $\rho_2 > \rho_1$, alors nécessairement $p_2 > p_1$ et, inversement, si $\rho_2 < \rho_1$, alors $p_2 < p_1$.

Sauts de compression et de détente. Les discontinuités satisfaisant aux inégalités

$$v_n > 0, \quad \rho_2 > \rho_1, \quad p_2 > p_1 \tag{6.9}$$

sont appelées sauts de compression.

Les sauts de détente sont définis par les inégalités suivantes:

$$v_n < 0, \quad \rho_2 < \rho_1, \quad p_2 < p_1. \tag{6.10}$$

L'une des inégalités (6.9) ou (6.10) entraîne les deux autres.

Les propriétés (6.9) et (6.10) ont un caractère très général. Elles sont conséquences uniquement du principe de conservation de la masse et de l'équation des quantités de mouvement lorsqu'il n'y a pas, sur la surface de discontinuité, de forces surfaciques extérieures s'exerçant sur le milieu, ni d'apports extérieurs de masse.

Saut d'énergie interne. La relation (6.8) ne contenant pas de vitesse, elle est valable pour tout référentiel et convient pour l'étude des variations de la densité et de la pression des particules traversant la discontinuité. Connaissant le saut de densité, il est possible dans certains cas importants de trouver le saut de pression à partir de (6.8), après quoi les vitesses correspondantes se déterminent à partir des égalités (6.6) et (6.7).

Dans le cas général, l'énergie interne d'un milieu matériel homogène parfait est une fonction du volume spécifique V (de la densité ρ), de la pression p et de certains autres paramètres définissant les propriétés physiques et chimiques du milieu; aux paramètres physiques se rapportent également les vecteurs de polarisation et d'aimantation; ces paramètres peuvent varier par saut en traversant la surface de discontinuité.

C'est ce qu'on constate en étudiant les phénomènes de propagation du front de combustion, de celui de détonation, de divers fronts d'ondes électromagnétiques, etc.

On a, par exemple, pour un gaz parfait

$$U = c_V T + U_0 = \frac{c_V}{c_p - c_V}\frac{p}{\rho} + U_0,$$

où c_p et c_V sont les chaleurs spécifiques, U_0 la constante du gaz donné. La composition d'un gaz peut changer à la traversée d'une discontinuité en provoquant les discontinuités éventuelles de c_p, c_V et U_0. Si le gaz représente un mélange des gaz parfaits, alors

$$U = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho} \left(U_{0i} + \int_{T_0}^{T} c_{Vi}(T)\, dT \right),$$

ρ_i/ρ étant contribution massique du i-ième constituant gazeux du mélange. Les rapports ρ_i/ρ pouvant varier par saut à la traversée d'une surface de discontinuité, pour déterminer ces sauts il est nécessaire d'appliquer les lois et les hypothèses physico-chimiques supplémentaires. Ainsi, par exemple, avec l'augmentation de température on peut envisager la combustion (totale ou partielle), évaluer la dissociation ou l'ionisation, etc.

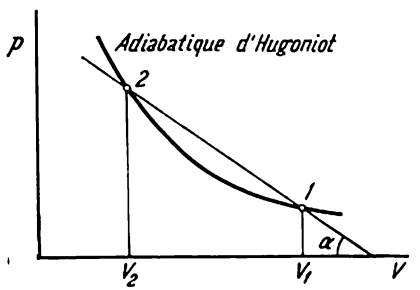


Fig. 48. Adiabatique d'Hugoniot

Si les propriétés physico-chimiques du milieu se conservent à la traversée d'un saut et seules la pression p et la densité ρ changent, l'égalité (6.8) pour p_1 et ρ_1 fixés fournit la relation entre les valeurs de la pression p_2 et de la densité ρ_2 après le saut.

Adiabatique d'Hugoniot. Si l'on porte sur le plan (p, V) les points figurant les états p, $V = 1/\rho$, on obtient pour p_1, V_1 donnés une courbe satisfaisant à l'équation (6.8). Cette courbe (fig. 48) s'appelle adiabatique d'Hugoniot.

Le point p_1, V_1 traduisant l'état avant le saut appartient à l'adiabatique d'Hugoniot à condition que

$$U_2(p_1, V_1) - U_1(p_1, V_1) = 0, \tag{6.11}$$

c'est-à-dire si la fonction $U_2(p, V)$ coïncide avec la fonction $U_1(p, V)$. L'égalité (6.11) est remplie si tous les paramètres, excepté p et V, ainsi que les constantes, dont peut dépendre l'énergie interne, demeurent invariables à la traversée du saut. En présence des réactions chimiques ou d'autres transformations irréversibles l'égalité (6.11) peut ne pas être vérifiée, alors le point p_1, V_1 peut ne pas appartenir à l'adiabatique d'Hugoniot *).

*) On trouvera une exposition plus complète de la théorie de l'adiabatique d'Hugoniot dans l'ouvrage de L. Sedov, *Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics*. New York, Wiley, 1965.

Considérons les discontinuités où l'égalité (6.11) a lieu. Il est évident que pour p_1, V_1 donnés pour situer le point p_2, V_2 sur l'adiabatique d'Hugoniot, il suffit de donner l'une des grandeurs

$$p_2 \quad \text{ou} \quad \rho_2 = \frac{1}{V_2} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = \frac{\mathscr{D}^2}{V_1^2}. \tag{6.12}$$

L'angle α définit la pente de la droite, sécante de l'adiabatique d'Hugoniot, correspondant aux états avant le saut *1* et après le saut *2*. Il est évident que l'angle α caractérise la vitesse $\mathscr{D}$ de propagation du saut par les particules du milieu en état *1*.

Variation de l'entropie le long de l'adiabatique d'Hugoniot. Calculons maintenant la variation de l'entropie s le long de l'adiabatique d'Hugoniot. A cet effet considérons entre un certain état fixé p_1, V_1 et un état arbitraire p, V, tous les deux appartenant à l'adiabatique d'Hugoniot, une certaine transformation réversible avec un apport de chaleur satisfaisant à l'égalité

$$T\,ds = dU + p\,dV. \tag{6.13}$$

En substituant dans (6.13) dU de (6.8) pour des p_1, V_1 fixés on a après les calculs simples

$$T\,ds = \frac{1}{2}(V_1 - V)\,d(p - p_1) - \frac{1}{2}(p - p_1)\,d(V_1 - V).$$

En profitant de (6.12) on obtient

$$T\,ds = \frac{1}{2}(V_1 - V)^2\,d\frac{p - p_1}{V_1 - V} = \frac{1}{2}(V_1 - V)^2\,d\operatorname{tg}\alpha =$$
$$= -\frac{1}{2}(p - p_1)^2\,d\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{6.14}$$

Variation de l'entropie le long de l'adiabatique d'Hugoniot dans le cas d'un petit saut de pression. En tenant compte de l'égalité

$$d\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -d\frac{V - V_1}{p - p_1} =$$
$$= -d\left[\left(\frac{dV}{dp}\right)_{p=p_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dp^2}\right)_{p=p_1}(p - p_1) + \ldots\right] =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dp^2}\right)_{p=p_1} dp + O(p - p_1)\,dp,$$

où $O(p - p_1)$ est une petite quantité disparaissant avec $p - p_1$, on obtient le long de l'adiabatique d'Hugoniot à partir de (6.14)

$$T\,ds = \frac{1}{4}(p - p_1)^2\frac{d^2V}{dp^2}\,dp + (p - p_1)^2\,O(p - p_1)\,dp. \tag{6.14'}$$

Il en découle que pour des $p - p_1$ petits l'égalité suivante a lieu:

$$T^*\Delta s = \frac{1}{12}(p-p_1)^3\left(\frac{d^2V}{dp^2}\right)_{p=p_1} +$$

$$+ \text{des infiniment petits d'ordre supérieur à } (p-p_1)^3, \qquad (6.15)$$

où T^* est la valeur moyenne de la température dans l'intervalle d'intégration.

On voit de la formule (6.15) que pour de petits sauts de pression $p - p_1$ la variation de l'entropie à la traversée du saut est une quantité infiniment petite de l'ordre de $(p - p_1)^3$.

Adiabatique de Poisson. Lors des mouvements continus adiabatiques l'état d'une particule change sans entraîner une variation de l'entropie, c'est-à-dire que

$$s_2(p, V) - s_1(p_1, V_1) = \Delta s = 0. \qquad (6.16)$$

L'équation (6.16) pour p_1, V_1 donnés définit une relation entre p et V. La courbe correspondante dans le plan (p, V) passant par le point p_1, V_1 est appelée, comme on sait, adiabatique de Poisson.

Les adiabatiques d'Hugoniot et de Poisson ont entre elles un contact du second ordre au point p_1, V_1. En vertu de (6.15) et (6.16), la différence $p - p_1$ étant petite, les équations des adiabatiques de Poisson et d'Hugoniot peuvent se présenter ainsi:

$$V - V_1 = f(p - p_1, s = \text{const}) \qquad (6.17)$$

(l'adiabatique de Poisson) et

$$V - V_1 = f(p - p_1, s = \text{const}) + k(p - p_1)^3 + \qquad (6.18)$$

(l'adiabatique d'Hugoniot); le coefficient k ne dépend que de V_1 et p_1. Par conséquent, au voisinage du point p_1, V_1 ces adiabatiques sont des courbes rapprochées (fig. 49).

Il découle de (6.17) et (6.18) qu'au point p_1, V_1 les deux adiabatiques ont des tangentes et des courbures égales, c'est-à-dire que

$$\left(\frac{dV}{dp}\right)_\Gamma = \left(\frac{dV}{dp}\right)_\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$$

et

$$\left(\frac{d^2V}{dp^2}\right)_\Gamma = \left(\frac{d^2V}{dp^2}\right)_\Pi = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s. \qquad (6.19)$$

Il est évident que les dérivées totales du volume spécifique V le long de l'adiabatique de Poisson représentent tout simplement les dérivées partielles par rapport à p du volume spécifique $V(p, s)$ exprimé au moyen des équations d'état en fonction de deux variables indépendantes p et s.

Les sauts faibles se propagent avec la vitesse sonique. Il découle de (6.6) et (6.19) que, pour de faibles sauts, lorsque $p_2 \to p_1$ et $V_2 \to V_1$, ont lieu les égalités

$$\mathscr{D}^2 = -V^2 \left(\frac{dp}{dV}\right)_\Gamma = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_\Gamma = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_\Pi = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s. \tag{6.20}$$

La quantité

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \tag{6.21}$$

est appelée vitesse du son. On voit que les perturbations infiniment petites — sauts faibles — se propagent dans le milieu, à la vitesse du son, c'est-à-dire que

$$\mathscr{D} = a.$$

Disposition mutuelle des adiabatiques d'Hugoniot et de Poisson au voisinage du point p_1, V_1. Pour des milieux ordinaires on a les inégalités

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p > 0. \tag{6.22}$$

Par exemple, pour un gaz parfait (voir (7.11) et (4.3), ch. V) on a

$$\left.\begin{aligned}
&U = c_V T_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} e^{\frac{s-s_0}{c_V}} + \text{const} = c_V T + \text{const} = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{\gamma-1} pV + \text{const}, \\
&\frac{p}{p_0} = e^{\frac{s-s_0}{c_V}} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \\
&\text{donc} \\
&\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V}{V_0} = e^{\frac{s-s_0}{c_p}} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/\gamma}; \\
&\text{d'où} \\
&\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s = \frac{(1+\gamma)\, p_0}{\gamma^2 \rho_0} \frac{e^{\frac{s-s_0}{c_p}}}{p^{2+1/\gamma}} > 0 \\
&\text{et} \\
&\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{V}{c_p} > 0.
\end{aligned}\right\} \tag{6.23}$$

Il découle de l'inégalité $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0$ que l'adiabatique de Poisson a la concavité dirigée vers le haut. Si $(\partial V/\partial s)_p > 0$, alors $s > s_1$ est au-dessus et $s < s_1$ au-dessous de l'adiabatique de Poisson;

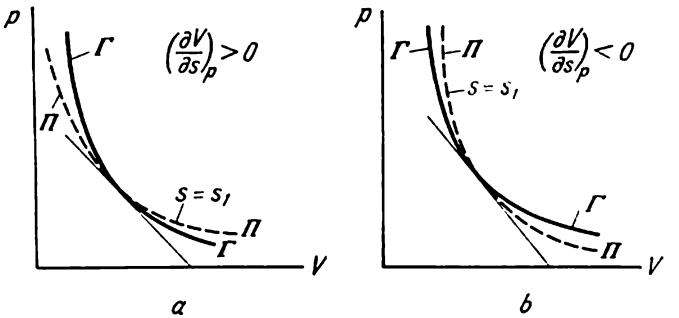


Fig. 49. Disposition relative des adiabatiques de Poisson (II) et d'Hugoniot (Г) pour $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0$

pour $(\partial V/\partial s)_p < 0$ on a $s < s_1$ au-dessus et $s > s_1$ au-dessous de l'adiabatique de Poisson (voir fig. 49, *a* et *b*). L'égalité (6.15) étant vraie sur l'adiabatique d'Hugoniot, il est évident qu'au voisinage du point p_1, V_1 celle-ci, en touchant l'adiabatique de Poisson, passe de haut en bas lorsque V croît comme le montre la figure 49, *a*, quand $(\partial V/\partial s)_p > 0$. Si $(\partial V/\partial s)_p < 0$, la disposition mutuelle des adiabatiques est inverse.

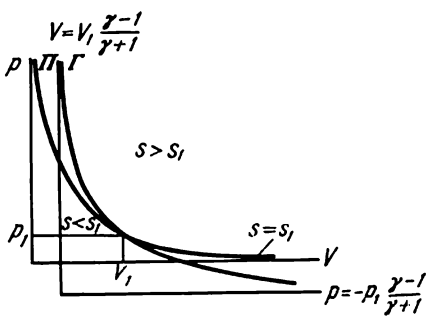


Fig. 50. Adiabatiques de Poisson et d'Hugoniot pour un gaz parfait

Equations des adiabatiques de Poisson et d'Hugoniot pour un gaz parfait. Selon (6.23) les équations des adiabatiques de Poisson et d'Hugoniot (6.8) pour un gaz parfait ont respectivement pour expression

$$pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma \tag{6.24}$$

et

$$\frac{1}{\gamma-1}(pV - p_1V_1) = \frac{1}{2}(p + p_1)(V_1 - V). \tag{6.25}$$

L'adiabatique de Poisson a comme asymptotes $V = 0$ et $p = 0$. L'adiabatique d'Hugoniot est une hyperbole d'asymptotes

$$V = V_1 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad \text{et} \quad p = -p_1 \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

La forme générale de ces courbes est représentée sur la figure 50. Il est clair que l'adiabatique d'Hugoniot pour un gaz parfait sur toute son étendue a la concavité dirigée vers le haut.

L'entropie d'un gaz parfait croît d'une façon monotone avec la pression le long de l'adiabatique d'Hugoniot. Pour un gaz parfait, (6.25) et (6.13) fournissent, le long de l'adiabatique d'Hugoniot, la formule $T\,ds = \frac{\gamma+1}{4V_1}(V_1 - V)^2\,dp$, d'où

$$\frac{\partial s}{\partial p} > 0. \tag{6.26}$$

Pour un gaz parfait, en montant l'adiabatique d'Hugoniot, c'est-à-dire lorsque la pression p croît, l'entropie croît de façon monotone.

On peut montrer que dans le cas général, pour tout milieu satisfaisant à l'inégalité $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$, on a sur l'adiabatique d'Hugoniot $s > s_1$ pour $p > p_1$ et $s < s_1$ pour $p < p_1$. En particulier, pour de petits sauts $p - p_1$ cela découle directement de (6.14′) et (6.19).

Les sauts de compression sont réels ; les sauts de détente sont irréalisables. On déduit du second principe de la thermodynamique que dans les hypothèses d'adiabacité seuls sont admissibles les sauts où $\Omega > 0$, c'est-à-dire que l'entropie s_2 de la particule ayant traversé le saut est supérieure à son entropie initiale s_1 avant le saut. Il découle de l'analyse précédente que pour $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ et $U_2(p, \rho) = U_1(p, \rho)$ cela n'est vrai que pour des sauts de compression lorsque

$$p_2 > p_1, \quad \rho_2 > \rho_1 \quad \text{et} \quad v_n = v_{n2} - v_{n1} > 0.$$

Ainsi donc nous sommes conduits à la conclusion fondamentale de la théorie des fortes discontinuités : si l'on a l'inégalité $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$, seuls les sauts de compression sont réalisables.

Les sauts de détente ne peuvent pas se réaliser.

Cette conclusion est essentiellement liée aux hypothèses adoptées : premièrement, à l'inégalité $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ et, deuxièmement, à la condition $U_2(p, \rho) = U_1(p, \rho)$.

Conditions de réalisation des sauts de détente. Si après le saut les propriétés physiques ou chimiques d'un mélange gazeux varient de façon que la seconde condition n'est pas satisfaite, la réalisation des sauts de détente devient possible dans les mouvements réels. Dans ce cas (6.8) définit le lieu géométrique des points p_2, V_2, courbe appelée également adiabatique d'Hugoniot. Cette courbe, comme on a indiqué plus haut, ne passe pas par le point p_1, V_1.

L'exemple de tels sauts de détente effectivement réalisables est fourni par des fronts de combustion.

La vitesse de propagation d'un saut de compression par les particules du milieu en avant du saut est supersonique. Notons encore une propriété très importante des composantes normales relatives des vitesses de part et d'autre du saut. Désignons par β_1 l'angle aigu

que fait la tangente à l'adiabatique de Poisson avec l'axe V (fig. 51). Par suite de la concavité de l'adiabatique de Poisson on a pour des milieux arbitraires satisfaisant à la condition $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ au voisinage du point p_1, V_1 et pour un gaz parfait sur toute l'étendue de l'adiabatique l'inégalité

$$\operatorname{tg} \beta_1 < \operatorname{tg} \alpha$$

pour des sauts de compression correspondant à des $p - p_1$ petits dans tous les milieux continus considérés et pour tous les sauts de compression dans un gaz parfait. Comme

$$a_1^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{p_1} = -V_1^2 \left(\frac{dp}{dV}\right)_{p_1} = V_1^2 \operatorname{tg} \beta_1$$

et

$$\mathscr{D}^2 = V_1^2 \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = V_1^2 \operatorname{tg} \alpha,$$

il en découle que pour les sauts de compression $(p_2 > p_1)$ on a

$$\mathscr{D}^2 = v_{n1}^2 > a_1^2. \qquad (6.27)$$

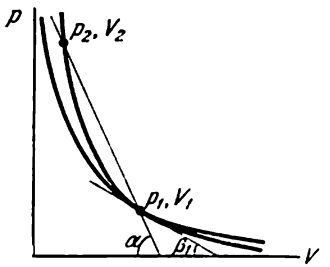


Fig. 51. β_1 — l'angle aigu que forme la tangente à l'adiabatique de Poisson avec l'axe V, α — l'angle aigu formé par la sécante de l'adiabatique d'Hugoniot avec l'axe V

On peut montrer *) que pour tout milieu satisfaisant à $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ la vitesse de propagation d'un saut de compression pour une différence de pression $p_2 - p_1$ finie par les particules d'un gaz en avant du saut est supersonique.

Les sauts immobiles ne peuvent exister que dans des écoulements supersoniques. Pour un saut immobile la composante normale v_{n1} de la vitesse des particules s'approchant du saut et le traversant peut dépasser la vitesse du son. Ainsi donc les sauts immobiles ne peuvent apparaître que dans un écoulement supersonique. Les sauts mobiles peuvent évidemment exister dans les écoulements de vitesses quelconques et, en particulier, peuvent se propager dans un milieu immobile.

Adiabatiques d'Hugoniot correspondant aux points p_1, V_1 et p_2, V_2. Plus haut nous avons étudié une adiabatique d'Hugoniot Γ_1 de pied p_1, V_1:

$$U(p, V) - U(p_1, V_1) = \frac{1}{2}(p + p_1)(V_1 - V). \qquad (6.28')$$

Envisageons maintenant l'adiabatique d'Hugoniot Γ_2 de pied p_2, V_2. Son équation est de la forme

$$U(p, V) - U(p_2, V_2) = \frac{1}{2}(p + p_2)(V_2 - V). \qquad (6.28)$$

*) Voir le renvoi à la page 414.

On voit aisément que les adiabatiques (6.28′) et (6.28) sont des courbes différentes mais grâce à la condition (6.11) elles passent toutes les deux par les points p_1, V_1 et p_2, V_2.

Si pour l'adiabatique (6.28′) le passage de p_1, V_1 à p_2, V_2 correspond à un saut de compression, alors pour l'adiabatique (6.28) le passage de p_2, V_2 à p_1, V_1 correspond à un saut de détente (fig. 52).

Plus loin nous considérerons le cas d'un gaz parfait. La sécante commune de Γ_1 et de Γ_2 est une droite passant par les points p_1, V_1 et p_2, V_2. En raison de la concavité des adiabatiques du gaz parfait dans l'intervalle p_1, p_2 la sécante passe au-dessus des deux adiabatiques. Il en résulte que l'angle aigu β_2 que fait la tangente à l'adiabatique Γ_2 au point p_2, V_2 avec l'axe V est supérieur à l'angle α que fait avec l'axe V la sécante de Γ_1 et de Γ_2 (voir fig. 52):

$$\operatorname{tg} \beta_2 > \operatorname{tg} \alpha. \qquad (6.29)_1$$

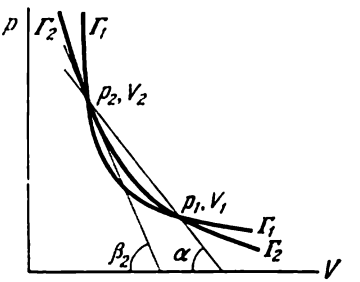


Fig. 52. L'adiabatique Γ_1 correspond à l'équation (6.28′), l'adiabatique Γ_2 à l'équation (6.28)

La vitesse des particules du milieu ayant traversé le saut de compression est subsonique par rapport au saut. Il s'ensuit immédiatement une inégalité importante pour les sauts de compression ($\rho_1 < \rho_2$), à savoir, en vertu de (6.6) et (6.29′) il vient

$$v_{n2}^2 = V_2^2 \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} = V_2^2 \operatorname{tg} \alpha < V_2^2 \operatorname{tg} \beta_2,$$

mais, puisque

$$V_2^2 \operatorname{tg} \beta_2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{p_2} = a_2^2,$$

on aura

$$v_{n2}^2 = (\mathscr{D} - v_n)^2 < a_2^2. \qquad (6.29)$$

Par conséquent, la composante normale de la vitesse du milieu par rapport au saut, égale à la vitesse de propagation du saut par les particules ($\mathscr{D} - v_n$) est subsonique en arrière du saut.

Une étude plus détaillée permet de relever que les propriétés des sauts de compression trouvées plus haut lorsque $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$ pour un milieu quelconque et pour des $p_2 - p_1$ petits ou dans le cas d'un gaz parfait quels que soient $p_2 - p_1$ (on utilise dans ce cas la concavité de l'adiabatique d'Hugoniot sur toute son étendue) sont valables dans le cas général pour tous $p_2 - p_1$ et tous milieux satisfaisant à l'inégalité $(\partial^2 V/\partial p^2)_s > 0$.

Considérons quelques problèmes sur le mouvement adiabatique d'un gaz parfait avec les sauts de compression.

Problème du piston engendrant des ondes planes. Commençons par le problème du piston. Soit un tube cylindrique rempli d'un gaz parfait et fermé à gauche par un piston (fig. 53). A l'instant initial $t = 0$ le piston et le gaz impondérable sont au repos. Désignons par ρ_1 et p_1 les valeurs constantes de la densité et de la pression du gaz immobile. Etudions le problème du mouvement adiabatique perturbé du gaz chassé par le piston pour $t > 0$.

Il est évident que le mouvement perturbé du gaz dépend essentiellement de la loi de mouvement du piston, cette dernière pouvant

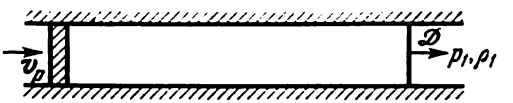


Fig. 53. Problème du mouvement du gaz chassé par un piston

être donnée à l'aide de la fonction $v_p(t)$, où v_p désigne la vitesse du piston. En vertu de la condition aux frontières appliquée au piston les vitesses des particules en contact avec ce dernier doivent être égales à $v_p(t)$. Dans le cas général des mouvements continus accélérés du piston le problème sur le mouvement du gaz est difficile et ne peut être résolu qu'au moyen des machines calculatrices. Pourtant le problème se résout facilement dans le cas particulier où le piston, primitivement immobile, se met instantanément à se mouvoir avec la vitesse v_p du côté du gaz et poursuit son mouvement à la vitesse constante.

Il est évident que toutes les conditions du problème seront satisfaites si l'on suppose qu'à l'instant initial une onde de choc se détache du piston pour se propager ensuite dans un gaz immobile avec la vitesse supersonique $\mathscr{D}$ par rapport à l'état initial du gaz. Il se crée, entre le piston et l'onde de choc, un mouvement de translation à la vitesse constante connue v_p, de pression p_2 et de densité ρ_2 constantes.

La vitesse $\mathscr{D}$, la densité ρ_2 et la pression p_2 sont faciles à calculer au moyen de $v_p = v_{n2}$, p_1 et ρ_1 à partir des trois conditions aux discontinuités (6.6) et (6.25). L'entropie spécifique derrière le saut est constante et la même dans toutes les particules, le saut d'entropie étant égal à

$$s_2 - s_1 = c_V \ln \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma} > 0.$$

Si la vitesse du piston est constante mais dirigée en sens opposé au gaz, les raisonnements analogues conduisent à un saut de détente

qui est inadmissible. Au fait, ici le saut n'apparaît pas et le problème a une solution continue.

Si la vitesse du piston est variable et dirigée du côté du gaz, la vitesse $\mathcal{D}$ se trouve variable. De petites variations de vitesse du piston se propagent avec la vitesse $v + a$ (v étant la vitesse du gaz dans la région derrière l'onde de choc); comme la vitesse $v + a$ derrière le front de l'onde de choc est supérieure à la vitesse $\mathcal{D}$ du front, elle rattrape nécessairement l'onde de choc et modifie la vitesse du gaz en arrière du front. L'onde de choc s'en trouve retardée ou accélérée, ce qui, à son tour, modifie les valeurs des sauts de pression et d'entropie. Ainsi donc, il est clair que derrière le front d'onde on obtient un mouvement des particules du gaz à caractéristiques variables: en coordonnée (distance jusqu'au piston) et en temps. L'adiabacité fait que l'entropie des particules est constante mais elle varie selon les particules à cause de la vitesse variable $\mathcal{D}$ de l'onde de choc. C'est pourquoi dans la région du mouvement continu du gaz entre le piston et l'onde de choc la barotropie n'existe pas, ce qui est confirmé par la formule

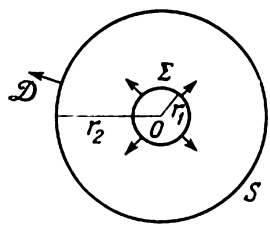


Fig. 54. La dilatation d'une sphère Σ dans le gaz engendre l'onde de choc sphérique S

$$\frac{p}{p_1} = e^{\frac{s-s_1}{c_V}} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma}$$

Pour une densité déterminée ρ la pression dans les différentes particules peut être différente à cause de l'inégalité de l'entropie.

Piston sphérique. On peut compliquer le problème du piston dans un tube cylindrique. En effet, considérons le problème sur l'extension d'une sphère Σ de centre immobile O dans une masse de gaz illimitée, primitivement au repos, de densité initiale ρ_1 et de pression p_1 (fig. 54). La vitesse d'extension de la sphère Σ est dr_1/dt. Dans le cas général il se crée au sein du gaz une onde de choc sphérique S se propageant avec la vitesse $\mathcal{D} = dr_2/dt$, r_2 étant le rayon de l'onde sphérique S. Si Σ est issue d'un point (centre de symétrie, de sorte que pour $t = 0$ on a $r_1 = 0$) et la vitesse $dr_1/dt = \text{const}$, on peut montrer que dans ce cas la vitesse $\mathcal{D}$ de l'onde de choc est également constante.

Le problème se résout plus facilement si l'on écrit toutes les équations en coordonnées sphériques et que l'on applique les simplifications découlant de la symétrie sphérique du problème (les caractéristiques du mouvement dépendront de deux variables indépendantes, le rayon r et le temps t).

Le problème du piston sphérique peut être regardé comme modèle de l'explosion dans l'atmosphère d'air si l'on admet que Σ enferme les produits d'une réaction chimique, un gaz fortement comprimé chassant l'air, tel un piston. Il se crée alors, dans l'air, une onde de choc d'air appelée onde d'explosion. Pour déterminer le mouvement de l'air entre l'onde d'explosion S et la surface Σ derrière laquelle se trouvent les produits d'explosion on devra résoudre un problème de gazodynamique. On a établi plus haut toutes les équations, les conditions initiales et celles aux frontières qu'on exploitera pour la résolution de ce problème.

Problème de l'explosion ponctuelle. Dans le problème du piston sphérique on suppose donnée la loi d'extension de la sphère Σ, or dans le problème de l'explosion ponctuelle la vitesse dr_1/dt de l'extension de la sphère Σ séparant les produits d'explosion de l'air est inconnue à l'avance.

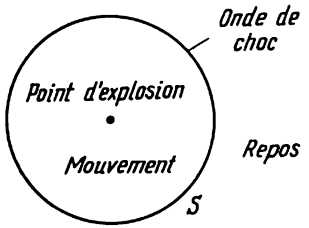


Fig. 55. Schéma illustrant le problème de l'explosion ponctuelle

On peut schématiser le problème de l'explosion dans l'atmosphère de façon à mettre en évidence l'effet principal consistant en ce que dans un petit volume se dégage une énergie notable transmise ensuite à l'air, il se crée alors dans l'atmosphère une région sphérique d'air mobile se dilatant rapidement avec de brusques perturbations des champs de pression et de densité. On peut formuler le problème de l'explosion ponctuelle de la façon suivante. Au moment initial, dans une masse de gaz parfait impondérable immobile, de pression p_1 et de densité ρ_1 constantes, se dégage instantanément en un certain point (centre de symétrie du mouvement naissant) une énergie donnée E; il faut déterminer le mouvement perturbé dans le cas le plus simple où le mouvement des particules du gaz est supposé adiabatique.

Dans ce cas, tout comme dans le problème du piston sphérique, il se forme une onde de choc sphérique se propageant depuis le point d'explosion et séparant le gaz immobile de celui mobile dans le domaine intérieur à l'onde de choc (fig. 55).

Toutes les caractéristiques de mouvement et d'état peuvent être considérées comme fonctions uniquement de r et t. Pour définir la distribution de ces caractéristiques du gaz suivant le rayon il faut résoudre le problème de l'intégration des équations non linéaires aux dérivées partielles suivantes exprimées en coordonnées sphériques (voir § 3, ch. IV):

$$\left.\begin{aligned}
&\text{l'équation de continuité}\\
&\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v}{\partial r}+\frac{2\rho v}{r}=0,\\
&\text{l'équation des impulsions}\\
&\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=0,\\
&\text{la condition d'adiabacité}\\
&\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)+v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

En intégrant le système (6.30) il faut satisfaire aux conditions initiales ci-dessus, aux conditions aux limites sur le saut (l'onde d'explosion) étudiées précédemment ainsi qu'à la condition consistant en ce qu'à chaque instant l'énergie totale du gaz à l'intérieur de l'onde de choc sphérique est égale à la somme de l'énergie d'explosion E et de l'énergie initiale du gaz au repos à l'intérieur de la sphère S.

Au § 8 on analysera plus en détail les propriétés générales de la solution de ce problème *).

Ondes de détonation et de combustion. Si, à la traversée d'une discontinuité, il y a variation (dégagement ou absorption) de l'énergie et de l'entropie due à quelques transformations physico-chimiques (combustion, condensation, vaporisation, réactions chimiques, etc.), l'équation principale (6.8) change sa forme. On écrit alors au lieu de l'égalité (6.11)

$$U_2(p_1, V_1) - U_1(p_1, V_1) = q^*, \tag{6.31}$$

où q^* est l'énergie chimique ou autre libérée à la traversée de la surface de discontinuité, $q^* > 0$ pour la combustion ou la condensation, $q^* < 0$ pour la vaporisation. Dans ce cas l'adiabatique d'Hugoniot prend la forme suivante **):

$$U_2(p_2, V_2) - U_1(p_1, V_1) = \frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_1-V_2)+q^*. \tag{6.32}$$

Les sauts de détente pour $q^* > 0$ sont propres au front de combustion. Les sauts de compression pour $q^* > 0$ sont caractéristiques des ondes de détonation.

---

*) La solution complète détaillée sous forme finie est exposée dans l'ouvrage de L. Sedov. *Similarity and dimensional methods in mechanics.* New York, Academic Press, 1959.

**) Pour une analyse plus détaillée de l'adiabatique d'Hugoniot voir: L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique des milieux continus* (en russe). Gostechizdat, 1954, et L. Sedov, *Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics.* New York, Wiley, 1965.

Problèmes du piston engendrant des ondes de détonation. On peut développer les problèmes précédents du piston produisant les ondes planes et sphériques en supposant que le saut de compression représente une onde de détonation. Dans ce cas le gaz initialement au repos est un mélange explosif, de sorte que derrière le front d'onde on a un autre gaz (produit du mélange explosé). Dans le problème de la détonation du mélange on obtient, devant le piston plan en mouvement (entre le piston et l'onde de détonation), également un mouvement de translation du gaz si le piston se déplace du côté du gaz avec une vitesse constante suffisamment grande. Si, après la formation de l'onde de détonation, le piston a une vitesse peu élevée ou s'il s'arrête, ou bien se met à se déplacer du côté opposé, la solution comprendra une onde de détonation se propageant dans le gaz, de plus entre le piston et l'onde de choc de détonation se crée un mouvement continu du gaz de paramètres variables.

Relations aux ondes de choc immobiles pour un gaz parfait. Dans de nombreuses applications, en particulier, dans les problèmes fondamentaux d'aérodynamique portant sur l'étude du mouvement des corps à des vitesses supersoniques constantes, on utilise le modèle d'un gaz parfait où dans un référentiel lié au corps en vol on considère un écoulement de gaz stationnaire avec les sauts de compression immobiles, ondes de choc. Ces applications font appel, au lieu de la théorie basée sur l'analyse de l'adiabatique d'Hugoniot, à la théorie s'appuyant sur les relations ci-dessous.

Pour un gaz parfait on a

$$U=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\text{const},\qquad a^2=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=\frac{\gamma p}{\rho}.$$

En partant de (6.1), (6.2), (6.3) et (6.4) il est facile d'exprimer les quantités $v_{\tau 2}$, v_{n2}, ρ_2 et p_2 derrière le saut au moyen des quantités $v_{\tau 1}$, v_{n1}, ρ_1, p_1 en avant du saut. On a

$$v_{\tau 2}=v_{\tau 1},\qquad v_{n2}=v_{n1}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{1}{\gamma+1}\frac{a_1^2}{v_{n1}^2}\right), \tag{6.33}$$

$$\rho_2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\rho_1}{1+\dfrac{2}{\gamma-1}\dfrac{a_1^2}{v_{n1}^2}}, \tag{6.34}$$

$$p_2=\frac{2}{\gamma+1}\rho_1 v_{n2}^2\left[1-\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{a_1^2}{v_{n1}^2}\right].$$

Les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ définissent un plan π coïncidant avec celui passant par la normale à la surface du saut et par la direction de la composante $v_{\tau 1}$. Traçons dans le plan π les axes cartésiens et désignons par β l'angle d'inclinaison de l'élément de l'onde de choc dans le plan π par rapport à l'axe des x, par θ l'angle d'inclinaison de la vitesse par rapport à l'axe des x, par u, v les composantes de la

vitesse. On a évidemment les égalités suivantes:

$$\left.\begin{aligned} v_\tau &= |\boldsymbol{v}| \cos(\beta-\theta) = u\cos\beta + v\sin\beta, \\ v_n &= |\boldsymbol{v}| \sin(\beta-\theta) = u\sin\beta - v\cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{6.35}$$

Choisissons les axes de coordonnées de telle sorte que pour le point considéré de l'onde de choc la direction de l'axe des x coïncide avec celle de la vitesse $\boldsymbol{v}_1$ ($|\boldsymbol{v}_1| = u_1$, $v_1 = 0$). Remplaçons dans (6.33) v_τ et v_n par u, v et β; en éliminant β à l'aide de (6.35) on obtient définitivement

$$v_2^2 = (u_1-u_2)^2 \frac{\frac{2}{\gamma+1}\left(u_1 - \frac{a_1^2}{u_1}\right) - (u_1-u_2)}{u_1 - u_2 + \frac{2}{\gamma+1}\frac{a_1^2}{u_1^2}}. \tag{6.36}$$

La polaire de choc est une hypocissoïde. Dans le plan de l'hodographe de la vitesse $\boldsymbol{v}_2$ (u_2, v_2) où l'on porte en axes de coordonnées respectivement u_2 et v_2 (ce plan correspond au plan π), l'équation (6.36) détermine une courbe appelée polaire de choc. Cette courbe est une hypocissoïde (fig. 56).

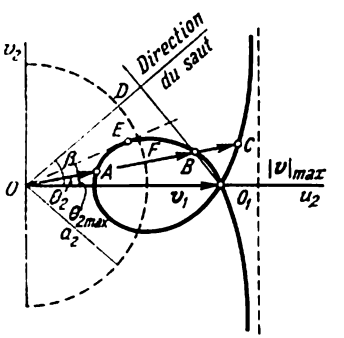


Fig. 56. La polaire de choc est une hypocissoïde. OD est une direction de l'onde de choc, OB le vecteur vitesse en aval du saut, OO_1 le vecteur égal à la vitesse du gaz en amont du saut

A chaque valeur de l'angle d'inclinaison θ_2 de la vitesse, derrière le front du saut sur la polaire de choc, correspondent trois valeurs de la vitesse: les points A, B, C. Il découle de la condition de continuité de la composante de vitesse tangente au saut que la direction du saut définie par β s'obtient comme celle de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées O sur la droite passant par le point O_1 et par un point sur l'hypocissoïde correspondant à la vitesse derrière le saut; sur la figure ce dernier point est représenté par B. Il est évident que pour un saut correspondant au point C on a l'inégalité

$$v_n = v_{n2} - v_{n1} < 0.$$

Il résulte de (6.10) que cette valeur de la vitesse correspond à un saut de détente. Les sauts représentés par les points des branches de l'hypocissoïde tendant vers l'infini ne sont pas physiquement réalisables; on doit donc rejeter ces branches.

La direction des sauts d'amplitude infinitésimale est obtenue lorsque le point B tend vers le point O_1 et la droite O_1B se transforme en une tangente à l'hypocissoïde en point O_1.

Sauts de compression droit et oblique. Les sauts dont la vitesse v_1 est perpendiculaire au front d'onde sont dits droits; au cas contraire les sauts sont dits obliques.

Rotation du vecteur vitesse dans les sauts de compression obliques. Si le saut n'est pas droit, le vecteur vitesse d'une particule traversant le saut tourne de façon à s'approcher de la direction de la tangente au saut.

La rotation de la vitesse atteint son maximum, $\theta_2 = \theta_{2\max}$, au point E où la droite issue du point O est tangente à l'hypocissoïde (voir fig. 56). Au point E correspond une vitesse subsonique, proche de la vitesse du son. Sur la figure 56 on a tracé en pointillé une circonférence correspondant à la vitesse égale à celle du son, $|v_2| = v_{cr} = a_2$ *). Cette circonférence coupe l'hypocissoïde au point F. La valeur de la vitesse $|v_2|$ derrière le saut est supersonique pour un point B situé à droite du point F et subsonique pour un point A à gauche du point F et aussi pour un point B compris dans l'intervalle EF petit. Il découle des formules (6.33) que

$$\operatorname{tg}(\beta-\theta_2)=\operatorname{tg}\beta\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+\frac{1}{(\gamma+1)\,\mathsf{M}_1^2(1-\cos^2\beta)}\right), \qquad (6.37)$$

M désignant une grandeur sans dimension $v/a = \mathsf{M}$ et $\mathsf{M}_1 = v_1/a_1$ ($v_1 = |v_1|$).

La grandeur M est appelée nombre de Mach. Pour les mouvements supersoniques $\mathsf{M} > 1$, pour les mouvements subsoniques $\mathsf{M} < 1$. D'après (6.37) la valeur de l'angle de rotation de la vitesse $\delta = (\theta_2 - \theta_1)$ (sur la figure 56 c'est simplement θ_2) dépend du nombre M_1 et de l'angle β. L'angle de rotation $\delta_{\max}$ le plus grand possible ne dépend que du nombre de Mach M du flux incident. La figure 57 donne le graphique de $\delta_{\max}$ en fonction du nombre de Mach M_1.

Ecoulement supersonique autour des dièdres rentrant et saillant. Les conditions aux sauts de compression obliques permettent d'obtenir directement les solutions du problème sur l'écoulement de translation supersonique autour des dièdres rentrant et saillant (fig. 58).

On comprend facilement que les schémas des écoulements de la figure 58 satisfont à toutes les conditions des problèmes relatifs à l'écoulement autour des dièdres rentrant et saillant.

Il découle cependant des résultats précédents que ces problèmes n'admettent de solution que si les angles δ, δ_1 et δ_2 pour un nombre de Mach donné du flux incident sont intérieurs ou égaux à l'angle $\delta_{\max}(\mathsf{M}_1)$.

*) On peut montrer que, les paramètres du milieu devant le saut étant donnés, la vitesse critique (vitesse égale à la vitesse du son locale) ne dépend pas de l'angle d'inclinaison du saut.

Si cette condition est remplie, les schémas indiqués d'écoulement sont admissibles.

Toutefois, lorsque $\delta < \delta_{max}$, chacun de ces problèmes admet deux solutions avec les directions différentes de l'onde de choc; à la traversée de celles-ci il se produit une rotation du vecteur vitesse

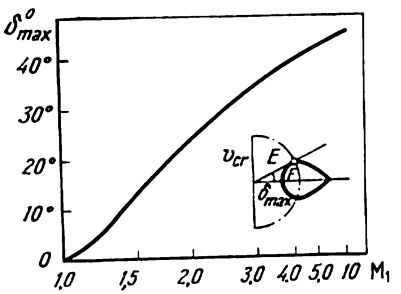


Fig. 57. Angle de rotation maximal de la vitesse à la traversée du saut en fonction du nombre de Mach. Le graphique est établi pour $\gamma = 1,4$

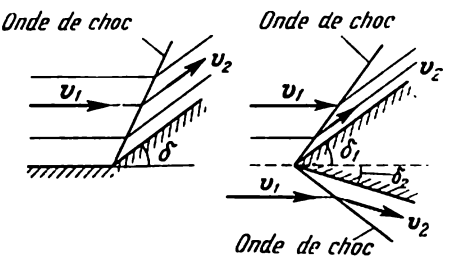


Fig. 58. Ecoulement autour d'un dièdre rentrant et autour d'un coin disposé asymétriquement par rapport à la vitesse du courant incident

nécessaire à assurer les conditions de l'écoulement, mais les valeurs de cette vitesse derrière l'onde sont différentes. Sur la figure 56 à ces deux solutions correspondent, par exemple, les points B et A.

En pratique, dans le cas des corps minces l'écoulement est celui à onde de choc en faible incidence avec une grande vitesse derrière le saut correspondant au point B. Cette solution théorique pour les dièdres rentrant et saillant est en bon accord avec les données des expériences sur l'écoulement supersonique autour des corps minces pointus.

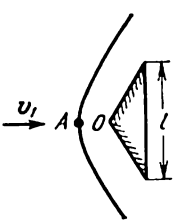


Fig. 59. Ecoulement autour d'un coin à grand angle d'ouverture. L'onde de choc est formée à une certaine distance devant le coin fini

Ecoulement avec une onde de choc détachée. Si l'angle $\delta > \delta_{max}$, l'écoulement d'après les schémas de la figure 58 est impossible. Dans ce cas devant le corps se forme une onde de choc courbée (fig. 59). La distance AO du point anguleux du corps jusqu'au sommet de l'onde de choc est proportionnelle aux dimensions linéaires du corps et dépend de l'angle d'ouverture du dièdre et du nombre M_1.

Lorsque $l \to \infty$, l'onde de choc s'en va à l'infini aval et devant le dièdre le mouvement du gaz est subsonique.

Pertes d'énergie mécanique dans les sauts. En conclusion de ce paragraphe notons que l'apparition des sauts dans les écoulements adiabatiques est liée à des pertes irréversibles d'énergie mécanique disponible conditionnées par l'accroissement de l'entropie.

On peut écrire pour l'énergie interne d'un gaz parfait

$$U = c_V T + \text{const} = c_V T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{\frac{s-s_0}{c_p}} + \text{const}.$$

Considérons l'énergie interne de quelques états caractéristiques avant et après le saut (états obtenus en freinant adiabatiquement le gaz jusqu'à $v = 0$) *). Désignons les pressions et les températures de ces états avant et après le saut (pressions et températures du freinage) respectivement par p_1^*, p_2^*, T_1^* et T_2^*.

Si la traversée du saut par les particules du milieu ne s'accompagne ni de réactions chimiques ni de transformations de phase (c'est-à-dire que l'on a $q^* = 0$ dans l'égalité (6.31)), il résulte de (6.4) pour un gaz parfait que

$$T_1^* = T_2^*.$$

Donc

$$e^{\frac{s_1-s_0}{c_p}} p_1^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}} = e^{\frac{s_2-s_0}{c_p}} p_2^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p_1^*}{p_2^*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = e^{\frac{s_2-s_1}{c_p}}.$$

S'il y a des pertes irréversibles, $s_2 - s_1 > 0$. D'où $p_2^* < p_1^*$. Il en résulte que le gaz ayant traversé le saut a une pression plus petite en état de repos et donc sa capacité de travail (utilité technique) diminue.

En analysant l'adiabatique d'Hugoniot on voit que l'accroissement de l'entropie et, par conséquent, les pertes augmentent avec l'augmentation de l'intensité du saut de compression caractérisée par la différence de pression $p_2 - p_1$.

Pour un nombre donné de Mach M_1, l'intensité d'un saut droit dans un flux incident est maximale. Les pertes d'un saut oblique sont toujours moindres que dans un saut droit **) .

§ 7. Dimensions des grandeurs physiques. Théorème des produits des puissances

Invariance des relations physiques par rapport au choix du système de coordonnées. En établissant les équations et en effectuant les calculs numériques concrets il est nécessaire d'introduire et d'exploi-

*) Voir ch. VIII, § 5, tome II.

**) Une théorie plus détaillée traitant des pertes dans des sauts de compression est exposée dans le livre cité de L. Sedov, *Two-dimensional problems in hydrodynamics and aerodynamics*. New York, Wiley, 1965.

ter divers systèmes de coordonnées. Ces derniers peuvent être arbitraires dans le cas général. Toutefois, dans de nombreuses applications le choix des systèmes de coordonnées est dicté par des raisons de la simplicité et de la commodité des calcules ou de l'analyse des résultats numériques. L'arbitraire possible dans le choix des axes de coordonnées introduit par les modes de description adoptés des phénomènes étudiés ne provient pas de l'essentiel de ces derniers. Par conséquent, les différentes équations traduisant certains propriétés et effets physiques doivent être invariantes par rapport aux systèmes de coordonnées choisis.

Nature tensorielle des équations physiques. Cela explique le fait que toutes les équations et les relations complémentaires établies plus haut ont la forme d'équations scalaires, vectorielles ou, en général, tensorielles. C'est là qu'il faut chercher la raison de ce que la plupart des caractéristiques du mouvement et de l'état ont une nature tensorielle invariante. C'est pour cette raison qu'il est nécessaire de développer et d'exploiter le calcul tensoriel et d'exprimer toutes les relations physiques sous forme tensorielle invariante.

Grandeurs dimensionnées. D'autre part, la définition et la donnée de différentes grandeurs, caractéristiques d'un milieu, d'un champ ou d'une transformation telles que la densité, l'énergie, la vitesse, la charge, etc., à l'aide de nombres impliquent l'utilisation des unités de mesure déterminées dont le choix dépend également du chercheur.

Les quantités dont les valeurs numériques dans les problèmes étudiés dépendent du choix des unités de mesure sont appelées grandeurs dimensionnées. Par exemple, l'énergie peut être mesurée en kilogrammètres, en joules, en calories, en tonnes de charbon ou en kilogrammes d'uranium, en francs et encore en maintes autres unités de mesure. Les nombres correspondants définissant la valeur numérique de l'énergie dépendent essentiellement du choix des unités de mesure.

Les opérations sur un grand nombre de diverses caractéristiques liées entre elles par toute sorte de définitions et d'équations conduisent à constater que les unités de mesure des différentes caractéristiques sont, en général, liées entre elles. Par exemple, l'unité de mesure de la vitesse $v = ds/dt$ est liée à celles de longueur ds et de temps dt.

Unités de mesure de base (fondamentales). En même temps que des unités de mesure dérivées on doit envisager les unités de base, unités indépendantes introduites par voie expérimentale à l'aide des conditions spéciales théoriquement arbitraires en général.

Ainsi, par exemple, on introduit par les méthodes connues des unités de mesure de base (fondamentales) de longueur, de temps et de masse.

Les grandeurs dont les unités de mesure sont établies par l'expérience à l'aide des étalons sont appelées, par convention, grandeurs de base ou fondamentales. Leurs unités de mesure sont également appelées unités de base ou fondamentales.

Unités de mesure dérivées. Les unités de mesure définies au moyen des unités fondamentales sont appelées unités de mesure dérivées.

Systèmes d'unités de mesure. Diverses grandeurs peuvent servir à l'établissement des unités de base. Dans différents domaines d'application on construit les systèmes d'unités en partant des unités de base différentes, le choix de telles ou telles unités étant dicté par la commodité d'emploi. C'est ainsi qu'apparurent les différents systèmes d'unités et, en même temps, se posa le problème de conversion des unes unités en les autres.

Sont utilisés les systèmes d'unités suivants: CGS dont les unités de base sont le centimètre, le gramme, la seconde; MKS ayant pour unités de base le mètre, le kilogramme-force et la seconde *), SI qui a comme unités de base le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le degré Kelvin, la candela, ainsi que d'autres systèmes d'unités.

En mécanique (et généralement en pratique) on ne se sert souvent que de trois unités de base (c'est le cas, par exemple, des systèmes d'unités CGS et MKS), les unités de toutes les autres grandeurs, y compris les caractéristiques du champ électromagnétique, étant considérées comme unités de mesure dérivées.

Une fois les unités de base établies, les unités de mesure des autres grandeurs dimensionnées s'obtiennent automatiquement à partir des définitions de celles-ci.

Formule de dimension. L'expression d'une unité dérivée au moyen des unités de base s'appelle dimension. La dimension s'écrit sous forme d'une formule. Dans le système CGS les formules de dimension contiennent trois arguments: les symboles de l'unité de longueur L, de l'unité de temps T et de l'unité de masse M. Par exemple, le symbole de l'unité de force s'écrit sous la forme

$$K = \frac{ML}{T^2} = MLT^{-2}.$$

*) Nous supposons ici que le lecteur connaît, du cours général de physique, les définitions des unités de base, c'est-à-dire qu'il connaît ce que c'est une seconde de temps, etc.

Dans le système CGS les formules de dimension de toutes les grandeurs physiques représentent les monômes de puissance de la forme *)

$$N = L^l T^t M^m, \tag{7.1}$$

où les exposants l, t, m sont des nombres réels, entiers ou fractionnaires.

Dans le système MKS les formules de dimension s'écrivent

$$N = L^{l_1} T^{t_1} K^{k_1}, \tag{7.2}$$

où l_1, t_1 et k_1 sont des exposants correspondants des dimensions.

Le passage des formules (7.1) aux formules correspondantes (7.2) s'effectue en remplaçant le symbole M dans (7.1) par le symbole K d'après la relation $M = KT^2L^{-1}$.

Les formules de dimension permettent de déterminer les facteurs numériques d'échelle servant à calculer les caractéristiques correspondantes lorsque les unités de base changent.

Si l'on passe des unités données de longueur L, de temps T et de masse M aux nouvelles unités dont l'unité de longueur est α fois plus petite, de temps β fois et de masse γ fois plus petites, alors la nouvelle unité de mesure d'une grandeur N ayant la dimension (7.1) sera plus petite que celle initiale de

$$\alpha^l \beta^t \gamma^m \tag{7.3}$$

fois. Cela permet d'établir aisément les échelles de passage pour les unités de mesure dérivées lorsque les valeurs des unités de base changent.

Nombre d'unités de base. Le nombre d'unités de base peut dépasser trois. Par exemple, dans de nombreuses questions de la dynamique des gaz et de la thermodynamique on utilise habituellement, en plus du mètre, du kilogramme et de la seconde, comme unités de base déterminées par voie expérimentale l'unité de température: le degré Celsius ou le degré Fahrenheit, etc., et l'unité d'énergie calorifique: la calorie ou la grande calorie. Ainsi donc on peut introduire et appliquer des systèmes d'unités à cinq unités de base. On conçoit des systèmes d'unités où les unités de base sont celles des grandeurs électromagnétiques, etc. Dans ces cas les formules de dimension représentent des monômes de la forme (7.1) à un nombre plus grand d'arguments.

---

*) La théorie détaillée des dimensions ainsi que la justification de la formule de dimension (7.1) sont exposées dans l'ouvrage cité de L. Sedov, *Similarity and dimensional methods in mechanics*. New York, Academic Press, 1959.

Possibilité d'augmenter le nombre d'unités de base. D'une façon générale, on peut concevoir des systèmes à un nombre arbitraire d'unités de base. En particulier, on peut choisir à partir de l'expérience les unités de mesure indépendantes de longueur, de temps et de vitesse, mais dans ce cas la formule de la vitesse doit s'écrire sous la forme

$$v = k\frac{ds}{dt}, \tag{7.4}$$

où k est une constante dimensionnée, dépendant du choix des unités de mesure de v, ds et dt. Si l'on admet que k est une constante numérique absolue (c'est-à-dire la même dans tous les systèmes d'unités utilisés), égale ou non à l'unité, il en découle que les unités de mesure de v, ds et dt sont dépendantes les unes des autres dans tout système d'unités.

Cette condition est généralement admise en pratique.

Si l'on considère la relation

$$I \cdot \text{énergie calorifique} = \text{énergie mécanique},$$

on peut choisir séparément des unités de mesure indépendantes pour l'énergie calorifique, par exemple, la calorie, et pour l'énergie mécanique, par exemple, le kilogrammètre. Dans ce cas les équations et les formules renfermeront la constante I, équivalent mécanique de la chaleur, ayant pour dimension

$$[I] = \frac{\text{kilogrammètre}}{\text{calorie}}. \tag{7.5}$$

La constante « physique » I est analogue à la constante k dans (7.4).

Possibilité de diminuer le nombre d'unités de base. La constante I peut être regardée comme une constante dimensionnée pour les unités de mesure indépendantes d'énergies mécanique et calorifique ou comme une constante d'échelle, sans dimension, si les unités de mesure d'énergies calorifique et mécanique se distinguent uniquement comme celles de mesure d'une même grandeur telles que, par exemple, le pied et le mètre. De façon analogue on peut envisager l'équation fondamentale de la physique

$$E = mc^2 \tag{7.6}$$

où E est l'énergie, m la masse, c la vitesse de la lumière dans le vide. Si l'on adopte, dans (7.6), que c est une constante universelle qu'on peut prendre égale à l'unité dans la classe des systèmes d'unités admis tout comme la constante k dans (7.4), alors les différentes unités de mesure possibles d'énergie et de masse se trouvent dépendantes les unes des autres (semblablement aux unités de mesure de v, ds et dt dans (7.4) pour $k = 1$).

En se guidant de ces réflexions on peut réduire le nombre d'unités de base. En fixant la constante universelle dimensionnée f de la loi d'attraction universelle

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{7.7}$$

on obtient une relation complémentaire entre les unités de mesure de masse, de temps et de longueur.

Par cette méthode on peut établir divers systèmes d'unités à un nombre différent d'unités de base. En particulier, il est possible de concevoir un système d'unités de mesure universelles où les unités de mesure de toutes les grandeurs seraient fixées une fois pour toutes et pour cette raison toutes ces grandeurs seraient regardées comme des nombres sans dimension.

Relativité des notions de grandeurs dimensionnées et sans dimension. Les notions de grandeurs dimensionnées et sans dimension (abstraites) sont relatives. La signification de cette affirmation est la suivante. Lors de l'étude d'un ou de plusieurs phénomènes on introduit des caractéristiques constantes ou variables des processus et des corps. Pour obtenir les valeurs numériques on se sert effectivement, de façon explicite ou implicite, ou l'on admet l'existence éventuelle d'un ensemble de systèmes d'unités de mesure

La quantité dont la valeur numérique dépend du choix du système d'unités dans l'ensemble de systèmes d'unités admissible est appelée grandeur dimensionnée. La quantité dont la valeur numérique est la même dans tous les systèmes d'unités appartenant à cet ensemble de systèmes est appelée grandeur sans dimension ou abstraite.

Par exemple, on peut faire correspondre à un angle, être géométrique, les différents nombres : le nombre de radians, de degrés, de fractions de l'angle droit, etc. Il en résulte que l'angle est une grandeur dimensionnée si l'on inclut dans l'ensemble des systèmes d'unités admis les systèmes ayant les différentes unités de mesure d'angle. Si, toutefois, on se borne à considérer les systèmes où l'angle n'est mesuré qu'en radians, on peut alors envisager l'angle comme grandeur sans dimension, abstraite. Ce point de vue est fréquemment adopté en pratique.

De façon analogue, n'importe quelle autre quantité (par exemple, le temps, la longueur) peut être considérée comme grandeur sans dimension si l'on utilise pour l'étude de certaines questions un ensemble de systèmes d'unités tel que tous les systèmes d'unités qui en font partie possèdent pour la mesure de cette quantité une même unité. Dans les applications il est commode de concevoir l'angle comme grandeur sans dimension, pour la longueur cette conception est incommode. Cela s'explique par le fait que les systèmes géométriquement semblables ont les mêmes angles correspondants, mais des longueurs correspondantes différentes.

Apparition des constantes physiques dimensionnées parmi les arguments des fonctions analysées. Il résulte de ce qui suit qu'il est utile, dans certains cas, d'augmenter le nombre d'unités de mesure de base.

Toutefois cet avantage disparaît lorsque l'augmentation du nombre des unités de base donne naissance à des constantes physiques complémentaires du type de l'équivalent mécanique de chaleur I, ou de la vitesse de la lumière c, ou de la constante de gravitation f, essentielles pour un problème étudié. De telles constantes entreront dans les équations des processus et dans d'autres conditions du problème; il faut les considérer comme paramètres de définition et inclure aux arguments des relations fonctionnelles étudiées. On montrera plus bas que l'augmentation du nombre d'unités de base ne conduit pas dans le cas général aux simplifications supplémentaires. Tout de même on en tire profit lorsque les considérations physiques supplémentaires suggèrent que de telles constantes (du type I ou f) ne sont pas essentielles dans les relations fonctionnelles en question.

On voit donc que le système standard d'unités avec des constantes fixes I, c et f n'est pas avantageux et n'est pas applicable dans beaucoup de problèmes techniques et physiques.

Utilité éventuelle de l'application de divers systèmes d'unités de mesure. On constate que dans certains domaines scientifiques apparaît une tendance vers l'unification et l'introduction administrative d'un système universel d'unités de mesure. Fréquemment cela s'avère efficace et utile, mais dans le cas général la pratique de rattacher un système d'unités aux constantes physiques ou conditions physiques déterminées paraît artificielle. Au contraire, la possibilité même d'utiliser des systèmes d'unités arbitraires et l'indépendance des lois étudiées du choix du système d'unités pourraient être de grande utilité. D'où l'intérêt de développer, à côté d'un système d'unités unique, la théorie des classes variées et arbitraires d'unités de mesure qui pourrait être mise à la base des méthodes fructueuses de l'expérience et de la théorie.

Dans ces questions il y a une analogie complète entre le choix des systèmes d'unités et celui des systèmes de coordonnées et des systèmes de référence en général. Il est bien possible de fixer un même système déterminé de référence universel auquel on rattacherait tous les phénomènes étudiés. Pourtant la possibilité même d'utiliser divers systèmes de référence et d'en choisir spéciaux, caractéristiques pour des problèmes concrets, représente en physique une base aux méthodes fructueuses de recherche. Plus est, l'hypothèse fondamentale de la physique de l'invariance des lois physiques par rapport aux systèmes de coordonnées et aux systèmes de référence (par exemple, aux systèmes de référence d'inertie) est, en un certain

sens, une autre interprétation des lois physiques universelles telles que la loi de conservation de la quantité de mouvement, celle de conservation de l'énergie et celle de conservation du moment cinétique.

L'invariance universelle des lois physiques par groupes de transformation de Galilée ou de Lorentz est complétée, dans certains problèmes, de l'invariance des relations fonctionnelles étudiées par groupe de transformation de similitude, invariance découlant de la possibilité de conserver toutes les équations et les conditions supplémentaires lors d'une transformation de similitude équivalente au passage d'un système d'unités de mesure à un autre.

Théorème des produits des puissances. Considérons, maintenant, la structure des relations fonctionnelles entre les grandeurs dimensionnées, en général, qui traduisent les régularités physiques invariantes par rapport aux systèmes d'unités.

Soit a une certaine grandeur dimensionnée ou sans dimension, fonction des quantités mutuellement indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, grandeurs, en général, dimensionnées:

$$a = f(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n). \tag{7.8}$$

Certaines grandeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ peuvent, dans le processus considéré, être constantes, d'autres variables. En ce qui concerne ces dernières, supposons soit qu'elles diffèrent de zéro ou de l'infini, soit que la fonction (7.8) demeure continue lorsque les arguments correspondants deviennent nuls ou infinis.

Admettons que les arguments de la relation fonctionnelle (7.8) renferment *toutes* les constantes et les variables, dimensionnées ou sans dimension, dont dépendent les valeurs de la grandeur considérée a.

Déterminons maintenant la structure de la fonction f de (7.8) en supposant que celle-ci traduit une certaine loi physique indépendante du système d'unités choisi.

Supposons que parmi les grandeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les k premières ($k \leqslant n$) ont les dimensions indépendantes (le nombre d'unités de base doit être supérieur ou égal à k).

L'indépendance des dimensions signifie que la formule de dimension d'aucune de ces grandeurs ne peut être exprimée par un monôme de puissances composé des formules de dimension des autres grandeurs. Par exemple, les dimensions de longueur L, de vitesse L/T et d'énergie ML^2/T^2 sont indépendantes; celles de longueur L, de vitesse L/T et d'accélération L/T^2 sont dépendantes.

Généralement, le nombre de grandeurs mécaniques indépendantes ne dépasse pas trois. Supposons que k soit un nombre maximal de paramètres dimensionnés indépendants, alors les dimensions des

grandeurs a, a_{k+1}, ..., a_n s'expriment par celles des paramètres a_1, a_2, ..., a_k.

Adoptons les k grandeurs a_1, a_2, ..., a_k dimensionnées indépendantes comme grandeurs fondamentales et désignons leurs dimensions par

$$[a_1] = A_1, \quad [a_2] = A_2, \ \ldots, \ [a_k] = A_k.$$

Les dimensions des autres grandeurs seront

$$\begin{aligned} [a] &= A_1^{m_1} A_2^{m_2} \ldots A_k^{m_k}, \\ [a_{k+1}] &= A_1^{p_1} A_2^{p_2} \ldots A_k^{p_k}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a_n] &= A_1^{q_1} A_2^{q_2} \ldots A_k^{q_k}. \end{aligned}$$

Affectons maintenant les unités de mesure des grandeurs a_1, a_2, ..., a_k de coefficients respectifs α_1, α_2, ..., α_k; les valeurs numériques de ces grandeurs ainsi que des a, a_{k+1}, ..., a_n dans un nouveau système d'unités seront respectivement

$$\begin{aligned} a_1' &= \alpha_1 a_1, \quad a' = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k} a, \\ a_2' &= \alpha_2 a_2, \quad a_{k+1}' = \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k' &= \alpha_k a_k, \quad a_n' = \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \ldots \alpha_k^{q_k} a_n. \end{aligned}$$

Rapportée à ce nouveau système d'unités la relation (7.8) aura pour expression

$$\begin{aligned} a' = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k} a = \alpha_1^{m_1} \alpha_2^{m_2} \ldots \alpha_k^{m_k} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = f(\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2, \ldots, \alpha_k a_k, \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \ldots \alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \ldots \\ \ldots, \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \ldots \alpha_k^{q_k} a_n). \end{aligned} \tag{7.9}$$

Cette égalité montre que la fonction f possède la propriété d'homogénéité par rapport aux unités de mesure des grandeurs a_1, a_2, ..., a_k.

Définissons les quantités α_1, α_2, ..., α_k de façon à réduire le nombre de variables indépendantes dont dépend la fonction f. Posons

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{a_2}, \ \ldots, \ \alpha_k = \frac{1}{a_k}.$$

Pour ce choix des échelles α_1, α_2, ..., α_k on obtient que les valeurs des k premiers arguments du second membre de (7.9) sont égales à 1 indépendamment des valeurs numériques des grandeurs a_1,

$a_2, \ldots, a_k$ *). Ainsi donc, en se servant du fait que la relation (7.8) est indépendante, par hypothèse, du choix du système d'unités de mesure, on essayera de trouver un système d'unités de mesure tel que les k arguments de la fonction f aient des valeurs constantes fixes égales à l'unité.

Dans ce système d'unités relatif les valeurs numériques des paramètres $a, a_{k+1}, \ldots, a_n$ sont définies par les formules

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k}},$$

$$\Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_k^{p_k}},$$

$$\Pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_k^{q_k}},$$

où $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les valeurs numériques des grandeurs considérées dans le système primitif d'unités de mesure.

Il est aisé de voir que les $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ ne dépendent pas du système primitif d'unités de mesure vu que leur dimension est nulle par rapport aux unités de mesure $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Il est également évident que les quantités $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ ne dépendent point du choix du système des unités de mesure au moyen desquelles sont exprimées les k unités de mesure des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de dimensions indépendantes. Par conséquent, les quantités $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ peuvent être regardées comme adimensionnées. Il s'ensuit que dans tout système d'unités de mesure la relation (7.8) peut se représenter sous la forme

$$\Pi = f(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k}, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}), \tag{7.10}$$

où Π et tous les arguments de la fonction f sont sans dimension.

Ainsi donc, la relation indépendante du choix du système d'unités de mesure entre les $n+1$ grandeurs dimensionnées $a, a_1, \ldots, a_n$ dont k ont les dimensions indépendantes peut être représentée sous forme d'une relation entre les $n+1-k$ quantités $\Pi, \Pi_1, \ldots, \Pi_{n-k}$ combinaisons sans dimension des $n+1$ grandeurs dimensionnées. Ce résultat général de la théorie des dimensions est connu sous le nom de théorème des produits des puissances.

Si une certaine quantité sans dimension est fonction de plusieurs grandeurs dimensionnées, cette fonction ne peut dépendre que des

*) Pour simplifier, nous admettons que les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont finis et non nuls. Il est évident que les résultats qui suivent s'étendent au cas où les arguments $a_1, a_2, \ldots, a_k$ admettent pour valeurs zéro ou l'infini, si seulement la fonction f reste continue dans ces domaines.

combinaisons sans dimension de toutes les grandeurs dimensionnées qui la définissent.

Il est évident que dans la relation (7.10) le système des paramètres sans dimension $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}$ peut être remplacé, en changeant la forme de la fonction f, par un autre système de paramètres sans dimension, fonctions des $n - k$ paramètres mentionnés.

Il est aisé de voir que des n paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dont k au plus sont de dimensions indépendantes, il est impossible de composer plus de $n - k$ combinaisons sans dimension indépendantes. Ceci découle immédiatement des raisonnements ayant servi à déduire la relation (7.10), si l'on choisit pour a n'importe quelle combinaison sans dimension définie par les grandeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Toute relation physique entre les grandeurs dimensionnées peut se formuler comme celle entre les grandeurs sans dimension. D'où l'intérêt de l'application de la méthode de la théorie des dimensions à l'étude des problèmes physiques.

Plus le nombre de paramètres définissant la grandeur étudiée est petit, plus la forme de la relation fonctionnelle est restreinte, plus la recherche est simple. En particulier, si tous les paramètres de définition ont des dimensions indépendantes, alors, la théorie des dimensions aidant, on peut définir cette dépendance complètement à un facteur constant près.

En effet, si $n = k$, on ne peut pas construire une combinaison sans dimension à partir des paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il s'ensuit que la relation fonctionnelle (7.10) peut être représentée sous la forme

$$a = Ca_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n},$$

où C est une constante sans dimension et les exposants $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_n$ se définissent aisément à l'aide de la formule de dimension pour a. La constante C s'obtient soit par l'expérience, soit par voie théorique, en résolvant le problème mathématique correspondant.

Il va de soi que l'utilité de la théorie des dimensions est d'autant plus grande que plus grand est le choix des unités de mesure de base.

On a vu plus haut que le nombre des unités de base peut être choisi arbitrairement; toutefois, l'augmentation du nombre des unités de base entraîne l'apparition des constantes physiques supplémentaires parmi les paramètres de définition. En augmentant le nombre des unités de base nous augmentons le nombre des paramètres de définition; dans le cas général la différence $n + 1 - k$, égale au nombre de paramètres sans dimension, arguments de la relation physique étudiée, demeure invariable.

L'augmentation du nombre des unités de base ne s'avère utile que dans le cas où il vient des hypothèses physiques supplémentaires que les constantes physiques apparaissant avec l'introduction de nouvelles unités de base ne sont pas significatives. Par exemple, si

l'on étudie un phénomène lié à des transformations thermiques et mécaniques, alors pour la mesure de la quantité de chaleur et de l'énergie mécanique il est possible d'utiliser deux unités de base différentes, la calorie et le joule, mais en même temps il est nécessaire d'introduire la constante dimensionnée I, équivalent mécanique de la chaleur. Supposons maintenant que nous étudions le phénomène de la conduction de chaleur dans un fluide parfait incompressible en mouvement. Dans ce cas, la transformation de la chaleur en énergie mécanique et inversement n'ayant pas lieu, les processus calorifique et mécanique qui s'y déroulent ne dépendent pas de la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur. Si même on était en mesure de modifier la valeur de l'équivalent mécanique de la chaleur, les valeurs des grandeurs caractéristiques n'en auraient pas changé. Donc, dans le cas considéré la constante I n'entrera pas dans les relations physiques et l'augmentation du nombre des unités de base permettra d'obtenir, à l'aide de la théorie des dimensions, une information importante complémentaire.

§ 8. Paramètres définissant une classe des phénomènes. Exemples typiques des applications de la théorie des dimensions

Mise en évidence des paramètres de définition à partir de la position mathématique du problème. Les applications de la théorie des dimensions se basent sur l'emploi dans les problèmes étudiés du théorème des produits des puissances. Aussi faut-il énumérer les arguments — paramètres de définition — de la fonction du type (7.8).

En thermodynamique, ch. VI, on a fait connaissance avec la notion de système des paramètres de définition caractérisant l'état et le mouvement d'une petite particule matérielle. Maintenant il s'agit d'établir un système de paramètres de définition découlant de la position des problèmes d'une classe déterminée et décrivant complètement pour un milieu donné chaque problème concret pris dans son ensemble.

La position d'un problème commence par le choix du modèle ou d'un système de modèles des milieux continus et par la schématisation des propriétés des solutions cherchées. On tient compte des conditions de symétrie et l'on choisit des systèmes de coordonnées appropriés. En même temps on établit le système d'équations, le système et la classe des fonctions cherchées et les variables indépendantes.

La liste des paramètres de définition doit contenir les variables indépendantes (par exemple x, y, z, t) et les constantes physiques du type des coefficients de conduction thermique, de viscosité, du module d'élasticité, etc. En outre, pour une classe donnée de problèmes on doit inclure au nombre des paramètres de définition les

caractéristiques données, dimensionnées ou non, du domaine $\mathscr{D}$ occupé par le milieu en mouvement. Enfin il faut décrire et inclure au nombre des paramètres de définition les quantités fixant les fonctions données par les conditions aux limites et initiales.

Lorsque le problème étudié est formulé mathématiquement, on peut aisément composer la table des arguments des fonctions (7.8) traduisant les lois physiques à établir. Telle est la marche à suivre pour obtenir le système des paramètres de définition, une fois le problème mathématiquement posé.

Les paramètres de définition représentent toutes les données dont on a besoin pour calculer les fonctions cherchées par les différentes méthodes, y compris sur les machines calculatrices.

Si l'on se propose à résoudre le problème par voie expérimentale, il faut également donner de façon explicite et énumérer tous les paramètres de définition. C'est la condition indispensable pour que l'expérience puisse être reproduite et l'on puisse comparer les résultats des différentes expériences.

La position mathématique du problème n'est pas nécessaire pour établir la table des paramètres de définition. En établissant la table des paramètres de définition il n'est pas, en général, obligatoire de suivre la méthode ci-dessus basée sur la position mathématique du problème.

On peut écrire le système des paramètres essentiels même dans les cas où l'on ne connaît en général ni le système d'équations, ni les propriétés détaillées du modèle. Il suffit d'avoir les données préalables ou les hypothèses sur la forme des fonctions et des constantes définissant ou susceptibles de définir le modèle, des conditions initiales, des conditions aux frontières et d'autres conditions concrétisant les problèmes à résoudre.

Système fini de paramètres de définition. Quel que soit l'ensemble de systèmes mécaniques effectuant les divers mouvements, il est toujours possible de restreindre la classe des systèmes et des mouvements admissibles de sorte que le système concret et son mouvement déterminé auquel nous nous intéressons soient définis par un nombre fini de paramètres dimensionnés ou sans dimension. Ces restrictions sont habituellement posées en fixant certaines fonctions abstraites ou des constantes en se basant sur les conditions du problème.

Le système de paramètres de définition doit être complet. La théorie des dimensions basée sur le théorème des produits des puissances conduit à des conclusions que fournit la possibilité d'appliquer les unités de mesure spéciales arbitraires à la description des lois physiques. Pour cette raison il est nécessaire, lorsqu'on établit la liste des paramètres définissant une classe de phénomènes, d'indiquer

tous les paramètres dimensionnés, soient-ils variables ou constants, essentiels pour le phénomène étudié. Il est essentiel que les paramètres prennent des valeurs numériques différentes dans différents systèmes d'unités de mesure.

Par exemple, l'accélération de la pesanteur g doit être incluse dans le système de paramètres de définition toutes les fois quand la pesanteur est essentielle, bien que la valeur de g soit la même pour plusieurs mouvements réels. Une fois la grandeur g introduite à titre de paramètre caractéristique, on peut facilement concevoir l'élargissement artificiel de la classe de mouvements en faisant varier la valeur de l'accélération de la pesanteur g. Ce procédé permet parfois d'estimer qualitativement l'influence de tels ou tels paramètres ne pouvant figurer qu'en combinaison avec l'accélération de la pesanteur g.

Le système de paramètres de définition doit être complet. Parmi ces paramètres, dont certains peuvent être des constantes physiques dimensionnées, doivent figurer les grandeurs dimensionnées à l'aide desquelles s'expriment les dimensions de toutes les grandeurs recherchées auxquelles on s'intéresse.

Si le système de paramètres de définition n'est pas complet du point de vue de leurs dimensions et il est impossible de le compléter d'après la signification du problème, cela témoigne alors que la grandeur à déterminer est nulle ou infiniment grande. Cette circonstance est souvent rencontrée lorsqu'on donne les conditions initiales du type source à l'aide de la fonction δ de Dirac.

Insuffisance de la théorie des dimensions pour la résolution des problèmes. Dans le cas général les méthodes d'étude des relations fonctionnelles à l'aide du théorème des produits des puissances sont au fond restreintes et insuffisantes, car elles ne permettent pas d'établir les relations entre les grandeurs sans dimensions. Tous les résultats de la théorie des dimensions restent valables quelles que soient les modifications dans les équations du mouvement si seulement on n'introduit pas de nouvelles grandeurs dimensionnées. Par exemple, dans les équations du mouvement on peut multiplier les divers termes par des nombres sans dimension positifs ou négatifs ou par des fonctions dépendant du système adopté de paramètres de définition.

Les modifications de ce genre n'altérant pas la validité de la théorie des dimensions peuvent atteindre le caractère des régularités physiques.

La principale utilité de la théorie des dimensions dans les recherches théoriques et expérimentales consiste en ce qu'elle permet d'écrire et d'étudier les relations physiques dans la forme adimensionnée, invariante par rapport au choix des systèmes d'unités de mesure.

Problème du piston sphérique dans un gaz. Analysons le problème du piston sphérique qui commence à se dilater à l'instant $t = 0$ au sein d'un gaz au repos à densité initiale ρ_1 et à pression p_1 à partir d'un rayon initial r_0 en suivant la loi donnée $v_n(t) = dr_1/dt$.

Pour définir le mouvement adiabatique perturbé à symétris sphérique d'un gaz parfait, il faut intégrer le système de trois équations (6.30) à trois fonctions inconnues ρ, p et v. Il est évident qu'on peut donner comme arguments indépendants des fonctions inconnues les quantités suivantes:

$$\gamma, \rho_1, p_1, r_0, r, t$$

ainsi que la loi de dilatation du piston

$$v_n(t). \tag{8.1}$$

Ici $\gamma = c_p/c_V$ est l'indice adiabatique, une constante sans dimension. L'indice γ entre dans l'équation de l'adiabatique et dans les conditions à l'onde de choc. Pour que la table de paramètres de définition en contienne un nombre fini, on peut ne considérer que des lois déterminées de dilatation du piston $v_n(t)$, fonctions d'un nombre fini de paramètres. Par exemple, si le piston se dilate de façon uniformément accélérée ou, dans le cas plus général, si $v_n(t)$ est un polynôme, il faut prendre les coefficients du polynôme correspondant comme paramètres de définition.

Considérons le cas important simple où le piston commence à se dilater instantanément au temps $t = 0$ à une vitesse constante

$$v_n = \text{const} = v_0.$$

Pour ce mouvement le système des paramètres de définition peut s'écrire

$$\rho_1, p_1, r_0, \gamma, v_0, r, t$$

ou encore

$$\rho_1, p_1, r_0, \gamma, \frac{v_0}{a_1}, \frac{r_0}{r}, \frac{r}{a_1 t}, \quad \text{où} \quad a_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}} \tag{8.2}$$

(a_1 est la vitesse du son au repos).

En vertu du théorème des produits des puissances on peut écrire la solution cherchée sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho_1 f_1\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \frac{r_0}{r}, \frac{r}{a_1 t}\right), \\ p &= p_1 f_2\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \frac{r_0}{r}, \frac{r}{a_1 t}\right), \\ v &= v_0 f_3\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \frac{r_0}{r}, \frac{r}{a_1 t}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

Dans les formules (8.3), les fonctions sans dimension f_1, f_2, f_3 s'expriment par quatre paramètres sans dimension dont deux, $\frac{r_0}{r}$ et $\frac{r}{a_1 t}$, sont variables.

Les équations (6.30) pour les fonctions f_1, f_2, f_3 se récriront maintenant sous la forme adimensionnée. Ces équations demeurent celles aux dérivées partielles par rapport aux deux variables indépendantes

$$\xi = \frac{r_0}{r} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{r}{a_1 t}.$$

En s'aidant des formules (8.3) il est possible de simplifier notablement le problème envisagé par une schématisation supplémentaire qui consiste à supposer qu'à l'instant initial la dilatation commence à partir du point, c'est-à-dire que $r_0 = 0$.

S'il en est ainsi, la dimension linéaire caractéristique ($r_0 = 0$) disparaît de la table (8.2) et dans (8.5) s'élimine un des arguments variables $\left(\xi = \frac{r_0}{r} = 0\right)$. Par conséquent, le théorème des produits des puissances conduit dans ce cas à la solution de la forme

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho_1 f_1\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \eta\right), \\ p &= p_1 f_2\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \eta\right), \\ v &= v_0 f_3\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \eta\right), \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

ce qui veut dire que les fonctions recherchées ne dépendent des variables r et t que par l'intermédiaire de la combinaison

$$\eta = \frac{r}{a_1 t}.$$

Ainsi donc, en s'appuyant sur la théorie des dimensions dans l'analyse du problème on a établi que la solution du problème en question sur la dilatation d'un piston sphérique à partir d'un point est automodèle.

En mettant (8.4) dans les équations (6.30) on obtient pour les fonctions f_1, f_2, f_3 les équations différentielles ordinaires. Le système primitif des équations non linéaires aux dérivées partielles s'est fortement simplifié, car il s'agit maintenant de résoudre les équations ordinaires, quoique également non linéaires.

Il est évident que les résultats précédents sont valables pour d'autres problèmes relatifs à des mouvements unidimensionnels non stationnaires d'un gaz où le système de paramètres de définition est donné par la table (8.2) ou par une table plus informative complétée, par exemple, par un paramètre constant dimensionné q^* cor-

respondant à l'énergie spécifique dégagée sur le front d'onde de détonation ou d'onde de combustion. Vu que g^* a la dimension de vitesse quadratique, alors dans le problème du piston se dilatant à partir d'un point, c'est-à-dire lorsque $r_0 = 0$, avec une onde de détonation ou de combustion, la solution automodèle pour le domaine du mouvement perturbé est donnée par les formules

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho_1 f_1\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \frac{q^*}{a_1^2}, \frac{r}{a_1 t}\right), \\ p &= p_1 f_2\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \frac{q^*}{a_1^2}, \frac{r}{a_1 t}\right), \\ v &= v_1 f_3\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \frac{q^*}{a_1^2}, \frac{r}{a_1 t}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Dans ce cas, bien que le nombre de paramètres constants augmente, le mouvement est automodèle, car, au fond, il n'y a qu'un seul paramètre variable.

Une analyse plus détaillée du problème automodèle du piston fait dégager une onde de choc sphérique se propageant devant le piston dans le gaz non perturbé. Si on considère les caractéristiques du mouvement sur l'onde de choc, on remarque que le rayon r_2 de l'onde de choc sphérique en cas du problème automodèle se définit par les paramètres

$$\gamma, v_0, a_1, q^*, t.$$

Comme on ne peut pas en former une combinaison sans dimension contenant la variable t, on aura pour r_2 la formule

$$r_2 = a_1 t f\left(\gamma, \frac{v_0}{a_1}, \frac{q^*}{a_1^2}\right). \tag{8.6}$$

Il s'ensuit que dans les problèmes considérés le front de saut se dilate uniformément à une vitesse constante tant avec dégagement de l'énergie dans le saut qu'en l'absence de tout dégagement. C'est là une conclusion importante qu'on a obtenue sans avoir résolu complètement le problème.

Les raisonnements précédents peuvent être étendus, de façon appropriée, aux diverses positions des problèmes conduisant aux solutions automodèles. Attirons attention sur le fait que la solution automodèle était assurée par l'absence de la dimension linéaire caractéristique r_0 ainsi que par l'absence des constantes dont on pourrait composer une constante avec dimension de temps.

Si au lieu du problème de la dilatation du piston sphérique avec une vitesse constante on considère une dilatation uniformément accélérée, on n'obtient plus de solution automodèle et le problème gazodynamique correspondant doit être compté parmi ceux d'une catégorie plus difficile.

Problème de l'explosion ponctuelle. Appliquons maintenant les méthodes de la théorie des dimensions au problème de l'explosion ponctuelle formulé au § 6. On voit sans peine que le système des paramètres de définition de ce problème est représenté par la table

$$\gamma,\ \rho_1,\ p_1,\ E,\ r,\ t. \tag{8.7}$$

Il est aisé de vérifier directement que les trois paramètres indépendants sans dimension correspondants ($n = 6$, $k = 3$) peuvent être donnés de la façon suivante:

$$\gamma,\ \lambda=\frac{\rho_1^{1/5}r}{E^{1/5}t^{2/5}},\quad \tau=\frac{p_1^{5/6}t}{E^{1/3}\rho_1^{1/2}}. \tag{8.8}$$

La distribution de la pression derrière le front d'onde de choc d'explosion se décrit par la formule

$$p=\frac{E}{r^3}f(\gamma,\lambda,\tau). \tag{8.9}$$

Cette formule contenant deux paramètres variables λ et τ, ni le problème de l'explosion ponctuelle ni sa solution ne sont automodèles. La forme de la fonction f de la formule (8.9) peut être trouvée, en particulier, par un calcul numérique en s'appuyant sur les équations (6.30) et sur les conditions initiales et aux frontières complémentaires. Il est possible d'obtenir cette fonction par voie expérimentale. Dans les deux cas les données qu'on obtiendra sur la structure de la relation fonctionnelle (8.9) ont une grande valeur tant pratique que théorique.

Certes, les résultats qu'on trouvera ne correspondent à la réalité que dans les cas où sont justifiées les hypothèses dont on part dans la schématisation et la position du problème (rayonnement négligeable, homogénéité et immobilité primitive de l'atmosphère, etc.). Heureusement, dans la plupart des cas importants (mais il y a des exceptions) la position proposée du problème est pratiquement conforme à la réalité, donc utile.

Pour établir la forme de la fonction (8.9) (pour γ fixé) il suffit d'un seul calcul basé sur certaines données concrètes. Par exemple, le calcul d'une décharge d'étincelle dans l'air permet de déterminer les grandeurs dimensionnées d'une explosion atomique. Une seule explosion expérimentale à l'énergie donnée et à l'altitude déterminée, c'est-à-dire pour des ρ_1 et p_1 connus, suffit. Les résultats de cette expérience permettent de calculer et de prévoir les paramètres pour toutes les expériences à d'autres énergies E et à d'autres caractéristiques connues de l'atmosphère gazeuse homogène.

Tout calcul ou toute expérience semblable permet d'acquérir les données sur la fonction $f(\gamma, \lambda, \tau)$, suffisantes pour décrire une explosion ponctuelle dans toutes autres conditions.

Position du problème de l'explosion forte. Si l'on étudie les effets produits par une explosion à des distances grandes par rapport aux dimensions de la charge mais suffisamment proches du centre d'explosion où la pression est encore très grande, on peut introduire, pour des charges concentrées, d'autres simplifications essentielles dans la position du problème et dans la formule (8.9).

L'expérience et la théorie montrent que lors d'une explosion il se forme, à la frontière du domaine du mouvement perturbé d'un gaz, une onde de choc sphérique se propageant rapidement dans le gaz immobile. La pression p_1 du gaz au repos est incluse dans les paramètres de définition (8.7). L'effet de la pression p_1 sur le mouvement perturbé du gaz n'est mis en évidence que par les conditions aux limites sur l'onde de choc. Ces conditions peuvent être explicitées, compte tenu de (6.33) et de (6.34), en caractéristiques du mouvement du gaz derrière le front d'onde de choc de la façon suivante:

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \mathcal{D}\left(\frac{2}{\gamma+1} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{p_1}{\rho_1\mathcal{D}^2}\right), \\ \rho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\rho_1}{1+\dfrac{2\gamma p}{(\gamma-1)\,p_1\mathcal{D}^2}}, \\ p_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\rho_1\mathcal{D}^2\left[1-\frac{(\gamma-1)\,p_1}{2\rho_1\mathcal{D}^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

Ici, d'après les données du problème, on pose

$$v_{\tau 1} = v_{\tau 2} = 0, \quad v_{n2} = -v_2, \quad v_{n1} = -\mathcal{D}$$

et

$$a_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}}.$$

Au stade initial d'une forte onde de choc, la quantité sans dimension $\gamma p_1/\rho_1\mathcal{D}^2$ dans la formule (8.10) est très petite par rapport à la quantité $\gamma p_2/\rho_1\mathcal{D}^2$, étant donné que la pression derrière le front d'onde dépasse de beaucoup la pression initiale p_1.

L'inégalité $p_2 \gg p_1$ caractérise un brusque saut de pression au niveau du front d'onde, une forte onde d'explosion. En négligeant la petite quantité de l'ordre de $a_1^2/\mathcal{D}^2$ on peut remplacer les conditions (8.10) pour une forte onde de choc par les conditions simplifiées approchées suivantes:

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\mathcal{D}, \\ \rho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1, \\ p_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\rho_1\mathcal{D}^2. \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Les formules (8.11) représentent les conditions à l'onde de choc forte. Ces conditions coincident avec les conditions exactes lorsque la pression en avant du saut est nulle ($p_1 = 0$) ; cela correspond à ce qu'on néglige, à l'intérieur du domaine limité par l'onde de choc, l'énergie initiale par rapport à celle dégagée instantanément lors de l'explosion au centre de symétrie.

Si l'on se sert dans l'analyse de la solution et dans la résolution même du problème des conditions (8.11) au lieu de (8.10), la pression p_1 (et, partant, τ) s'élimine de la liste des paramètres de définition (8.7). Il s'ensuit que le mouvement considéré du gaz lors d'une forte explosion ponctuelle est automodèle.

La distribution des caractéristiques du mouvement perturbé du gaz derrière le front d'onde d'explosion dans le cas d'une forte explosion est donnée par les expressions

$$\left.\begin{aligned} v &= v_2 \mathscr{V}(\gamma, \lambda), \\ p &= p_2 \mathscr{P}(\gamma, \lambda), \\ \rho &= \rho_2 \mathscr{R}(\gamma, \lambda), \end{aligned}\right\} \tag{8.12}$$

où v_2, p_2 et ρ_2 sont définis par les formules (8.11).

Il est évident que le rayon r_2 et la vitesse du front d'onde d'explosion $\mathscr{D} = dr_2/dt$ sont définis par les grandeurs

$$\rho_1, \gamma, E, t,$$

dont la constante γ est sans dimension et les paramètres ρ_1, E et t ont les dimensions indépendantes de sorte qu'on ne peut pas en former une combinaison sans dimension. En vertu du théorème des produits des puissances r_2 et $\mathscr{D}$ vérifient les formules

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= k\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{2/5} \\ \text{et} \qquad & \\ \mathscr{D} &= \frac{2}{5} k \left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5} k^{5/2} \sqrt{\frac{E}{\rho_1}} \frac{1}{\sqrt{r_2^3}}, \end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

où k est une constante sans dimension, fonction uniquement de γ. Les exposants des grandeurs dimensionnées sont déterminés à partir de la condition d'avoir pour le rayon r_2 la dimension de longueur.

Les formules (8.13), obtenues à l'aide de la théorie des dimensions à partir de la seule position du problème sans qu'on ait dû le résoudre effectivement, traduisent la loi du mouvement de l'onde de choc. Pour $t = 0$ il vient que $r_2 = 0$ et la vitesse $\mathscr{D}$ de l'onde de choc est infinie. Avec le temps, r_2 croît et $\mathscr{D}$ diminue. Il est évident que les hypothèses de l'onde de choc forte ne sont valables que dans l'intervalle de temps où $\mathscr{D} \gg a_1$. Il découle de la théorie générale que la vitesse de propagation du front d'onde de choc $\mathscr{D}$ par les parti-

cules est toujours supérieure à la vitesse du son en avant du front d'onde.

On déduit de la formule (8.8) pour λ et de la formule (8.13) que l'on peut prendre pour λ la grandeur

$$\lambda = \frac{r}{r_2}, \tag{8.14}$$

variable dans l'intervalle (0, 1) dans le domaine du mouvement perturbé.

Le problème de la définition du mouvement perturbé se ramène à la définition des fonctions $\mathcal{V}(\gamma, \lambda)$, $\mathcal{P}(\gamma, \lambda)$, $\mathcal{R}(\gamma, \lambda)$ et de la constante $k(\gamma)$. Les conditions à l'onde de choc deviennent simples

$$\mathcal{V}(\gamma, 1) = \mathcal{P}(\gamma, 1) = \mathcal{R}(\gamma, 1) = 1. \tag{8.15}$$

La condition de l'absence au centre de symétrie d'une source massique se ramène à la condition de la réduction à zéro de la vitesse des particules gazeuses, c'est-à-dire que

$$\mathcal{V}(\gamma, 0) = 0. \tag{8.16}$$

La condition de la constance de l'énergie totale dans un mouvement perturbé de gaz a pour expression

$$E = \int_0^{r_2} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}\right) \rho\, 4\pi r^2\, dr.$$

Conformément à (8.12) et à (8.14) cette condition se ramène à la suivante:

$$1 = \frac{32\pi k^5}{25(\gamma^2 - 1)} \int_0^1 (\mathcal{V}'^2 \mathcal{R} + \mathcal{P})\, \lambda^2\, d\lambda. \tag{8.17}$$

Cette condition peut servir à calculer la constante k.

Il est évident que les fonctions $\mathcal{V}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ satisfont aux équations différentielles ordinaires. On doit résoudre ces équations dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, les conditions (8.15) et (8.16) traduisant les conditions aux limites aux deux extrémités de l'intervalle.

Nous n'allons pas résoudre ici ce problème *). Notons seulement que l'on peut obtenir une solution de ce problème à l'aide de la théorie des dimensions, sans recourir aux équations différentielles ordinaires. On peut écrire deux intégrales finies du système de trois

*) L'analyse complète ainsi que la solution de ce problème sont données dans le livre cité de L. Sedov, *Similarity and dimensional methods in mechanics*. New York, Academic Press, 1959.

équations différentielles ordinaires et obtenir ainsi une solution finie exacte et simple du problème sur la forte explosion ponctuelle. La figure 60 représente la solution graphique de ce problème.

Mouvement d'un solide dans un fluide visqueux incompressible illimité. Les problèmes relatifs au mouvement des corps au sein des fluides, au mouvement perturbé des fluides engendré par un corps ainsi que les problèmes concernant les forces d'interaction entre les fluides et les corps sont les problèmes les plus importants, fondamentaux de la mécanique des milieux continus.

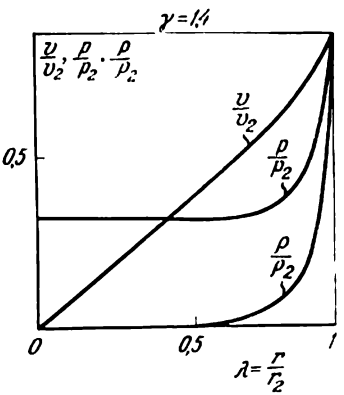


Fig. 60. Distribution de la pression, de la vitesse et de la densité derrière le front d'onde de choc lors d'une forte explosion ponctuelle

Sur les surfaces de contact des corps avec le milieu continu extérieur mobile se crée un système de forces d'interaction. Les propriétés de ces forces d'interaction, leur dépendance des lois de mouvement des corps, de la forme géométrique et d'autres particularités du système des corps en mouvement sont d'une grande importance pratique. Dans les problèmes techniques, le calcul des mouvements de toutes sortes d'objets et d'appareils dans l'eau ou dans l'air, le calcul de l'équilibre des maisons et des tours, des barrages et des pipes-lines, etc. s'appuie en grande partie sur les données relatives aux forces d'interaction entre ces corps et le milieu environnant. La position générale du problème et la théorie des dimensions permettent d'obtenir certains résultats de caractère général ayant une grande valeur pour les méthodes de calcul des diverses constructions et pour leur vérification expérimentale.

Etudions le problème fondamental schématisé traitant d'un solide parfait animé d'un mouvement de translation à une vitesse constante au sein d'un fluide incompressible impondérable qui est en contact avec le corps et remplit tout l'espace extérieur à la surface du corps Σ. Nous admettons aussi que la forme de la surface Σ, bien qu'arbitraire, est fixée et que toutes les dimensions géométriques de Σ sont définies complètement par la donnée d'une seule dimension caractéristique quelconque d. Pour les applications cela représente le cas typique important du mouvement d'un corps solide, mais il faut également envisager les problèmes sur le mouvement des systèmes de corps « solides » déformables et d'autres corps, les problèmes sur les mouvements autres que celui de translation, accélérés, etc.

Dans le cadre de la théorie du mouvement de translation, au sein d'un milieu, des corps finis limités par la surface Σ qui représente la frontière du milieu, on envisage deux positions fondamentales équivalentes du problème.

Mouvement absolu. La première position du problème se rapporte au mouvement « absolu », où l'on sppose que le fluide situé devant le corps est au repos, c'est-à-dire en état non perturbé à l'infini, et que les corps se déplacent à une vitesse de translation constante $\boldsymbol{v}$.

Inversion du mouvement. Problème de l'écoulement. La seconde position du problème correspond au cas de l'écoulement, autour des corps immobiles, d'un fluide en mouvement de translation ayant à l'infini devant le corps une vitesse constante $-\boldsymbol{v}$.

Conformément au principe de Galilée-Newton, ajouter à l'ensemble du système (milieu extérieur plus corps) la vitesse de translation $-\boldsymbol{v}$, c'est effectuer le passage d'un système de coordonnées inertial à un autre. Par conséquent, toutes les interactions dynamiques dans ces deux positions du problème sont équivalentes, quant au champ relatif des vitesses dans le problème de l'écoulement, il s'obtient en ajoutant en tous les points au vecteur vitesse absolue le vecteur $-\boldsymbol{v}$.

De nombreuses méthodes expérimentales d'étude de ce problème sont fondées sur cette équivalence. Le vol aérien ou la navigation des corps s'étudient dans les expériences avec les corps immobiles placés dans des tunnels aérodynamiques, dans des canaux hydrodynamiques et dans d'autres dispositifs appropriés. Il est évident que la condition d'équivalence totale des problèmes du mouvement des corps et de l'écoulement autour des corps entraîne en pratique qu'on néglige l'action d'autres corps, tels que les parois des tunnels aérodynamiques et des canaux en particulier, etc. Dans les cas où cette action n'est pas petite, elle doit être prise en considération.

Dans la position générale du problème, les conditions à l'infini sont formulées pour les états et les vitesses devant le corps. Cela s'explique par ce que lorsqu'on considère le mouvement stationnaire en tant que limite des mouvements non stationnaires de durée infinie, le chemin parcouru par le corps se trouve infiniment grand à la limite. Il s'ensuit que derrière le corps à l'infini le mouvement du fluide est en général perturbé. Cet état des choses est souvent rencontré dans la théorie de l'aile d'envergure finie, dans celle du mouvement des navires, etc.

Système des paramètres déterminant le champ des vitesses et des contraintes lors du mouvement d'un corps dans un fluide visqueux. Traitons d'abord du mouvement d'un corps dans un fluide homogène incompressible visqueux. Il découle des équations générales du

chapitre IV que les propriétés mécaniques d'un fluide incompressible visqueux sont complètement définies par deux constantes : la densité ρ et le coefficient de viscosité μ. Deux fluides incompressibles visqueux chimiquement distincts ayant les mêmes $\rho = \text{const}$ et $\mu = \text{const}$ sont identiques du point de vue de la mécanique. Le problème de l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible visqueux autour des corps immobiles se ramène à l'intégration des équations de Navier-Stokes avec les conditions d'adhérence du fluide sur la surface des corps en supposant que la vitesse $\boldsymbol{v}$ et la pression p_∞ sont données à l'infini dans le flux incident. Pour les équations non linéaires de Navier-Stokes ce problème mathématique est extrêmement difficile ; il n'existe même pas de solution particulière exacte pour un corps quelconque de la forme la plus simple.

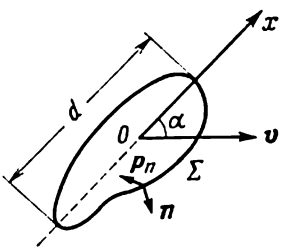


Fig. 61. Schéma illustrant le problème du mouvement d'un corps dans le fluide

On dispose toutefois de toute une variété des résultats théoriques et expérimentaux permettant d'estimer le caractère d'interactions dynamiques et des propriétés de l'écoulement du fluide et de se faire une idée de l'influence exercée par la forme du corps sur la valeur de ces interactions dynamiques.

Dans le système de coordonnées lié au corps le champ stationnaire des vitesses du mouvement relatif ou absolu du fluide incompressible visqueux ainsi que la distribution des pressions et des contraintes visqueuses se définissent comme fonctions du système des paramètres suivant :

$$\rho,\ \mu,\ d,\ v,\ \alpha,\ \beta,\ p_\infty,\ x,\ y,\ z, \tag{8.18}$$

où α, β sont les angles donnant l'orientation du vecteur vitesse de translation constante par rapport au système de coordonnées lié au corps (fig. 61).

Portance et résistance. Soit $\boldsymbol{p}_n\, d\sigma$ la force surfacique exercée par le fluide sur chaque élément de la surface Σ du corps (les forces massiques sont négligeables par hypothèse).

Du point de vue de l'effet résultant des forces élémentaires sur le corps, envisagé comme un solide, ne sont importants que la résultante $\boldsymbol{P}$ (vecteur principal) et le moment résultant $\mathfrak{M}$ définis par les intégrales

$$\boldsymbol{P} = \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n\, d\sigma, \qquad \mathfrak{M} = \int_\Sigma (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_n)\, d\sigma. \tag{8.19}$$

Le vecteur principal $\boldsymbol{P}$ peut être présenté sous forme d'une somme

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{A}.$$

Le vecteur force $\boldsymbol{W}$ parallèle au vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ est dit résistance s'il est de sens opposé à $\boldsymbol{v}$; la force $\boldsymbol{A}$ perpendiculaire au vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ est appelée portance. Les forces $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{A}$ ainsi que le moment $\mathfrak{M}$ peuvent être calculés directement ou indirectement à l'aide des intégrales (8.19) ou déterminés expérimentalement en mesurant les forces à la balance, par exemple, dans des tunnels aérodynamiques ou hydrodynamiques, etc.

Dans les applications pratiques et dans la théorie les forces $\boldsymbol{W}$ et $\boldsymbol{A}$ peuvent être regardées comme des grandeurs définies par les paramètres

$$\rho,\ \mu,\ d,\ v,\ \alpha,\ \beta,\ p_\infty. \tag{8.20}$$

La variation de la pression p_∞ n'influe pas sur les forces résultantes. Il est aisé de voir que la valeur de la pression à l'infini p_∞ n'est pas essentielle pour la définition des forces résultantes. En effet, étant donné que dans les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible la pression ne figure que par ses dérivées par rapport aux coordonnées, l'addition d'une constante à la pression, le champ des vitesses étant fixe, fait passer une solution en une autre. On en déduit que la pression dans le courant est une fonction additive de la pression à l'infini p_∞. Soulignons que cette conclusion n'est valable que pour un fluide incompressible. D'autre part, le théorème de Gauss-Ostrogradsky affirme que pour toute surface fermée Σ limitant le volume V les égalités suivantes ont lieu

$$-\int_\Sigma p_\infty \boldsymbol{n}\, d\sigma = -p_\infty \int_\Sigma [\boldsymbol{i}\cos(\boldsymbol{n}, x) + \boldsymbol{j}\cos(\boldsymbol{n}, y) + \boldsymbol{k}\cos(\boldsymbol{n}, z)]\, d\sigma =$$

$$= -p_\infty \int_V \left(\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{k}}{\partial z}\right) d\tau = 0,$$

$$-\int_\Sigma \boldsymbol{r} \times (p_\infty \boldsymbol{n})\, d\sigma =$$

$$= -p_\infty \int_\Sigma [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{i}\cos(\boldsymbol{n}, x) + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}\cos(\boldsymbol{n}, y) + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{k}\cos(\boldsymbol{n}, z)]\, d\sigma =$$

$$= -p_\infty \int_V \left[\frac{\partial(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{i})}{\partial x} + \frac{\partial(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j})}{\partial y} + \frac{\partial(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{k})}{\partial z}\right] d\tau = 0.$$

Il s'ensuit que l'hypothèse de l'incompressibilité permet d'exclure la grandeur p_∞ des paramètres de définition (8.20). Des six paramètres restants ($n = 6$, $k = 3$) on ne peut former que trois para-

mètres sans dimension :

$$\alpha,\ \beta \quad \text{et} \quad \mathsf{R} = \rho v d/\mu. \tag{8.21}$$

Les angles α et β donnent l'orientation de la vitesse v du corps par rapport à Σ. Si le corps est une sphère, les angles α et β ne sont pas essentiels, dans les cas où l'orientation du vecteur vitesse par rapport au corps n'est pas indifférente, les angles α et β sont des paramètres essentiels. Le nombre sans dimension R est appelé nombre de Reynolds. Le nombre de Reynolds joue un rôle fondamental dans tous les phénomènes liés à la viscosité des fluides.

Il est aisé de vérifier que les combinaisons $\rho\, d^2v^2$ et $\mu\, dv = \rho\, d^2v^2/\mathsf{R}$ ont la dimension d'une force. Maintenant, en vertu du théorème des produits des puissances, on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} W &= c_W(\alpha, \beta, \mathsf{R})\, \rho d^2 v^2, \\ A &= c_A(\alpha, \beta, \mathsf{R})\, \rho d^2 v^2, \\ \mathfrak{M} &= c_{\mathfrak{M}}(\alpha, \beta, \mathsf{R})\, \rho d^3 v^2. \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

Les coefficients abstraits *) c_W, c_A, $c_{\mathfrak{M}}$ ne dépendent que de α, β et du nombre de Reynolds R. La définition de ces coefficients en fonction des arguments cités représente l'un des problèmes fondamentaux de l'aérodynamique et de l'hydrodynamique appliquées et théoriques.

Actuellement, la technique dispose d'un grand nombre de données sur ces coefficients pour les corps les plus différents rencontrés en pratique.

L'influence de la viscosité du fluide sur le mouvement et, en particulier, sur la résistance et sur la portance n'est mise en évidence que par le nombre de Reynolds. La formule (8.21) pour le nombre de Reynolds fait voir que l'influence de la viscosité traduite par le coefficient de viscosité μ est étroitement liée à la densité ρ, à la vitesse v et à l'échelle linéaire d. Pour les différentes fonctions abstraites l'augmentation de la viscosité équivaut à la diminution soit des dimensions linéaires, soit de la vitesse, soit de la densité du fluide. Il va de soi que l'augmentation des dimensions du corps ou de la vitesse du mouvement, la viscosité étant fixée, équivaut à la diminution de la viscosité pour les dimensions et la vitesse fixées.

La figure 62 présente les données expérimentales sur l'influence du nombre de Reynolds sur le coefficient de résistance c_W pour une sphère dans une large gamme de variation du nombre de Reynolds. Les points correspondant aux données expérimentales obtenues dans les différents liquides et dans l'air se placent sur une même courbe unique. Lorsque les valeurs du nombre de Reynolds sont

*) Ici pour des raisons de simplicité nous ne mentionnons que les coefficients pour les modules de la force A et du moment $\mathfrak{M}$. En pratique il faut envisager les coefficients analogues pour les composantes de ces vecteurs.

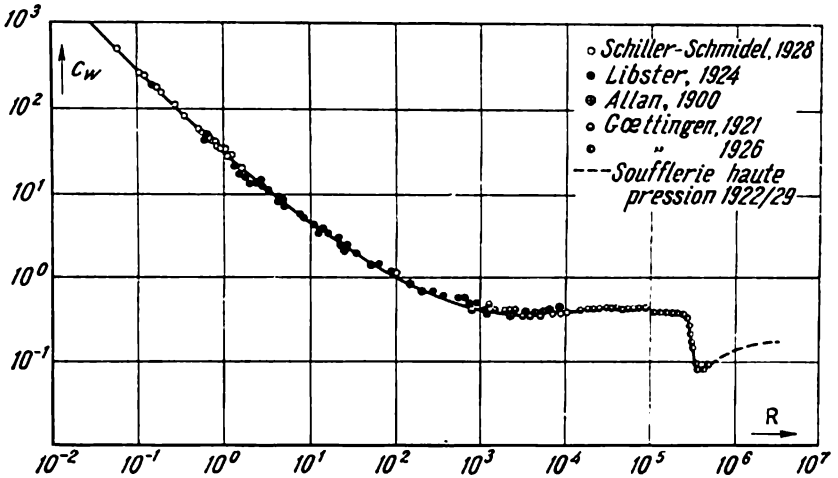


Fig. 62. Coefficient de résistance de la sphère $c_W = \dfrac{W}{\dfrac{\pi d^2}{4} \cdot \dfrac{\rho v^2}{2}}$ en fonction du nombre de Reynolds $R = \dfrac{\rho v d}{\mu}$ (d est le diamètre de la sphère)

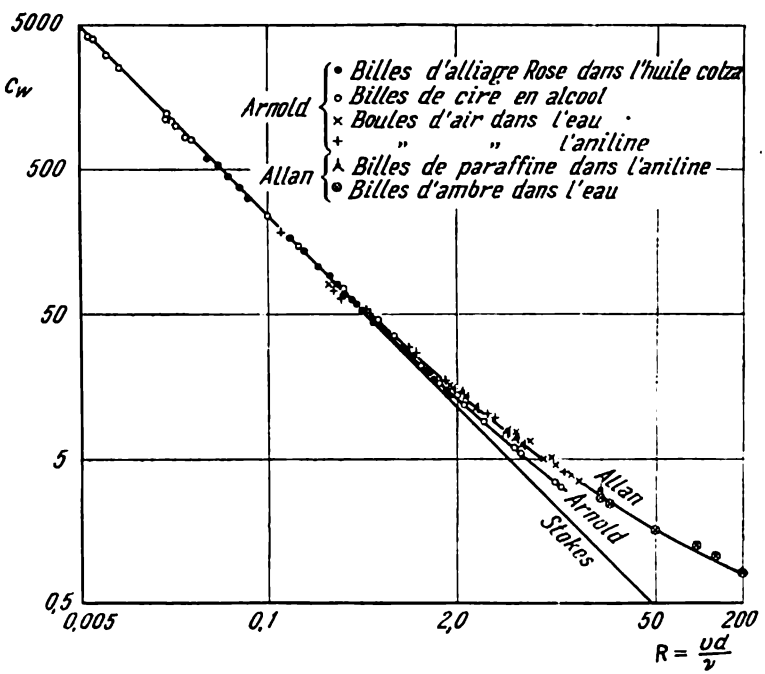


Fig. 63. Coefficient de résistance de la sphère pour de petites valeurs du nombre de Reynolds. L'échelle des abscisses est logarithmique ($\nu = \mu/\rho$)

petites, cette courbe se laisse décrire par l'équation $c_W = c/\mathsf{R}$; sur la figure 63 c'est une droite, car les abscisses sont données à l'échelle logarithmique. A titre d'exemple, sur la figure 64 sont montrées les courbes typiques donnant les coefficients c_W et c_A de l'aile d'avion en fonction de l'angle d'attaque, l'angle entre la vitesse du mouvement et le profil d'aile.

En utilisant (8.22) et les coefficients sans dimension c_A et c_W déterminés au cours d'une expérience quelconque, par exemple, en étudiant le mouvement d'un corps donné dans l'eau, il est possible de calculer, sans recourir à l'expérience, la résistance et la portance pour un autre corps de même forme géométrique mais de dimensions différentes et se déplaçant dans d'autres fluides et même dans l'air si seulement on peut négliger la compressibilité de l'air. Il est évident que dans ce genre de calculs on doit disposer des données sur les coefficients c_W et c_A pour les mêmes valeurs des angles α, β et les mêmes valeurs du nombre de Reynolds $\mathsf{R} = \rho v d/\mu$. Les expériences préalables doivent fournir les coefficients c_W et c_A dans les intervalles nécessaires des arguments sans dimension α, β et R déterminés par les problèmes pratiques.

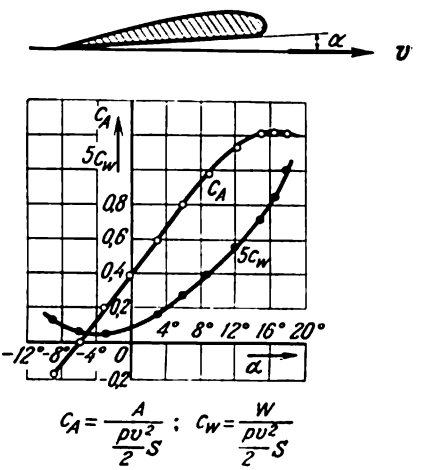


Fig. 64. Courbes types donnant les coefficients de portance c_A et de résistance c_W d'une aile en fonction de l'angle d'attaque α (S est la section de l'aile)

Mouvement dans un fluide visqueux à faible nombre de Reynolds. Analysons le cas d'un mouvement lent dans un fluide visqueux, ce qui correspond aux petits nombres de Reynolds. La diminution du nombre de Reynolds est liée à l'augmentation du coefficient de viscosité μ et à l'augmentation relative des forces de contraintes internes occasionnées par la viscosité. Si l'on néglige les forces d'inertie devant les forces de viscosité, cela équivaut à supposer que la densité n'est plus un paramètre essentiel. Négliger la densité correspond à l'élimination des équations de Navier-Stokes du terme contenant l'accélération. Les problèmes mathématiques et leurs solutions basés sur ces prémisses constituent la théorie approchée de Stokes.

Dans ce cas la résistance W qu'oppose le milieu au mouvement de translation d'un corps de forme donnée à une vitesse constante

v est définie par les paramètres

$$\mu,\ d,\ v,\ \alpha,\ \beta. \tag{8.23}$$

Les grandeurs μ, d et v ne donnant lieu à aucune combinaison sans dimension, il s'ensuit que

$$W = c(\alpha, \beta)\,\mu\, dv = \frac{c}{\mathsf{R}}\,\rho d^2 v^2, \quad c_W = \frac{c(\alpha, \beta)}{\mathsf{R}}. \tag{8.24}$$

Par conséquent, lorsque le nombre de Reynolds est petit, la résistance (ainsi que la portance) est proportionnelle à la vitesse à la puissance 1 du mouvement du corps, à sa dimension linéaire d et au coefficient de viscosité μ. Le coefficient sans dimension c ne dépend que de la direction de la vitesse par rapport à la surface du corps. Pour une sphère c est une constante que l'on peut trouver à partir d'une seule expérience. Les calculs théoriques donnent pour la sphère $c = 3\pi$ si d est le diamètre de la sphère. Pour les corps de forme quelconque de la première formule (8.24) on tire l'expression $c_W = c(\alpha, \beta)/\mathsf{R}$ donnant le coefficient c_W en fonction du nombre de Reynolds pour des petites valeurs de celui-ci. Cette formule est en bon accord avec l'expérience qui permet d'indiquer les valeurs maxima du nombre de Reynolds, fonction de la forme du corps, pour lesquelles la formule (8.24) est encore pratiquement applicable.

La loi de la résistance (8.24) joue, en particulier, pour la description du processus de sédimentation de petites particules dans un liquide. Pourtant, s'il s'agit du mouvement des sous-marins dans l'eau, des appareils volants dans l'air ou même des automobiles, la formule (8.24) n'est plus efficace, car les nombres de Reynolds correspondants deviennent grands à cause des grandes dimensions et des grandes vitesses des corps en mouvement.

Mouvement dans un fluide visqueux pour de très grands nombres de Reynolds. Dans un fluide parfait $\mu = 0$, d'où les valeurs infiniment grandes du nombre de Reynolds. Les grands nombres de Reynolds s'obtiennent également pour $\mu \neq 0$ si seulement $vd \to \infty$, c'est-à-dire pour les corps de très grandes dimensions et, généralement parlant, pour les très grandes vitesses de mouvement. Dans un fluide parfait, la résistance et la portance se définissent par les paramètres

$$\rho,\ d,\ v,\ \alpha,\ \beta \text{ et } \mathsf{R} = \infty. \tag{8.25}$$

Par conséquent, l'écoulement stationnaire autour d'un corps dans un fluide parfait vérifie les formules

$$W = c_W(\alpha, \beta)\,\rho\, d^2 v^2, \quad A = c_A(\alpha, \beta)\,\rho\, d^2 v^2. \tag{8.26}$$

D'après les formules (8.26), dans un fluide parfait ou, d'une manière approchée, dans un fluide visqueux pour $\mathsf{R} \to \infty$ la résistance et

la portance sont proportionnelles au carré de la vitesse de mouvement v^2, au maître couple d^2 et à la densité du fluide. Dans de nombreux cas importants, ces régularités, obtenues à partir de la position du problème à l'aide du seul théorème des produits des puissances, sont bien vérifiées par l'expérience et correspondent à très haute précision aux calculs théoriques dans le cadre de l'hydrodynamique du fluide parfait incompressible.

Résistance des navires. Lors du mouvement du navire sur la surface de l'eau, une portion de la frontière du liquide est une surface libre. Le mouvement perturbé de l'eau est dû à sa propriété de pondérabilité qui fait que la surface de l'eau se ride d'ondes. La portance et la résistance que l'eau oppose au mouvement du navire dépendent de la pondérabilité de l'eau. Ainsi, pour le mouvement de translation du navire à une vitesse horizontale constante d'orientation fixe relativement à la surface libre du liquide remplissant tout le demi-espace inférieur, le système de paramètres de définition comprendra

$$\rho,\ \mu,\ g,\ d,\ v. \tag{8.27}$$

A partir de ces paramètres ($n = 5$, $k = 3$) on peut composer deux combinaisons sans dimension indépendantes

$$\frac{\rho v d}{\mu} = \mathsf{R}, \qquad \frac{v}{\sqrt{gd}} = \mathsf{F}. \tag{8.28}$$

Le paramètre sans dimension F est appelé nombre de Froude.

Le nombre de Froude est un paramètre sans dimension essentiel dans tous les problèmes où v, d, g sont présents parmi les paramètres de définition. La pesanteur est prise en considération et se manifeste, dans le cas des grandeurs de définition sans dimension, par le nombre de Froude.

La formule de la résistance de la coque d'un navire s'écrit

$$W = c_W(\mathsf{R}, \mathsf{F})\, \rho S v^2, \tag{8.29}$$

où S est la surface caractéristique qu'on prend d'habitude égale à l'aire de la carène lorsque le navire est en équilibre sur la surface de l'eau. La définition de c_W en fonction de R, F et de la forme géométrique de la coque est un problème fondamental de l'hydrodynamique des navires.

Les paramètres sans dimension R et F en tant qu'arguments caractéristiques sont rencontrés non seulement dans les problèmes ci-dessus; ils jouent un rôle très important dans beaucoup d'autres cas lorsque les paramètres de définition comportent les grandeurs ρ, μ, g, v et d, autrement dit, toujours quand la viscosité et la pesan-

teur du milieu ne sont pas négligeables. En particulier, le nombre de Reynolds est d'une importance fondamentale dans l'étude du mouvement d'un fluide visqueux dans les tuyaux.

Problème du mouvement d'un corps dans un gaz parfait. Modifions légèrement la position du problème fondamental sur le mouvement stationnaire du corps dans un fluide illimité en admettant que le milieu extérieur est un gaz parfait. On prend en considération la compressibilité du gaz et on pose que les processus dans chaque particule sont adiabatiques, réversibles dans le domaine des mouvements continus et irréversibles au passage des particules de gaz par les sauts de compression dont la présence dans le courant est admise.

Dans le problème de l'écoulement autour d'un corps immobile sont données à l'infini la pression p_∞, la densité ρ_∞ et la vitesse du courant v_∞. Dans ce cas la distribution des caractéristiques d'état et de mouvement du gaz est donnée par le système de paramètres

$$\gamma,\ p_\infty,\ \rho_\infty,\ v_\infty,\ \alpha,\ \beta,\ d,\ x,\ y,\ z. \tag{8.30}$$

Les coordonnées des points x, y, z de l'espace sont prises dans un système lié au corps. On a $n = 10$ et $k = 3$. On voit que toutes les grandeurs sans dimension inconnues se définissent par les sept paramètres sans dimension suivants:

$$\gamma,\ \frac{v_\infty}{a_\infty} = \mathbf{M}_\infty,\ \alpha,\ \beta,\ \frac{x}{d},\ \frac{y}{d},\ \frac{z}{d}, \tag{8.31}$$

avec

$$a_\infty = \sqrt{\frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty}},$$

où, comme ci-dessus, α, β sont des angles d'orientation du flux incident par rapport au corps; a_∞ est la vitesse du son à l'infini dans le flux incident et $\mathbf{M}_\infty$ le nombre de Mach. Dans le problème étudié le nombre de Mach $\mathbf{M}_\infty$ joue le rôle analogue à celui du nombre de Reynolds ou du nombre de Froude dans les problèmes envisagés plus haut.

Dans le système de paramètres (8.30) peut être absente la dimension linéaire d, par exemple, comme c'est le cas du problème de l'écoulement autour d'un cône et d'un coin infinis lorsque l'origine des coordonnées est située au nez du corps respectif. Le problème est alors automodèle; au lieu de trois arguments sans dimension x/d, y/d, z/d on en obtient seulement deux: y/x, z/x.

Dans le problème analysé, la résistance et la portance s'expriment respectivement par

$$W = c_W(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{M}_\infty)\,\rho d^2 v_\infty^2, \quad A = c_A(\alpha, \beta, \gamma, \mathbf{M}_\infty)\,\rho d^2 v_\infty^2. \tag{8.32}$$

Il est évident que dans le cas d'un gaz parfait compressible la dépendance quadratique des forces W et A de la vitesse v est rompue

à cause de l'influence du nombre de Mach. Les formules (8.32) sont vraies tant pour les vitesses subsoniques ($M_\infty < 1$) que supersoniques ($M_\infty > 1$) du courant incident. Pour l'écoulement à des vitesses supersoniques on admet, dans le courant, l'existence des sauts de compression. Les fonctions $c_W(\alpha, \beta, \gamma, M_\infty)$ et $c_A(\alpha, \beta, \gamma, M_\infty)$ peuvent être déterminées soit théoriquement, en résolvant le problème hydrodynamique correspondant, soit à l'aide des expériences dans des tunnels aérodynamiques, sur des dispositifs gazodynamiques ou en vol libre.

Problème de Boussinesq. Prenons le problème classique de Boussinesq de l'élasticité. Soit un milieu homogène élastique soumis à la loi de Hooke et remplissant le demi-espace. Sur le plan qui est une surface libre du demi-espace élastique les forces massiques extérieures sont absentes par hypothèse.

L'état initial non déformé du demi-espace correspond à un état où aucune charge extérieure ni contrainte intérieure ne se manifestent. L'état déformé se crée lorsque, dans un point de la surface libre du demi-espace élastique, est appliquée la force concentrée $\mathcal{P}$. Admettons, pour simplifier, que la force $\mathcal{P}$ est perpendiculaire au plan frontière en état non déformé (fig. 65). Il s'agit de déterminer l'état contraint et déformé du demi-espace élastique en équilibre en supposant que lorsqu'on s'éloigne du point O vers l'infini, les déplacements tendent vers zéro. Il est clair que la solution de ce problème a une symétrie axiale, l'axe de symétrie passant par le vecteur force.

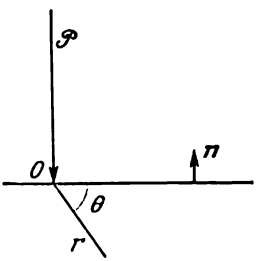


Fig. 65. Schéma illustrant le problème de Boussinesq

Envisageons ce problème dans le cadre de l'élasticité linéaire avec la condition aux frontières linéarisée pour la surface libre mais rapportée au plan frontière non perturbé initial. Cette condition aux frontières a la forme

$$p_n = 0$$

en tous les points de la surface libre, excepté le point O où p_{nn} tend vers l'infini de la manière que

$$p_{nn} = \mathcal{P}\delta(r), \tag{8.33}$$

$\delta(r)$ étant la fonction delta de Dirac.

On voit à partir des équations du mouvement, des conditions supplémentaires (8.33) et des conditions à l'infini que le vecteur déplacement et les composantes du tenseur des contraintes internes

sont définis par les paramètres suivants:

$$\sigma, E, \mathcal{P}, r, \theta, \tag{8.34}$$

où r et θ sont les coordonnées polaires centrées en O dans les plans passant par le vecteur force $\mathcal{P}$; σ est le coefficient de Poisson et E le module d'Young. Les équations de l'équilibre représentent des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes r et θ. Les cinq paramètres (8.34) ne fournissent que trois combinaisons sans dimension indépendantes

$$\sigma, \theta, \frac{\mathcal{P}}{Er^2}, \tag{8.35}$$

car le module d'Young a la dimension de pression. D'où l'on tire que toutes les grandeurs sans dimension recherchées dépendent des trois paramètres (8.35).

La linéarisation du problème est de première importance. Comme la force $\mathcal{P}$ entre dans la condition aux frontières linéairement, le champ des déplacements et des contraintes internes en dépend aussi linéairement, c'est-à-dire que toutes les composantes recherchées du vecteur déplacement et du tenseur des contraintes internes sont simplement proportionnelles au paramètre $\mathcal{P}/Er^2$. Ainsi donc, connaissant les dimensions des grandeurs recherchées, on sait les définir complètement en fonction du rayon vecteur r. Par exemple, le vecteur déplacement $\boldsymbol{w}$ $(\mathcal{P}, E, \sigma, r, \theta)$ dont la dimension est celle de longueur, s'écrit

$$\boldsymbol{w} = \frac{\mathcal{P}}{Er^2} r \boldsymbol{f}(\sigma, \theta), \tag{8.36}$$

où $\boldsymbol{f}(\sigma, \theta)$ est un vecteur qui ne dépend que d'une seule coordonnée variable.

La substitution de la formule (8.36) dans les équations de l'équilibre conduit aux équations différentielles ordinaires pour les fonctions sans dimension recherchées. Cette circonstance simplifie considérablement le problème: la solution cherchée s'obtient facilement par l'intégration des équations différentielles ordinaires correspondantes.

§ 9. Similitude et simulation des phénomènes

Similitude physique et simulation. La théorie de la similitude et des dimensions joue un grand rôle dans la construction des modèles de divers phénomènes. La simulation consiste à remplacer l'étude d'un phénomène naturel par celle d'un phénomène semblable sur un modèle de plus petite ou plus grande échelle, habituellement dans des conditions spéciales de laboratoire. Le but principal des modèles est de donner, à partir des résultats expérimentaux, les

réponses quant au caractère des effets et de diverses grandeurs propres au phénomène étudié de la nature.

Dans la plupart des cas la simulation est basée sur la similitude physique des phénomènes étudiés. On acquiert alors les renseignements désirés sur un phénomène naturel en étudiant un phénomène physiquement semblable plus facile à réaliser. La similitude mécanique ou, en général, la similitude physique est une généralisation de la similitude géométrique. Deux figures géométriques sont semblables si le rapport entre toutes les longueurs respectives est le même. Si l'on connaît le facteur de similitude, l'échelle, alors en multipliant simplement les dimensions d'une figure géométrique par la valeur de l'échelle on peut obtenir les dimensions d'une autre figure qui lui est semblable. Deux phénomènes sont physiquement semblables si l'on peut obtenir, d'après les caractéristiques données de l'un, les caractéristiques de l'autre par un calcul simple analogue au passage d'un système d'unités à un autre. Il suffit pour ce calcul de connaître les « échelles ».

Les caractéristiques numériques de deux phénomènes différents mais semblables peuvent être regardées comme les caractéristiques numériques d'un même phénomène mais exprimées dans deux systèmes d'unités différents. Pour tout groupe de phénomènes semblables toutes les caractéristiques sans dimension correspondantes (les combinaisons sans dimension des grandeurs dimensionnées) ont les mêmes valeurs numériques. Il est aisé de voir que la réciproque est également vraie, c'est-à-dire si toutes les caractéristiques sans dimension correspondantes de deux mouvements sont les mêmes, les mouvements sont semblables. Une suite des mouvements mécaniquement semblables définit le régime de mouvement.

On peut entendre la similitude de deux phénomènes dans un sens plus large en admettant que la définition ci-dessus se rapporte à un certain système spécial de caractéristiques définissant complètement le phénomène et permettant de trouver toutes autres caractéristiques, ces dernières ne pouvant pourtant pas être obtenues par simple multiplication par les échelles correspondantes lorsqu'on passe d'un phénomène à un autre, « semblable ». Dans ce sens, par exemple, deux ellipses quelconques sont semblables si elles sont rapportées aux axes cartésiens dirigés suivant leurs axes principaux. Il est possible donc de trouver les coordonnées cartésiennes des points de toute ellipse à partir des coordonnées d'une ellipse quelconque (similitude affine).

Pour conserver la similitude dans un modèle il faut respecter certaines conditions. Cependant, en pratique, ces conditions assurant la similitude du phénomène en gros ne sont généralement pas observées. Il se pose alors le problème de l'erreur (effet d'échelle) lorsqu'on applique au phénomène naturel les résultats obtenus sur les modèles.

Critères de similitude. Une fois le système des paramètres définissant la classe intéressée des phénomènes établi, il devient aisé d'établir les conditions de similitude de deux phénomènes.

En effet, soit un phénomène défini par n paramètres dont certains sans dimension. Supposons ensuite que les dimensions des variables essentielles et des constantes physiques s'expriment par celles de k paramètres de dimensions indépendantes ($k \leqslant n$). Il est clair qu'à partir de n grandeurs on peut composer $n - k$ combinaisons sans dimension indépendantes. Toutes les caractéristiques sans dimension du phénomène sont alors regardées comme fonctions de ces $n - k$ combinaisons sans dimension indépendantes, composées des paramètres de définition. Par conséquent, l'ensemble de toutes les grandeurs sans dimension composées des caractéristiques du phénomène contient une certaine base, système des grandeurs sans dimension définissant toutes les autres.

La classe des phénomènes définie par une position correspondante du problème est composée de phénomènes qui ne sont pas en général semblables. Pour en séparer une sous-classe de phénomènes semblables on recourt à la condition suivante.

Pour que deux phénomènes soient semblables, il faut et il suffit que les valeurs numériques des combinaisons sans dimension constituant une base, pour ces deux phénomènes, soient les mêmes. Les conditions de la constance de la base des paramètres sans dimension composés des grandeurs données sont dites critères de similitude.

Si les conditions de la similitude sont remplies, pour calculer toutes les caractéristiques d'un phénomène naturel d'après les caractéristiques dimensionnées du modèle il faut connaître les échelles pour toutes les grandeurs correspondantes. Si le phénomène est défini par n paramètres dont k ont les dimensions indépendantes, pour ces derniers les échelles peuvent être choisies arbitraires mais compte tenu des conditions du problème et également des conditions de l'expérience s'il s'agit d'une expérience. Les échelles de toutes les autres grandeurs sont facilement obtenues à partir des formules exprimant les dimensions de chaque grandeur dimensionnée à l'aide des dimensions des k grandeurs de dimensions indépendantes dont les échelles sont suggérées par les conditions de l'expérience et de la position du problème.

Similitude lors de l'écoulement d'un fluide incompressible visqueux autour d'un corps. Dans le problème de l'écoulement stationnaire autour d'un corps d'un fluide incompressible visqueux toutes les grandeurs sans dimension sont définies par trois paramètres: les angles α, β et le nombre de Reynolds R. Les conditions de la similitude physique — critères de similitude — sont données par les

relations

$$\alpha = \text{const},$$
$$\beta = \text{const},$$
$$R = \frac{\rho v d}{\mu} = \text{const}.$$

Ici on sous-entend que les valeurs constantes de α, β et R sont les mêmes dans divers phénomènes semblables (homologues).

Les données détenues sur les modèles ne peuvent être appliquées au phénomène naturel que pour les mêmes valeurs de α, β et R. Les deux premières conditions sont faciles à réaliser dans la pratique. La troisième condition ($R = \text{const}$) est plus difficile à satisfaire, surtout dans le cas où le corps baigné par le fluide a de grandes dimensions, comme, par exemple, l'aile d'un avion. Si on simule le phénomène à une échelle plus petite, pour conserver la valeur du nombre de Reynolds il faut soit augmenter la vitesse d'écoulement, ce qui est pratiquement irréalisable, soit modifier essentiellement la densité et la viscosité du fluide. Dans la pratique cette circonstance complique considérablement l'étude de la résistance aérodynamique. La nécessité de maintenir constante la valeur du nombre de Reynolds a conduit à construire de gigantesques tunnels aérodynamiques à air libre où l'on puisse réaliser les essais en soufflerie des avions grandeur nature, ainsi que les souffleries à retour guidé dans lesquelles l'air comprimé s'écoule à une grande vitesse en circuit fermé.

Les recherches théoriques et expérimentales spéciales montrent que dans les cas des corps de forme bien effilée le nombre de Reynolds n'influe notablement que sur le coefficient sans dimension de la résistance à l'avancement et, parfois légèrement, sur le coefficient sans dimension de portance et sur d'autres grandeurs jouant un très grand rôle dans diverses questions pratiques. On en déduit que la différence entre les valeurs du nombre de Reynolds sur le modèle et dans la nature n'est pas essentielle dans certaines questions.

Similitude lors de l'écoulement d'un gaz compressible autour d'un corps. Nous avons indiqué les conditions de la similitude pour les mouvements des corps sans tenir compte de la compressibilité de l'air qui est négligeable pour des vitesses faibles devant la vitesse du son.

En aérodynamique, l'influence de la compressibilité dans les vols avec les grandes vitesses subsoniques ou les vitesses supersoniques est évaluée en premier lieu par le nombre de Mach. Dans la position du problème sur le mouvement d'une aile ou d'un corps de forme généralement arbitraire dans une masse de gaz illimitée en cas de processus adiabatiques, les paramètres de définition sans dimension sont donnés par la table (8.31). Les paramètres définissant les caractéristiques globales d'une veine de gaz ou celles du mouve-

ment et de l'état dans les points singuliers sont les suivants :

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \mathbf{M}_\infty = \frac{v_\infty}{a_\infty}.$$

On doit assurer l'égalité des valeurs de ces paramètres tant dans la nature que dans l'épreuve sur le modèle. La constance de γ et du nombre de Mach $\mathbf{M}_\infty$ sont les critères les plus essentiels de similitude. Les valeurs de γ dépendent des propriétés du gaz. Pour un même gaz la condition γ = const est remplie automatiquement. La constance de $\mathbf{M}_\infty$ doit être assurée par les conditions de l'expérience.

Difficultés de la simulation. Lorsqu'on fait varier les paramètres principaux dans la recherche sur les modèles, on voit apparaître divers effets non essentiels dans la position adoptée du problème relatif au phénomène naturel étudié. Par exemple, en négligeant un écoulement stationnaire de l'air autour d'une aile à faible vitesse, on a affaire à un nombre de Mach petit, ce qui permet de ne pas tenir compte de la compressibilité de l'air. Dans ce cas c'est le nombre de Reynolds qui est le critère de similitude principal. Si l'on veut conserver le nombre de Reynolds $\mathbf{R} = \rho v d/\mu$ lors d'une expérience avec un modèle placé dans une soufflerie aérodynamique, on est conduit, en général, lorsqu'on réduit la dimension d, à la nécessité d'augmenter la vitesse v. L'augmentation de la vitesse du courant incident entraîne celle du nombre de Mach $\mathbf{M}_\infty$ qui pour le petit modèle sera plus grand que pour la nature et, bien que l'influence de la compressibilité dans la nature puisse être négligeable, elle peut devenir notable dans le modèle en compromettant la similitude. De telles circonstances compliquent notablement les recherches aérodynamiques en apportant les exigences supplémentaires qu'on doit satisfaire lors de la construction des souffleries aérodynamiques.

Un autre exemple des effets essentiels absents dans les phénomènes naturels mais pouvant se manifester dans les expériences sur les modèles est fourni par les effets de cavitation apparaissant lors du mouvement des corps dans l'eau et par les effets de condensation des gaz dans les appareils d'épreuve. Ces effets sont dus à la diminution des valeurs dimensionnées de la pression et de la température dans certaines régions du milieu en mouvement. (La cavitation c'est la formation de cavités dans un liquide en mouvement dans les régions où la pression du liquide est inférieure à la tension de vapeur ; la condensation de l'air est occasionnée, dans les souffleries, par une brusque baisse de la température au cours d'une dilatation adiabatique des particules de gaz dans certaines parties de la veine gazeuse.) Pour éliminer la cavitation dans l'eau, il faut (voir ch. VIII) augmenter la valeur « non essentielle » de la pression extérieure à l'infini p_∞. Pour faire disparaître la condensation de gaz, il faut

augmenter dans le courant incident la température T_∞ non essentielle du point de vue des critères de similitude dans la position primitive du problème. Pour cette raison on échauffe considérablement la masse d'air dans les souffleries prévues pour des grandes vitesses supersoniques.

Simulation de la navigation d'un navire. Pour étudier la résistance des navires et autres questions hydrodynamiques (formation d'embruns, ballotement, submersion du pont pendant une tempête, etc.), on effectue les essais des petits modèles des navires à l'aide des remorqueurs, dans des canaux spéciaux.

Pour assurer la similitude de la nature et du modèle, il faut, comme il découle de la position du problème ci-dessus et de (8.28), maintenir constants les nombres de Reynolds R et de Froude F. On voit cependant que dans le cas de l'eau, lorsque g = const, il est impossible de satisfaire simultanément aux égalités

$$\mathsf{R} = \frac{\rho v d}{\mu} = \text{const} \quad \text{et} \quad \mathsf{F} = \frac{v}{\sqrt{gd}} = \text{const}$$

si l'on diminue la dimension d. De la constance du nombre de Reynolds il vient que la vitesse du modèle doit être supérieure à celle de la nature, tandis que la constance du nombre de Froude implique l'inverse.

Simulation selon Froude. Ainsi donc, rigoureusement parlant, la similitude mécanique totale dans la simulation de la navigation des navires n'est pas en général réalisable si l'on pose la condition de conserver g et $\nu = \mu/\rho$. Or, une analyse plus détaillée des phénomènes hydrodynamiques montre que l'influence du nombre de Reynolds peut être souvent prise en considération à l'aide des calculs supplémentaires et d'expériences simples. Dans l'hydrodynamique des navires ordinaires, la plus grande importance revient au nombre de Froude, donc lors de la simulation on essaie de conserver constant le nombre de Froude, c'est-à-dire qu'on simule selon Froude.

Simulation de l'équilibre des constructions élastiques. Envisageons maintenant un problème de la simulation de l'équilibre des constructions élastiques. Soit une construction faite d'un matériau homogène, comme, par exemple, la ferme d'un pont. L'élasticité d'un matériau isotrope est définie par deux constantes : le module d'Young E, kgf/m^2, et le coefficient de Poisson σ, grandeur sans dimension. Prenons des constructions géométriquement semblables et composons la table des paramètres caractéristiques.

Pour déterminer toutes les dimensions du modèle il suffit de donner une certaine dimension caractéristique d. Si, en état d'équilibre considéré, le poids de la construction est essentiel, le poids

spécifique du matériau $\gamma = \rho g$, kgf/cm^3, doit figurer en tant que paramètre de définition. Outre le poids des éléments de la construction, celle-ci est également soumise aux charges extérieures distribuées d'une façon déterminée par les éléments de la construction. Soit $\mathcal{P}$, kgf, la force représentant ces charges. Ainsi donc, le système de paramètres de définition sera

$$\sigma, E, d, \rho\, g, \mathcal{P}.$$

Ici $n = 5$, $k = 2$, par conséquent, la base des états d'équilibre élastique mécaniquement semblables est constituée des trois paramètres sans dimension suivants:

$$\sigma, \quad \frac{E}{\rho g d}, \quad \frac{\mathcal{P}}{E d^2}.$$

Les critères de similitude consistent en la constance de ces paramètres sur le modèle et dans la nature. Ces conditions remplies, toutes les déformations sont semblables. Si le modèle est n fois plus petit que la nature, tous les déplacements sont n fois moindres que dans la nature.

Si le modèle et la construction sont faits d'un même matériau, les valeurs de ρ, σ, E sont égales pour le modèle et pour la construction, donc pour la similitude mécanique il faut satisfaire à la condition

$$gd = \text{const}.$$

Dans les conditions normales $g = \text{const}$, par conséquent, pour que la similitude mécanique soit respectée on doit avoir $d = \text{const}$, le modèle doit coïncider avec le prototype, ou, autrement dit, à g constant la simulation n'est pas possible.

Simulation dans les centrifugeuses. On peut varier g de la façon artificielle en faisant tourner le modèle à une vitesse angulaire constante, l'ayant installé dans une centrifugeuse. Pour des dimensions suffisamment réduites du modèle et un rayon de rotation suffisamment grand, les forces centrifuges d'inertie des éléments du modèle peuvent être considérées parallèles. En effectuant la rotation autour d'un axe vertical on obtient qu'en état d'équilibre relatif (par rapport à la centrifugeuse) le modèle est soumis aux forces massiques constantes analogues à la pesanteur mais d'accélération différente. Par un choix judicieux de la vitesse de rotation angulaire on obtient les valeurs d'accélération aussi grandes que l'on veut.

Actuellement, on emploie des centrifugeuses spéciales pour étudier les modèles de différents processus *) dans les sols.

*) La condition $\frac{E}{\rho g d} = \text{const}$ doit être remplie lorsqu'on simule les processus pour lesquels on compte parmi les paramètres essentiels les paramètres p, g, d et E. Dans tous ces cas il est possible d'utiliser les centrifugeuses.

Envisageons la contrainte τ, kgf/m², apparaissant lors de la déformation d'une construction élastique sous l'effet du poids et des charges distribuées données. On entend par τ la valeur maximale d'une composante quelconque de la contrainte ou, en général, une certaine composante de la contrainte pour un élément donné de la construction.

La combinaison τ/E est sans dimension, c'est-à-dire que

$$\frac{\tau}{E}=f\left(\sigma, \frac{E}{\rho g d}, \frac{\mathcal{P}}{E d^2}\right).$$

Si le modèle et la construction sont faits d'un même matériau, alors E = const; donc, pour les états mécaniquement semblables, les contraintes en des points correspondants sont égales.

Si l'on admet que les états de contrainte possèdent une similitude mécanique et que la destruction est déterminée par les valeurs maxima des contraintes, alors les destructions sur le modèle et dans la construction se produiront en des points homologues.

Si les valeurs des charges extérieures sont grandes et le poids propre de la construction négligemment petit, le paramètre $\gamma = \rho g$ (et, par conséquent, le paramètre $E/\rho g d$) n'est pas essentiel. Alors, la relation ci-dessus prend la forme

$$\frac{\tau}{E}=f\left(\sigma, \frac{\mathcal{P}}{E d^2}\right),$$

et les conditions de similitude se ramènent aux deux égalités

$$\sigma=\text{const} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{P}}{E d^2}=\text{const}.$$

On en tire également que, lors de la simulation avec conservation des propriétés des matériaux, les charges extérieures doivent être variées en raison directe du carré des dimensions linéaires.

Les constructions de dimensions plus faibles sont plus résistantes. Notons par l la variation de longueur lors de la déformation d'un élément d'un système élastique. Pour les constructions de la classe définie plus haut on a la relation

$$\frac{l}{d}=\varphi\left(\sigma, \frac{\rho g d}{E}, \frac{\mathcal{P}}{E d^2}\right).$$

Souvent des considérations physiques permettent de voir que la quantité l/d diminue avec la réduction du poids spécifique des éléments de la construction, c'est-à-dire lorsque diminue le paramètre $\rho g d/E$.

Prenons maintenant deux constructions géométriquement semblables de dimensions différentes faites d'un même matériau (E et σ égales). Supposons que les valeurs des charges extérieures varient

en fonction des carrés des dimensions, c'est-à-dire que

$$\frac{\mathcal{P}}{Ed^2} = \text{const.}$$

Il est évident alors que le paramètre $\rho gd/E$ diminue avec la diminution de la construction et la similitude mécanique est par conséquent rompue. Les déformations relatives des constructions plus petites étant moins considérables, celles-ci sont donc d'une résistance plus élevée. Ceci n'est pourtant vrai que lorsque le poids spécifique du matériau $\gamma = \rho g$ joue un rôle important. Si le poids propre γ n'est pas essentiel et de plus $\mathcal{P}/Ed^2 = \text{const}$, alors les déformations relatives ont les mêmes valeurs pour les corps de différentes échelles.

Analysons encore un cas où γ est négligeable et l'on sait que, pour la construction donnée, le rapport l/d diminue lorsque la charge extérieure $\mathcal{P}$ diminue. Si les charges extérieures sont proportionnelles au cube des dimensions linéaires, alors, évidemment, le rapport l/d sera plus petit pour les constructions de faibles dimensions que pour les constructions plus grandes. Par conséquent, la réduction des dimensions fait accroître la résistance de la construction.

Dans certains cas, on peut simuler les phénomènes notoirement non semblables, lorsque certains paramètres sans dimension Π_1, Π_2, . . . ont des valeurs différentes dans la nature et sur le modèle, mais on connaît à l'avance, à partir des considérations complémentaires, la forme de la relation entre les paramètres sans dimension recherchés et des paramètres caractéristiques Π_1, Π_2, . . . Dans ces cas, il est essentiel de respecter lors de la simulation la constance des seuls paramètres sans dimension, la dépendance desquels n'est pas connue.

Une telle simulation peut être parfois employée lorsque la forme de la relation entre les grandeurs recherchées et les paramètres Π_1, Π_2, . . . est prise comme une hypothèse de travail qui sera confirmée ou infirmée par les épreuves. La simulation avec différentes valeurs du nombre de Reynolds, lorsque son influence sur des caractéristiques recherchées est négligeable, en est un exemple. Cependant on peut utiliser ce type de simulation également dans le cas où le nombre de Reynolds est essentiel, mais la dépendance de celui-ci est connue d'avance.

La simulation est souvent l'unique moyen de l'expérimentation et de la résolution des problèmes pratiques les plus importants. Il en est ainsi quand il s'agit d'étudier les phénomènes naturels très lents se déroulant pendant des dizaines, des centaines ou même des milliers d'années; dans les conditions artificielles de l'expérience, le phénomène simulé ne dure que quelques heures ou journées, comme c'est le cas de la simulation de l'infiltration du pétrole.

Il existe des cas contraires, lorsqu'au lieu du phénomène qui se déroule extrêmement vite dans la nature on reproduit, dans l'expérience, un phénomène semblable dont le déroulement est considérablement ralenti sur le modèle.

Bien que d'une valeur scientifique très importante, la simulation doit être envisagée seulement comme une base de départ permettant de résoudre le problème fondamental qui consiste dans la détermination effective des lois de la nature, dans la recherche des propriétés et caractéristiques communes des différentes classes des phénomènes, dans l'élaboration des méthodes théoriques et expérimentales d'étude et de résolution d'un grand nombre de problèmes et, enfin, dans l'accumulation de données systématiques, procédés, règles et recommandations permettant de résoudre les problèmes pratiques concrets

SUPPLÉMENT I

FONCTIONS TENSORIELLES NON LINÉAIRES DE PLUSIEURS ARGUMENTS TENSORIELS *)

par *V. Lokhine* et *L. Sédov*

Un nombre considérable de notions géométriques et physiques fondamentales sont des grandeurs scalaires ou tensorielles. De nombreuses lois et régularités de nature géométrique ou physique trouvent leur expression mathématique grâce aux relations scalaires ou tensorielles.

En écrivant les équations sous forme tensorielle, on parvient à traduire les régularités invariantes, indépendantes du choix du système de coordonnées. Les équations et caractéristiques tensorielles possèdent des propriétés invariantes complémentaires lorsque les phénomènes, les corps, les lois et les propriétés que l'on analyse admettent la symétrie.

Dans la présente étude on développe les méthodes qui permettent de rendre compte immédiatement des propriétés de symétrie tant dans les problèmes linéaires que non linéaires, ceci par la mise en évidence des paramètres de définition appropriés en s'appuyant sur les hypothèses fondamentales mises à la base de la conception des problèmes à résoudre. Les déductions concernant l'effet de la symétrie s'obtiennent par des méthodes analogues dans l'essentiel aux méthodes employées dans la théorie de la similitude et des dimensions [1].

L'ouvrage proposé est consacré à la résolution de deux problèmes fondamentaux.

a) On a montré que les propriétés des textures et des cristaux peuvent être données par des tenseurs et on a établi des systèmes simples de tenseurs comme ensembles des grandeurs géométriques paramétriques déterminant et donnant les propriétés de symétrie de tous les 7 espèces de textures et de toutes les 32 classes de cristaux.

b) On a établi la forme généralisée des expressions pour les tenseurs d'ordre arbitraire lorsque ces derniers peuvent être interprétés comme fonctions d'un système d'arguments constitué de plusieurs scalaires et de tenseurs indépendants de divers ordres.

Les deux problèmes sont essentiellement liés à l'analyse du système de transformations des coordonnées formant un groupe de symétrie.

---

*) Article publié dans la revue « Prikladnaïa matematika i mekhanika », 1963, t. 27, op. 3 (en russe).

La symétrie joue un rôle exceptionnel en physique. Les diverses espèces de fonctions et de tenseurs de différents ordres, invariants par les groupes correspondants de symétrie, furent l'objet de nombreux travaux. Les résultats obtenus eurent favorisé la découverte de nouveaux effets dans des applications très variées.

On trouvera un aperçu général des exemples concrets dans le livre de J. Nye [2] contenant également un grand nombre de références aux ouvrages traitant des problèmes en question.

Une théorie générale développée en algèbre permet d'obtenir et de définir les propriétés des invariants scalaires, polynomiaux en composantes tensorielles et vectorielles, par rapport aux groupes de transformations finis. Il fut montré [3] qu'il existe toujours, pour tout groupe orthogonal fini G, une base rationnelle complète des invariants polynomiaux constituée d'un nombre fini de polynômes scalaires invariants renfermant les composantes des vecteurs et tenseurs donnés, base qui permet d'exprimer tout polynôme invariant formé de ces mêmes composantes.

Une base rationnelle complète fournit un système d'invariants par rapport à un nombre fini de transformations du groupe G, mais il est évident que ses éléments, polynômes formés des composantes des tenseurs donnés, ne sont pas invariants, en général, par rapport aux transformations quelconques des coordonnées, bien qu'ils contiennent de tels invariants. Le nombre d'éléments d'une base rationnelle complète, ne dépendant que du groupe et de l'ensemble donné de tenseurs et vecteurs, est, en règle générale, supérieur à celui de composantes variables indépendantes du système donné de tenseurs et vecteurs. Par conséquent, les éléments d'une base rationnelle complète révèlent généralement une dépendance fonctionnelle.

La construction d'une base rationnelle complète pour les textures et groupes de cristaux fut effectuée dans les travaux de Döring [4], de Smith et Rivlin [5], de Pipkin et Rivlin [6], de Y. Sirotine [7, 8]. On montre plus loin que pour construire les fonctions tensorielles, il faut et il suffit d'employer un système complet d'invariants fonctionnellement indépendants compatibles [9, 10] constitués de composantes tensorielles donnant les groupes de symétrie et d'autres arguments tensoriels.

Les exemples de scalaires et de tenseurs à symétrie donnée sont envisagés dans les articles de Smith, Rivlin et Pipkin [5, 11, 12], dans le livre de S. Bhagavantam et de T. Venkatarayudu [13], dans les exposés de Jahn [14], de A. Choubnikov [15, 16, 17] et de Y. Sirotine [7, 8, 18, 19]. Analysant les différents tenseurs de nature physique, V. Koptsik [20] définit la symétrie d'un cristal comme « groupe d'intersection des symétries des propriétés du cristal que l'on observe à l'instant donné » (p. 935).

Les tenseurs fonctions des arguments tensoriels étaient rapportés au cas des tenseurs du deuxième ordre. On constate que dans ce cas les relations fonctionnelles entre les tenseurs se ramènent à celles entre les matrices carrées. Les principaux résultats dans ce domaine sont accumulés dans la formule de Hamilton-Cayley et dans sa généralisation au cas de plusieurs arguments matriciels [21 à 24, 25 à 28] (tenseurs du deuxième ordre). Ces généralisations n'intéressent pourtant que les fonctions polynomiales des matrices et des composantes tensorielles.

1°. **Notions fondamentales.** Comme on sait, les tenseurs peuvent être interprétés en tant que êtres invariants, indépendants du choix du système de coordonnées, définis par les composantes scalaires dans une base correspondante. On introduit la base tensorielle de différentes manières. En particulier, on peut prendre pour base tensorielle les produits polyadiques des vecteurs de base d'un système de coordonnées dans une variété-espace quelconque.

Pour simplifier, on n'envisage dans la suite que des tenseurs dans l'espace tridimensionnel. Soient x^1, x^2, x^3 les coordonnées des points de l'espace et $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ les vecteurs d'une base covariante *). Désignons par $\boldsymbol{H}$ le tenseur d'ordre r et par $H^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}$ ses composantes dans la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. On utilisera le tenseur $\boldsymbol{H}$ sous forme d'une somme

$$H = H^{\alpha_1 \cdots \alpha_r} \mathbf{e}_{\alpha_1} \cdots \mathbf{e}_{\alpha_r}, \tag{1.1}$$

où la sommation s'étend à tous les indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ parcourant les valeurs 1, 2, 3. Dans le cas général, la formule (1.1) représente la somme de 3^r termes linéairement indépendants dont chacun peut être considéré comme un tenseur.

Il est à noter qu'un même système de coordonnées admet de multiples variétés continuelles et, par suite, divers vecteurs de base. Pour les mêmes coordonnées x^i et les composantes $H^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}$ on peut imaginer les différents tenseurs rapportés aux bases différentes. L'exemple de telles variétés est fourni, en particulier, par les différentes positions d'un milieu donné lorsqu'on emploie le repère lagrangien figé se déplaçant et se déformant au cours du temps [26]. Il existe aussi des cas où les différentes variétés possèdent, pour le repère lagrangien donné, des métriques différentes. Ainsi donc, il est de droit d'envisager simultanément les différents tenseurs de composantes identiques données dans les bases et espaces différents, aussi bien euclidien que non euclidien (Kondo, Kröner, Bilby et al.).

*) Le système de coordonnées est arbitraire.

La théorie proposée est développée pour les tenseurs dans les espaces métriques. Désignons par ds la distance des points de coordonnées x^i et $x^i + dx^i$. Supposons que la grandeur ds^2 soit définie par la formule $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$. La matrice $\| g_{ij} \|$ est formée par les composantes covariantes du tenseur métrique fondamental $\boldsymbol{g}$, la matrice inverse $\| g^{ij} \|$ par les composantes contravariantes. Les vecteurs contravariants de base $\boldsymbol{\partial}^i$ sont donnés par les relations $\boldsymbol{\partial}^i = g^{i\alpha}\boldsymbol{\partial}_\alpha$. Le tenseur fondamental métrique $\boldsymbol{g}$ vérifie les formules

$$\boldsymbol{g} = g_{\alpha\beta}\boldsymbol{\partial}^\alpha\boldsymbol{\partial}^\beta = g^{\alpha\beta}\boldsymbol{\partial}_\alpha\boldsymbol{\partial}_\beta = \delta^\alpha_\beta\boldsymbol{\partial}_\alpha\boldsymbol{\partial}^\beta$$

(δ^i_j est un symbole de Kronecker). (1.2)

La « jonglerie » avec les indices des composantes tensorielles est réalisée à l'aide de g_{ij} et g^{ij}. L'expression (1.1) se récrit sous la forme

$$\boldsymbol{H} = \sum_{s=1}^{p} k_s \boldsymbol{H}_s, \tag{1.3}$$

où k_s sont des scalaires et $\boldsymbol{H}_s$ des tenseurs d'ordre r. On admet dans la suite que ces derniers sont linéairement indépendants. Il est clair que $p \leqslant 3^r$.

Admettons que les composantes du tenseur $\boldsymbol{H}$ sont, indépendamment du choix du repère, les mêmes fonctions des composantes de m tenseurs

$$\boldsymbol{T}_\varkappa = T_\varkappa^{\alpha_1 \ldots \alpha_{\rho_\varkappa}} \boldsymbol{\partial}_{\alpha_1} \ldots \boldsymbol{\partial}_{\alpha_{\rho_\varkappa}} \quad (\varkappa = 1, \ldots, m). \tag{1.4}$$

Les nombres entiers $\rho_1, \ldots, \rho_m$ définissent l'ordre des tenseurs $\boldsymbol{T}_\varkappa$; en cas général, ils ne sont égaux ni entre eux, ni à r. Appelons le tenseur $\boldsymbol{H}$ fonction des tenseurs $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$. Les tenseurs $\boldsymbol{T}_\varkappa$, parmi lesquels il peut y avoir des variables et des constants, sont des arguments tensoriels de la fonction tensorielle $\boldsymbol{H}$.

Si l'on peut former à partir des tenseurs $\boldsymbol{T}_\varkappa$ 3^r tenseurs $\boldsymbol{H}_s$ linéairement indépendants d'ordre r, alors le tenseur $\boldsymbol{H}$ vérifie la formule (1.3) où les scalaires k_s ne dépendent que des invariants compatibles du système de tenseurs $\boldsymbol{T}_\varkappa$ et, éventuellement, d'autres arguments scalaires donnés complémentaires.

On n'envisage dans la suite que les fonctions tensorielles parmi les arguments tensoriels $\boldsymbol{T}_\varkappa$ desquelles figure le tenseur $\boldsymbol{g}$.

Les tenseurs $\boldsymbol{H}_s$ peuvent être construits à partir des tenseurs $\boldsymbol{T}_\varkappa$ à l'aide de deux opérations tensorielles: multiplication et contraction *). La contraction sur deux indices arbitraires est toujours

*) On saurait démontrer qu'une telle construction de p tenseurs $\boldsymbol{H}_s$ d'ordre r linéairement indépendants à partir des $\boldsymbol{T}_\varkappa$, lorsque parmi les arguments tensoriels on trouve les composantes covariantes g_{ij} et contravariantes g^{ij} du tenseur métrique et, par conséquent, celles des tenseurs $\boldsymbol{T}_\varkappa$ de toute structure indicielle. est toujours possible. Cette proposition est valable dans d'autres

réalisable, car parmi les arguments tensoriels est présent le tenseur g. La multiplication indéterminée de plusieurs tenseurs conduit à un tenseur dont l'ordre est égal à la somme des ordres des termes. La contraction sur $2l$ indices abaisse l'ordre du tenseur de $2l$ unités. En procédant à une multiplication et à une contraction naturelle du tenseur donné T de composantes T^{ikjl} avec le tenseur S de composantes $\delta^j_n \delta^i_m$, on obtient le tenseur T^* du même ordre de composantes

$$T^{*ikjl\cdots} = T^{jkil\cdots}.$$

Le tenseur T^* est dit isomère du tenseur T. Ainsi, la permutation des indices se ramène à une multiplication par le tenseur fondamental et à des contractions. Par définition, le tenseur obtenu par permutation de plusieurs indices est également appelé isomère du tenseur T.

On donne plus bas les procédés de construction des expressions générales de la forme (1.3) des fonctions tensorielles. On construira à cet effet une base tensorielle H_s ($s = 1, \ldots, p$) linéairement indépendante à l'aide des arguments tensoriels (1.4), ceci en recourant aux opérations de multiplication et de contraction des tenseurs déterminants.

2°. Groupes de symétrie des tenseurs. Les composantes contravariantes $A^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}$ du tenseur A admettent le groupe de symétrie G donné par un système *) des matrices de transformation des coordonnées

$$\| a^i_j \| \left(a^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \quad y^i = y^i(x^j) \right),$$

lorsque chaque matrice du groupe G vérifie les égalités

$$A^{i_1 \cdots i_r} = A^{\alpha_1 \cdots \alpha_r} a^{i_1}_{\alpha_1} \ldots a^{i_r}_{\alpha_r}. \tag{2.1}$$

Les groupes de transformations qui admettent le tenseur fondamental g sont dits groupes orthogonaux. Cela veut dire que les matrices de transformation pour les groupes orthogonaux satisfont aux sys-

---

cas plus généraux. Ici elle n'exige pas d'être démontrée, car pour toutes les espèces de symétrie orthogonale, dans l'espace tridimensionnel, on donne plus bas une construction de p tenseurs H_s linéairement indépendants, en employant les produits et les contractions des composantes des arguments tensoriels. Notons tout de même que, d'après la théorie générale, tous $p + 1$ tenseurs d'ordre r, admettant la symétrie donnée, sont linéairement dépendants.

*) Pour simplifier, on omet le numéro des éléments des matrices du groupe G, de sorte que $a_{(\nu)}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$ se trouve remplacé par $a^{i\cdot}_{\cdot j}$, où $\nu = 1, \ldots, h$ et h est égal au nombre d'éléments du groupe G.

tèmes équivalents d'équations

$$g^{ij} = g^{\alpha\beta} a^{i\cdot}_{\cdot\alpha} a^{j\cdot}_{\cdot\beta}, \qquad g_{ij} = g_{\alpha\beta} a^{\alpha\cdot}_{\cdot i} a^{\beta\cdot}_{\cdot j}. \tag{2.2}$$

On vérifie sans peine que, pour un groupe G orthogonal, de la condition (2.1) de l'invariance des composantes contravariantes du tenseur $\boldsymbol{A}$ découle celle des composantes du tenseur $\boldsymbol{A}$ à structure indicielle arbitraire *) par les transformations de coordonnées formant le groupe G. Par conséquent, pour les transformations orthogonales, on parle simplement de la symétrie du tenseur et de l'invariance de toutes ses composantes par le groupe G.

L'ensemble de toutes les transformations orthogonales par lesquelles le tenseur $\boldsymbol{A}$ est invariant forme son groupe de symétrie. Le groupe de symétrie d'un tenseur $\boldsymbol{A}$ peut comprendre uniquement la transformation identique. Pour un tenseur arbitraire du deuxième ordre (asymétrique, $A^{ij} \neq A^{ji}$) le groupe de symétrie se compose de deux éléments: de la transformation identique et de la transformation inverse. Pour un tenseur symétrique du deuxième ordre le groupe de symétrie est confondu avec celui des coïncidences d'un ellipsoïde à trois axes. Lorsque l'ellipsoïde tensoriel est celui de rotation, le groupe de symétrie est infini. Le tenseur sphérique du deuxième ordre possède un groupe de symétrie coïncidant avec le groupe orthogonal complet des rotations de même que le tenseur fondamental $\boldsymbol{g}$.

Soit $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ les tenseurs et $G_1, \ldots, G_m$ leurs groupes de symétrie. Un groupe G formé par l'intersection des groupes $G_1, \ldots, G_m$ est appelé groupe de symétrie de l'ensemble des tenseurs $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$. Il est aisé de voir que le tenseur $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m)$ admet le groupe de symétrie G, car ses composantes sont des fonctions des composantes des tenseurs $\boldsymbol{T}_i$ invariantes par les transformations du groupe G; il s'ensuit que les composantes du tenseur $\boldsymbol{H}$ sont également invariantes par le groupe G. Il en découle avec évidence que le groupe de symétrie d'un tenseur obtenu par la multiplication et la contraction de plusieurs tenseurs est confondu avec l'intersection des groupes de symétrie des tenseurs constituants ou possède une symétrie d'ordre plus élevé et comporte alors cette intersection en tant que sous-groupe.

Si le tenseur $\boldsymbol{H}$ admet le groupe de symétrie G, le nombre p de termes linéairement indépendants dans la somme (1.3) en général est inférieur à 3^r. Pour le groupe G donné et pour le tenseur d'ordre donné r, le nombre se calcule à l'aide de la théorie des caractères [13, 14, 30]; on trouvera des tableaux correspondants des textures et des groupes de symétrie cristallins dans les ouvrages [13, 14, 18].

Si le tenseur $\boldsymbol{H}$ d'ordre impair n'admet qu'un groupe trivial G

*) Si le groupe G n'est pas orthogonal, l'égalité (2.1) ne suppose pas l'invariance des composantes du tenseur $\boldsymbol{A}$ ayant une autre structure indicielle.

composé d'une transformation identique, le nombre des termes linéairement indépendants de la somme est $p = 3^r$. Dans ce cas le tenseur $\boldsymbol{H}$ a la forme la plus générale.

Si le tenseur $\boldsymbol{H}$ est d'un ordre pair, son groupe de symétrie G comporte toujours au moins deux éléments: une transformation identique et une inversion. Pour un groupe de symétrie constitué uniquement d'une inversion et d'une transformation identique, $\boldsymbol{H} = 0$ si r est impair et, par conséquent, $p = 0$; si r est pair, on a $p = 3^r$ et le tenseur d'ordre pair aura la forme la plus générale.

Dans la formule (1.3) les coefficients scalaires k_s sont dans le cas général des fonctions des invariants compatibles des tenseurs $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ et d'un nombre quelconque de scalaires donnés (la température, la concentration, etc.). Certains des invariants compatibles sont des paramètres constants; d'autres, variables.

Notons $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ un système complet d'invariants compatibles [9, 10] du système des tenseurs $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$. Le système d'invariants étant complet, tout invariant J formé de composantes du système des tenseurs $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ satisfait à la relation fonctionnelle

$$J = f(\Omega_1, \ldots \Omega_N).$$

Les invariants Ω_i conservent par définition leur valeur et leur forme de fonctions des composantes par rapport aux transformations d'axes. Ces invariants s'obtiennent par les opérations de multiplication tensorielle et de contractions et représentent alors des polynômes homogènes [9, 10] en composantes des tenseurs $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$.

Supposons que les tenseurs $\boldsymbol{T}_\nu, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ $(1 < \nu \leqslant m)$ appartenant à l'ensemble $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ sont des tenseurs paramétriques constants et admettent un groupe fini de symétrie G^*.

Fixons les valeurs des composantes des tenseurs $\boldsymbol{T}_\nu, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ donnés dans le système d'axes x^i. Les invariants Ω_i se ramènent alors à des ω_i n'étant fonctions que des composantes des tenseurs $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_{\nu-1}$, de plus dans les axes x^i on aura $\omega_i = \Omega_i$.

Dans d'autres repères, ces égalités n'ont pas lieu en général, pourtant elles sont vraies pour toutes les transformations d'axes définies par le groupe G^*, vu que pour ces transformations les composantes de tous les tenseurs $\boldsymbol{T}_\nu, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ sont invariantes. Les grandeurs ω_i ne sont pas, en général, invariantes par tout changement d'axes. Il est clair que certains ω_i dépendant uniquement des composantes des tenseurs $\boldsymbol{T}_\nu, \ldots, \boldsymbol{T}_m$ ou seulement de celles des tenseurs $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_{\nu-1}$ sont invariants par changement d'axes. Il est évident que toutes les grandeurs ω_i, fonctions des composantes des tenseurs $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_{\nu-1}$, peuvent être considérées comme invariantes par le groupe G^*. Ainsi donc, les coefficients invariants k_s de la formule (1.3) sont des fonctions des Ω_i. Lorsqu'on n'applique

que les changements d'axes du groupe G^*, les grandeurs k_s peuvent être envisagées comme fonctions uniquement des invariants ω_i.

Les invariants ω_i sont analogues à ceux d'une base complète rationnelle, en coïncidant avec cette dernière pour un choix convenable du système complet d'invariants Ω_i. Dans le cas général, une importance particulière est attribuée aux invariants variables fonctionnellement indépendants; on peut les choisir de manières différentes.

Il est toujours possible de construire les tenseurs $\boldsymbol{H}_s$ à partir des tenseurs déterminants donnés $\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m$; les méthodes générales de construction seront illustrées sur des exemples particuliers.

L'indépendance linéaire des tenseurs $\boldsymbol{H}_s$ peut être établie soit directement à partir des considérations géométriques, soit par le calcul des déterminants correspondants, soit par d'autres méthodes générales. En particulier, les tenseurs $\boldsymbol{H}_{s1}$ et $\boldsymbol{H}_{s2}$ sont linéairement indépendants s'ils sont orthogonaux ou si leurs groupes de symétrie ne coïncident pas, car, au cas contraire, ces deux tenseurs seraient proportionnels, ce qui contredit les conditions de leur symétrie. Cependant, des tenseurs admettant le même groupe de symétrie peuvent être linéairement indépendants.

Soit un tenseur $\boldsymbol{H}_s$ admettant un groupe de symétrie G_s.

Souvent il est rationnel de choisir les tenseurs $\boldsymbol{H}_s$ de façon que $G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \ldots \supseteq G_p$ [19].

On voit que l'on peut toujours prendre pour q premiers tenseurs $\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_q$ linéairement indépendants $q \leqslant p$ tenseurs $\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_q$ ne dépendant que du tenseur fondamental $\boldsymbol{g}$ ou de $\boldsymbol{g}$ et du tenseur du troisième ordre $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = |g^{ij}|^{1/2}(\boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta}_3 - \boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta}_3\boldsymbol{\vartheta}_2 + \boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta}_3\boldsymbol{\vartheta}_1 - \boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta}_3 + \\ + \boldsymbol{\vartheta}_3\boldsymbol{\vartheta}_1\boldsymbol{\vartheta}_2 - \boldsymbol{\vartheta}_3\boldsymbol{\vartheta}_2\boldsymbol{\vartheta}_1). \tag{2.3}$$

Ces tenseurs correspondent à une isotropie par le groupe orthogonal complet ou propre. Les tenseurs isotropes $\boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_q$ d'ordre r sont étudiés dans plusieurs ouvrages [3, 9, 10, 30].

Pour les tenseurs isotropes d'ordre r dans l'espace tridimensionnel, on a les valeurs suivantes du nombre maximal q [30]:

$r =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q =$	0	1	1	3	6	15	36	91	232	603

Tous les tenseurs isotropes d'ordre r sont des isomères du tenseur $\boldsymbol{H}_1$ et

$$H_1^{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = g^{\alpha_1\alpha_2} \ldots g^{\alpha_r\alpha_{r-1}} \quad (r = 2k),$$

$$H_1^{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = E^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} g^{\alpha_4\alpha_5} \ldots g^{\alpha_{r-1}\alpha_r} \quad (r = 2k+1).$$

Le nombre q est égal au nombre de différents isomères linéairement indépendants du tenseur $\boldsymbol{H}_1$ compte tenu de la symétrie des composantes du tenseur g^{ij}. Lorsque r est impair, pour le groupe orthogonal complet on a $q = 0$. Tous les tenseurs d'ordre impair, invariants par le groupe orthogonal complet, s'annulent. Les tenseurs d'ordre impair invariants par le groupe orthogonal propre des rotations avec $\Delta = | a^{i}_{\cdot j} | = 1$ ne diffèrent de zéro que pour $r \geqslant 3$.

Lorsque $r = 3$, on a $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{E}$ et, donc, $q = 1$.

La symétrie d'une fonction tensorielle par un certain groupe des permutations des indices diminue, en général, les nombres p et q. Les formules pour les fonctions tensorielles tenant compte de la symétrie par rapport aux indices s'obtiennent facilement à partir des formules complètes par opérations de symétrisation et d'alternance des indices correspondants, en ne conservant que les termes additifs linéairement indépendants.

3°. **Tenseurs donnant une symétrie géométrique des textures et des cristaux** [29]. Le milieu est dit isotrope lorsque toutes ses propriétés en chaque point sont invariantes par le groupe de transformations orthogonales. On distingue deux types de milieux isotropes :

1) des milieux isotropes par le groupe orthogonal complet des changements d'axes avec $\Delta = \pm 1$;

2) des milieux isotropes par le groupe des rotations avec $\Delta = +1$ (milieux girotropes).

Il est facile de voir que dans le premier cas la symétrie est suffisamment caractérisée par le tenseur fondamental $\boldsymbol{g}$. Il est légitime de considérer la condition d'invariance des composantes du tenseur $\boldsymbol{g}$ comme une condition définissant un ensemble infini de matrices réelles, éléments du groupe orthogonal complet.

Le groupe des rotations avec $\Delta = +1$ caractérisant les milieux girotropes est un sous-groupe du groupe orthogonal complet. On peut l'isoler en ajoutant aux équations (2.2) la condition supplémentaire exigeant l'invariance des composantes du tenseur $\boldsymbol{E}$ défini par (2.3).

Ainsi, l'ensemble infini d'éléments du groupe des rotations est complètement défini par la condition d'invariance des tenseurs $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{E}$. Ces derniers sont alors interprétés comme des tenseurs définissant le groupe des rotations avec $\Delta = +1$.

Dans ce qui suit nous adoptons pour les groupes de symétrie les symboles condensés proposés par A. Choubnikov [15, 16]. Selon Choubnikov, un groupe orthogonal complet sera désigné par le symbole $\infty/\infty \cdot m$ signifiant que les éléments du groupe sont des axes se coupant d'ordre infini et un plan de symétrie image m. Le symbole ∞/∞ caractérise un groupe des rotations.

Dans 2° on a vu la forme générale des fonctions tensorielles pour des tenseurs d'ordre arbitraire en présence de l'isotropie, lorsque les seuls arguments sont $\boldsymbol{g}$ ou $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{E}$.

Un exemple simple d'un milieu anisotrope est fourni par des textures. Une texture est un milieu dont toutes les propriétés en chaque point sont invariantes par un groupe orthogonal infini comportant les rotations d'un angle quelconque autour d'un certain axe. Il est facile de voir que les groupes de symétrie des textures représentent des sous-groupes d'un groupe orthogonal complet. Une analyse simple permet de se convaincre qu'il n'est possible d'avoir que 7 types différents de textures, y compris deux types de milieux isotoropes.

Les formes géométriques des différents types de textures ainsi que les tenseurs et les vecteurs donnant leurs groupes de symétrie sont rassemblés au tableau de la page 484. Les résultats proposés se vérifient directement.

Un milieu anisotrope de composition continue ou discrète est dit cristal si l'on peut introduire un système de réseaux tripériodiques de Bravais (avec, dans les axes fixés, la même périodicité pour les réseaux différents), présentant les mêmes propriétés de symétrie que le milieu envisagé. L'ensemble de réseaux cristallins de Bravais à périodicité donnée peut admettre les groupes ponctuels de symétrie finis. La forme de ces groupes dépend de la structure de l'ensemble envisagé de réseaux ainsi que de celle du parallélépipède élémentaire des périodes.

On sait [2, 16] qu'il n'y a que 32 classes différentes de symétrie des cristaux susceptibles d'être décrites par les groupes ponctuels finis. Le tableau rassemble les données sur toutes ces 32 classes; les figures géométriques correspondantes illustrent chaque groupe de symétrie. Les vecteurs unitaires $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ forment une base orthogonale cristallophysique; on a montré sur les dessins l'orientation de la base par rapport aux figures de symétrie des cristaux. Au coin gauche de chaque case on trouve le symbole du groupe de symétrie respectif selon Choubnikov, à côté des dessins on trouve également la notation de l'ensemble de tenseurs simples caractéristiques que nous avons établi pour chaque groupe. Les définitions des tenseurs correspondants figurent en marge du tableau *).

Envisageons les tenseurs déterminant la symétrie des groupes du système cristallin cubique. Montrons que le tenseur $\boldsymbol{O}_h$ est invariant par le groupe de 48 transformations donnant une représentation isomorphe du groupe $\overline{6}/4$ et qu'on ne peut indiquer aucunes autres transformations par lesquelles il soit invariant. Commençons par

*) Dans ce tableau et plus loin, les puissances des vecteurs sont interprétées comme des produits dyadiques ou polyadiques.

trouver toutes les transformations réelles par lesquelles le tenseur O_h est invariant. Les conditions d'invariance des composantes contravariantes du tenseur O_h sont équivalentes au système suivant d'équations algébriques non linéaires pour 9 éléments de la matrice de transformation $\| a_j^i \|$:

$$a_1^\alpha a_1^\beta a_1^\gamma a_1^\delta + a_2^\alpha a_2^\beta a_2^\gamma a_2^\delta + a_3^\alpha a_3^\beta a_3^\gamma a_3^\delta = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}. \tag{3.1}$$

On pose le second membre égal à unité lorsque $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ et nul dans d'autres cas. En posant $\alpha = \beta$ et $\gamma = \delta$, on obtient pour $\alpha \neq \gamma$ les équations suivantes:

$$(a_1^\alpha)^2 (a_1^\gamma)^2 + (a_2^\alpha)^2 (a_2^\gamma)^2 + (a_3^\alpha)^2 (a_3^\gamma)^2 = 0 \quad (\alpha \neq \gamma). \tag{3.2}$$

D'où l'on tire

$$a_i^\alpha a_i^\gamma = 0. \tag{3.3}$$

Comme le déterminant $| a_i^\alpha | \neq 0$, il vient des égalités (3.3) que chaque ligne et chaque colonne de la matrice $\| a_i^\alpha \|$ ne contient qu'un seul élément non nul.

Comme $(a_1^\alpha)^4 + (a_2^\alpha)^4 + (a_3^\alpha)^4 = 1$ lorsque $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ d'après (3.1), chaque élément réel de la matrice $\| a_i^\alpha \|$ non nul vérifie l'égalité

$$a_q^p = \pm 1. \tag{3.4}$$

L'analyse de tous les cas possibles présentés par (3.3) et (3.4) montre que les matrices constituées des éléments $(a_q^p)^2$ égaux à 1 ou à 0 sont de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \\ \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}. \end{array} \right\} \tag{3.5}$$

On a obtenu le système qui comprend seulement six matrices. Si selon (3.4) on tient compte des signes des a_q^p, chacune des six

matrices (3.5) engendre 8 matrices pour $\| a_q^p \|$. Ainsi, à la première des matrices (3.5) correspondent les matrices suivantes:

$$\left.\begin{array}{ll}
\begin{Vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \\
\begin{Vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \\
\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \\
\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix},
\end{array}\right\} \quad (3.6)$$

Par définition du groupe de symétrie cubique $\bar{6}/4$, le système complet des matrices du type (3.6) forme, pour chacune des matrices du système (3.5), un groupe complet des matrices des transformations de symétrie cubique pour le groupe $\bar{6}/4$ constitué des $6 \times 8 = 48$ matrices, orthogonales en l'occurrence. Ainsi, donc, toute matrice correspondant à la solution du système d'équations (3.1) ne peut être qu'une des matrices du système (3.6) de 48 matrices. D'autre côté, il est facile de voir que la réciproque est également vraie: chaque matrice du système trouvé de 48 matrices est solution du système d'équations (3.1).

Recherchons maintenant les matrices des groupes de transformations préservant inchangé le tenseur $\boldsymbol{T}_d$. Les conditions d'invariance des composantes contravariantes du tenseur $\boldsymbol{T}_d$ sont équivalentes au système suivant d'équations algébriques non linéaires pour 9 éléments de la matrice de transformation $\| a_j^i \|$:

$$a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma + a_2^\alpha a_1^\beta a_3^\gamma + a_3^\alpha a_2^\beta a_1^\gamma + a_1^\alpha a_3^\beta a_2^\gamma + a_2^\alpha a_3^\beta a_1^\gamma + a_3^\alpha a_1^\beta a_2^\gamma = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}. \quad (3.7)$$

On prend dans le second membre de (3.7) l'unité lorsque α, β, γ se distinguent et zéro si on trouve au moins un couple d'indices

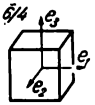
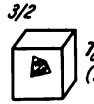
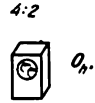
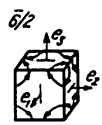
x^1, x^2, x^3 — coordonnées cartésiennes cristallographiques
ξ^1, ξ^2, ξ^3 — coordonnées arbitraires

$$a^{i}_{\cdot j} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}, \quad \Delta = |a^{i}_{\cdot j}|, \quad e_i = \frac{\partial r}{\partial x^i}$$

$$\vartheta_i = \frac{\partial r}{\partial \xi^i}$$

$$e_j = a^{\alpha}_{\cdot j}\vartheta_\alpha, \quad e_3^2 = a_3^\alpha a_3^\beta \vartheta_\alpha \vartheta_\beta$$

$$g = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = g^{\alpha\beta}\vartheta_\alpha\vartheta_\beta$$

Textures	Système cubique	Système tétragonal	Système hexagonal
∞/∞ · m g	$\bar{6}/4$  O_h		
∞/∞ g, E	$3/4$ O_h, E		
$m \cdot \infty : m$ g, e_1^2	$3/\bar{4}$ T_d, g	$m \cdot 4 : m$ O_h, e_3^2 $4 \cdot m$ T_d, g, e_3^2	$m \cdot 6 : m$ D_{6h}, e_3^2 $m \cdot 3 : m$ D_{3h}, e_3^2
$\infty : 2$ g, E, e_3^2	$3/2$  T_d, g, E (T_h, E)	$4 : 2$  O_h, E, e_3^2	$6 : 2$ D_{6h}, E, e_3^2
$\infty : m$ g, e_3^2, Ω	$\bar{6}/2$  T_h	$4 : m$ O_h, e_3^2, Ω $\bar{4}$ T_d, g, e_3^2, Ω	$6 : m$ D_{6h}, e_3^2, Ω $\bar{3} : m$ D_{3h}, e_3^2, Ω
$\infty \cdot m$ g, e_3		$4 \cdot m$ O_h, e_3	$6 \cdot m$ D_{6h}, e_3
∞ g, E, e_3		4 O_h, E, e_3	6 D_{6h}, E, e_3

$$E = e_1e_2e_3 - e_2e_1e_3 + e_2e_3e_1 - e_3e_2e_1 + e_3e_1e_2 - e_1e_3e_2 =$$
$$= \Delta\,(\partial_1\partial_2\partial_3 - \partial_2\partial_1\partial_3 + \partial_2\partial_3\partial_1 - \partial_3\partial_2\partial_1 + \partial_3\partial_1\partial_2 - \partial_1\partial_3\partial_2),$$

$$\Omega = e_1e_2 - e_2e_1 = (a_1^\alpha a_2^\beta - a_2^\alpha a_1^\beta)\,\partial_\alpha\partial_\beta = a_1^\alpha a_2^\beta\,(\partial_\alpha\partial_\beta - \partial_\beta\partial_\alpha),$$

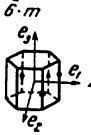
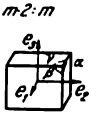
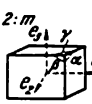
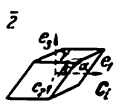
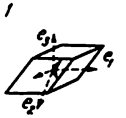
$$O_h = e_1^4 + e_2^4 + e_3^4 = (a_1^\alpha a_1^\beta a_1^\gamma a_1^\delta + a_2^\alpha a_2^\beta a_2^\gamma a_2^\delta + a_3^\alpha a_3^\beta a_3^\gamma a_3^\delta)\,\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma\partial_\delta,$$
$$T_h = e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2, \quad T_d = e_1e_2e_3 + e_2e_1e_3 + e_2e_3e_1 +$$
$$+ e_3e_2e_1 + e_3e_1e_2 + e_1e_3e_2,$$

$$D_{3h} = e_1^3 - e_1e_2^2 - e_2e_1e_2 - e_2^2e_1, \quad D_{3d} = e_3\,(e_1^3 - e_1e_2^2 - e_2e_1e_2 - e_2^2e_1),$$

$$D_{6h} = (e_1^3 - e_1e_2^2 - e_2e_1e_2 - e_2^2e_1)^2,$$

$$D_{2h} = \lambda^{11}e_1^2 + \lambda^{22}e_2^2 + \lambda^{33}e_3^2 = \lambda^{ij}a^\alpha_{\cdot i}\,a^\beta_{\cdot j}\,\partial_\alpha\partial_\beta = d^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$$
$$(\lambda^{11} \neq \lambda^{22} \neq \lambda^{33} \neq \lambda^{11} \neq 0, \quad d^{\alpha\beta} = d^{\beta\alpha}),$$

$$C_l = D_{2h} + \omega^{ij}e_ie_j = C^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta; \quad \omega^{ij} = -\omega^{ji} \neq 0.$$

Système trigonal	Système orthorhombique	Système monoclinique	Système triclinique
$\bar{6}\cdot m$  D_{3d}, e_3^2	$m\cdot 2\cdot m$  D_{2h}, g $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$		
$3:2$ D_{3h}, E, e_3^2	$2:2$ D_{2h}, E, g		
$\bar{6}$ D_{3d}, e_3^2, Ω		$2:m$  D_{2h}, Ω, g $\alpha=\beta=90^\circ\ \gamma\neq 90^\circ$	$\bar{2}$  $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ $\alpha, \beta, \gamma \neq 90^\circ$
$3\cdot m$ D_{3h}, e_3	$2\cdot m$ D_{2h}, e_3, g		
3 D_{3h}, E, e_3		2 D_{2h}, E, e_3, g m D_{2h}, e_1, e_2	1  e_1, e_2, e_3

égaux. Prenons celles des équations (3.7) où $\gamma = \beta$, on a

$$a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\beta + a_2^\alpha a_1^\beta a_3^\beta + a_3^\alpha a_1^\beta a_2^\beta = 0 \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, 3 \\ \beta = 1, 2, 3 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Comme $|a_j^i| \neq 0$, il découle du système d'équations (3.8) que

$$a_i^\beta a_j^\beta = 0, \tag{3.9}$$

β étant un indice arbitraire fixe.

Ceci et la condition $|a_j^i| \neq 0$ permettent de voir que chaque ligne et chaque colonne de la matrice $\| a_j^i \|$ ne renferment qu'un seul élément non nul. On n'a que six matrices de différentes structures indicielles des éléments non nuls, à savoir

$$\left.\begin{array}{lll} \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & c_2 & 0 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} 0 & a_3 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{Vmatrix}, \\ \begin{Vmatrix} 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 \\ c_4 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} 0 & 0 & a_5 \\ 0 & b_5 & 0 \\ c_5 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} 0 & 0 & a_6 \\ b_6 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 & 0 \end{Vmatrix}. \end{array}\right\} \tag{3.10}$$

Les équations (3.7) d'indices α, β, γ différents donnent

$$a_i b_i c_i = 1 \quad (i = 1, \ldots, 6). \tag{3.11}$$

On voit sans peine que pour les transformations orthogonales lorsque sont remplies les conditions

$$\sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha^i a_\alpha^j = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j, \\ 0 & \text{pour } i \neq j, \end{cases} \tag{3.12}$$

on a les égalités

$$a_i = \pm 1, \quad b_i = \pm 1, \quad c_i = \pm 1. \tag{3.13}$$

Dans le cas général, la représentation du groupe de symétrie $3/\overline{4}$ exige que la condition d'invariance du tenseur $\boldsymbol{T}_d$ soit complétée de celle d'invariance du tenseur $\boldsymbol{g}$, car c'est seulement dans ce cas seront remplies les conditions (3.12) faisant partie de la définition des groupes cristallins de symétrie *).

*) On vérifie aisément que, si $|e_i| = 1$, on a l'égalité $2\boldsymbol{g} = \boldsymbol{T}_d : \boldsymbol{T}_d$, où la contraction est effectuée sur deux indices de même position ; il n'en découle pourtant pas l'invariance de $\boldsymbol{g}$ par les transformations (3.10), compte tenu de (3.11).

Le système matriciel (3.10) conjointement avec les conditions (3.13) définit 48 matrices du groupe de symétrie $\bar{6}/4$; les égalités complémentaires (3.11) en dégagent un sous-groupe de 24 matrices où soit $a_i = b_i = c_i = 1$, soit deux éléments des trois nombres a_i, b_i, c_i sont à la fois égaux à -1. Par exemple, la première matrice (3.10) ne donne que quatre matrices

$$\left.\begin{array}{ll} \begin{Vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \\ \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}. \end{array}\right\} \tag{3.14}$$

On s'en convainc aisément que le système obtenu de 24 matrices représentant le groupe $3/\bar{4}$ est solution du système complet d'équations (3.7). De plus, lorsque $|a^i_j| \neq 0$, ce système de matrices constitue un système de toutes les solutions réelles des équations (3.7), à condition que les matrices recherchées soient orthogonales.

Passons maintenant aux conditions d'invariance pour le tenseur $\boldsymbol{T}_h$.

Le système d'équations pour les a^i_j, éléments de la matrice de transformation, est équivalent aux conditions d'invariance des composantes contravariantes du tenseur $\boldsymbol{T}_h$:

$$a^\alpha_2 a^\beta_2 a^\gamma_3 a^\delta_3 + a^\alpha_3 a^\beta_3 a^\gamma_1 a^\delta_1 + a^\alpha_1 a^\beta_1 a^\gamma_2 a^\delta_2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}. \tag{3.15}$$

On pose le second membre égal à l'unité lorsque $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = \delta = 3$; $\alpha = \beta = 3$, $\gamma = \delta = 1$; $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = \delta = 2$, et à zéro dans tous les autres cas. D'après (3.15)

pour $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = \delta = 1, 3$

$$a^1_2 a^1_3 = 0, \quad a^1_2 a^3_3 = 0, \quad a^1_3 a^1_1 = 0, \quad a^1_3 a^3_1 = 0, \quad a^1_1 a^1_2 = 0, \quad a^1_1 a^3_2 = 0, \tag{3.16}$$

pour $\alpha = \beta = 2$, $\gamma = \delta = 1, 2$

$$a^2_2 a^1_2 = 0, \quad a^2_2 a^2_3 = 0, \quad a^2_3 a^1_1 = 0, \quad a^2_3 a^2_1 = 0, \quad a^2_1 a^1_2 = 0, \quad a^2_1 a^2_2 = 0, \tag{3.17}$$

pour $\alpha = \beta = 3$, $\gamma = \delta = 2, 3$

$$a^3_2 a^2_3 = 0, \quad a^3_2 a^3_3 = 0, \quad a^3_3 a^2_1 = 0, \quad a^3_3 a^3_1 = 0, \quad a^3_1 a^2_2 = 0, \quad a^3_1 a^3_2 = 0. \tag{3.18}$$

Il découle des 18 équations (3.16) à (3.18) et de la condition $|a_j^i| \neq 0$ que chaque ligne et chaque colonne de la matrice $\| a_j^i \|$ ne peuvent contenir qu'un seul élément différent de zéro; ainsi, lorsque

$$a_1^1 \neq 0, \quad \text{alors} \quad a_2^1 = a_3^1 = a_2^3 = a_3^2 = a_1^2 = a_1^3 = 0.$$

Ainsi donc, on obtient les matrices

$$\text{pour } a_1^1 \neq 0 \qquad \text{pour } a_2^1 \neq 0 \qquad \text{pour } a_3^1 \neq 0$$

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^3 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & a_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 \\ a_1^3 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & a_3^1 \\ a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^3 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3.19}$$

Quand le second membre est égal à l'unité et $a_1^1 \neq 0$, trois équations (3.15) donnent

$$(a_2^2)^2 (a_3^3)^2 = 1, \quad (a_3^3)^2 (a_1^1)^2 = 1, \quad (a_1^1)^2 (a_2^2)^2 = 1. \tag{3.20}$$

Les solutions réelles de ces équations, ainsi que des équations analogiques qu'on obtient pour $a_2^1 \neq 0$ et $a_3^1 \neq 0$, sont données par

$$\begin{aligned} a_1^1 &= \pm 1, \quad a_2^2 = \pm 1, \quad a_3^3 = \pm 1, \\ a_2^1 &= \pm 1, \quad a_3^2 = \pm 1, \quad a_1^3 = \pm 1, \\ a_3^1 &= \pm 1, \quad a_1^2 = \pm 1, \quad a_2^3 = \pm 1. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Les valeurs obtenues pour a_j^i font voir que chaque matrice (3.19) se décompose en 8 matrices; en tout, on a pour $\overline{6}/4$ un sous-groupe matriciel composé de $3 \times 8 = 24$ matuices orthogonales. Il est clair que les solutions trouvées satisfont au système complet d'équations (3.15) et que chaque solution réelle y trouve sa place.

L'introduction du tenseur $\boldsymbol{E}$ en tant que grandeur déterminante complémentaire, invariante uniquement par le groupe des rotations propres, fait exclure pour $\Delta = +1$ les matrices avec $\Delta = -1$. L'ensemble des tenseurs $\boldsymbol{O}_h$ et $\boldsymbol{E}$ fait dégager du groupe de 48 matrices obtenu pour $\boldsymbol{O}_h$ un sous-groupe de 24 matrices avec $\Delta = +1$.

De même, l'ensemble de tenseurs $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{T}_d$ et $\boldsymbol{E}$ dégage de 24 matrices trouvées pour le groupe $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{T}_d$ un sous-groupe de 12 matrices avec $\Delta = +1$. Le fait de dégager effectivement les matrices correspondantes montre que les groupes de transformations associés aux systèmes de 12 matrices pour les tenseurs $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{T}_d$, $\boldsymbol{E}$ et les tenseurs $\boldsymbol{T}_h$, $\boldsymbol{E}$ coïncident.

Dans le cas du système cristallin tétragonal l'équivalence des tenseurs cités dans le tableau et des groupes de symétrie correspondants peut être expliquée de la manière suivante. Les groupes de symétrie pour le système cristallin tétragonal s'obtiennent comme l'intersection des groupes correspondants de symétrie des cristaux du système cubique et des groupes de symétrie des textures. Ainsi on peut former les sous-groupes corsespondants à partir des groupes du système cubique et des groupes des textures en composant l'ensemble approprié des tenseurs à partir des tenseurs donnant les groupes de symétrie cubique correspondants et des tenseurs définissant les groupes des textures. On voit tout de suite que la condition d'invariance des ensembles cités de tenseurs pour chacune des 7 classes du système tétragonal définit les groupes des matrices de transformations associées aux groupes de symétrie correspondant justement à ces systèmes cristallins.

Pour justifier le choix des tenseurs donnant la symétrie hexagonale et trigonale, il faut envisager les conditions d'invariance des composantes des couples de tenseurs suivants: $\boldsymbol{D}_{6h}$ et e_3^2, $\boldsymbol{D}_{3h}$ et e_3^2, $\boldsymbol{D}_{3d}$ et e_3^2. La condition d'invariance de la dyade e_3^2 dégage en tant que matrices de changement de coordonnées admissibles seulement les matrices de la forme

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{Vmatrix}. \tag{3.22}$$

De l'invariance de $\boldsymbol{D}_{6h}$ ou de $\boldsymbol{D}_{3h}$ ou de $\boldsymbol{D}_{3d}$ il découle que $a_3^1 = a_3^2 = 0$.

Si l'on exige l'invariance du vecteur e_3 au lieu de e_3^2, cela conduit aux matrices de transformation suivantes:

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{Vmatrix}. \tag{3.23}$$

Comme $\boldsymbol{D}_{6h}$, $\boldsymbol{D}_{3h}$ et $\boldsymbol{D}_{3d}$ s'expriment uniquement par les vecteurs de base e_1 et e_2, l'invariance de ces tenseurs est liée à la structure des matrices du second ordre

$$D = \begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{Vmatrix}. \tag{3.24}$$

La structure matricielle des D se dégage facilement si l'on introbuit une base complexe de la forme

$$j_1 = e_1 + ie_2, \quad j_2 = e_1 - ie_2.$$

Dans cette base, les tenseurs $\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{D}_{6h}$ et $\boldsymbol{D}_{3d}$ prennent la forme

$$2\boldsymbol{D}_{3h}=\boldsymbol{j}_1^3+\boldsymbol{j}_2^3,\quad 4\boldsymbol{D}_{6h}=(\boldsymbol{j}_1^3+\boldsymbol{j}_2^3)^2,\quad 2\boldsymbol{D}_{3d}=\boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{j}_1^3+\boldsymbol{j}_2^3).$$

Les conditions d'invariance de ces tenseurs dans une base réelle peuvent être récrites dans la base complexe. Les formules de transformation d'une base complexe s'écrivant

$$\boldsymbol{j}_i=b_i^\alpha\boldsymbol{j}'_\alpha,$$

la relation entre les matrices $\| a_j^i \|$ et $\| b_j^i \|$ sera donnée par

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{Vmatrix}. \tag{3.25}$$

La condition d'invariance du tenseur $\boldsymbol{D}_{3d}$ conduit au système d'équations suivant pour b_j^i:

$$b_1^\alpha b_1^\beta b_1^\gamma+b_2^\alpha b_2^\beta b_2^\gamma=\begin{cases} 1 \text{ pour } \alpha=\beta=\gamma, \\ 0 \text{ dans les autres cas,} \end{cases}$$

qui, sous forme développée, est équivalent aux équations

$$\left.\begin{aligned} &(b_1^1)^3+(b_2^1)^3=1, \quad b_1^1(b_1^2)^2+b_2^1(b_2^2)^2=0, \\ &(b_1^2)^3+(b_2^2)^3=1, \quad b_1^2(b_1^1)^2+b_2^2(b_2^1)^2=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Il est facile d'obtenir toutes les solutions des équations (3.26) satisfaisant à la condition $|b_j^i|\neq 0$. Comme les a_j^i sont réelles, on tire de la formule (3.25) que $b_1^1=\bar{b}_2^2$ et $b_2^1=\bar{b}_1^2$. Compte tenu de ce fait, écrivons 6 matrices pour $\| b_j^i \|$:

$$\left.\begin{aligned} &\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{Vmatrix}, \\ &\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} 0 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \end{Vmatrix} \end{aligned}\quad \left(\varepsilon=\exp\frac{2\pi i}{3}\right).\right\} \tag{3.27}$$

L'orthogonalité des matrices correspondantes (3.22) s'obtient automatiquement. A l'aide des formules (3.27), (3.25) et (3.22) il est facile d'écrire les douze matrices liées à l'invariance des tenseurs $\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{e}_3^2$ et caractérisant la classe $m\cdot 3$: m du système hexagonal. L'invariance de la combinaison $\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{e}_3$ détermine six matrices qu'on obtient de (3.23), (3.25) et (3.27) et qui correspondent à la classe $3\cdot m$ du système cristallin trigonal.

Les conditions d'invariance de $\boldsymbol{D}_{3d}$ et de $\boldsymbol{e}_3^2$ modifient quelque peu les équations (3.26). La résolution des équations correspondantes conduit au système de douze matrices, dont les six premières, liées à l'invariance de $\boldsymbol{e}_3$, sont confondues avec les matrices de la classe

$3 \cdot m$ ($\boldsymbol{D}_{3h}$, $\boldsymbol{e}_3$), les six autres s'obtiennent à partir des premières par changement de signe de toutes les composantes matricielles. Les conditions d'invariance de $\boldsymbol{D}_{6h}$ et de $\boldsymbol{e}_3^2$ donnent les matrices du type (3.22), alors dans les équations correspondantes du type (3.26) on écrira à droite $+1$ au lieu de ± 1. La solution est donnée donc par douze matrices de la classe $m \cdot 3 : m$ et par douze matrices suivantes

$$\begin{Vmatrix} \tau^3 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^3 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau^5 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \tau^5 & 0 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{Vmatrix},$$
$$\begin{Vmatrix} 0 & \tau^3 & 0 \\ \tau^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & \tau^5 & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{Vmatrix} \qquad \left(\tau = \exp \frac{\pi i}{3}\right).$$

On écrit facilement les matrices réelles correspondantes en se servant de (3.25).

Les paramètres tensoriels de toutes les autres classes des systèmes hexagonal et trigonal, qui sont les sous-groupes des groupes de symétrie étudiés plus haut, s'obtiennent sans difficulté comme intersections des groupes correspondants dont les caractéristiques tensorielles sont déjà établies.

Quant aux systèmes cristallins rhomboédrique, monoclinique et triclinique, les caractéristiques tensorielles indiquées dans le tableau sont évidentes. Il est clair que les ensembles de tenseurs donnant tel ou tel groupe de symétrie ne se définissent pas univoquement.

Dans chaque cas envisagé dans le tableau on peut prendre au lieu des tenseurs indiqués un autre système de tenseurs lié univoquement au système de tenseurs du tableau. En particulier, il est possible de varier le nombre et l'ordre des tenseurs donnant la symétrie.

Par exemple, au lieu des tenseurs du tableau on peut prendre la combinaison suivante des groupes et des tenseurs *)

$m \cdot 2 : m$	$\boldsymbol{e}_1^2$,	$\boldsymbol{e}_2^2$,	$\boldsymbol{e}_3^2$,		2	$\boldsymbol{e}_1^2$,	$\boldsymbol{e}_2^2$,	$\boldsymbol{e}_3$,	$\boldsymbol{E}$,
$2 : 2$,	$\boldsymbol{e}_1^2$,	$\boldsymbol{e}_2^2$,	$\boldsymbol{e}_3^2$,	$\boldsymbol{E}$,	m	$\boldsymbol{e}_1$,	$\boldsymbol{e}_2$,	$\boldsymbol{e}_3^2$,	
$2 \cdot m$	$\boldsymbol{e}_1^2$,	$\boldsymbol{e}_2^2$,	$\boldsymbol{e}_3$,		$\bar{2}$	$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$,	$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$,	$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$.	
$2 : m$	$\boldsymbol{e}_1^2$,	$\boldsymbol{e}_2^2$,	$\boldsymbol{e}_3^2$,	$\boldsymbol{\Omega}$,					

Chaque tenseur de ces systèmes s'exprime facilement par ceux du tableau. Les relations réciproques sont tout à fait évidentes.

Dans ce qui précède, le problème était de définir les tenseurs

*) On sous-entend que les produits des vecteurs et leurs puissances sont dyadiques.

donnant les groupes de symétrie des cristaux et des textures. Le problème concernant la définition des groupes de symétrie orthogonaux correspondant au tenseur donné a été traité plus haut pour les cas particuliers les plus importants.

4°. **Fonctions tensorielles des tenseurs caractérisant les propriétés géométriques des textures et des cristaux.** On donne ci-dessous les expressions générales de la forme (1.3) vraies en axes arbitraires pour les composantes des vecteurs A^i, les composantes des tenseurs du second ordre A^{ij}, du troisième ordre A^{ijk} et du quatrième ordre A^{ijkl} pour les textures *) et les cristaux, en fonction des variables tensorielles données dans le tableau, définissant les groupes de symétrie correspondants.

Comme les invariants compatibles des tenseurs définissant les groupes de symétrie sont des constantes absolues, les coefficients invariants k_s ($s = 1 \ldots, p$) représentent soit les nombres constants, soit les fonctions de quelques scalaires qui, en plus des tenseurs relevés, peuvent figurer aussi parmi les paramètres déterminants.

Les formules contiennent, dans chaque cas, seulement p termes additifs linéairement indépendants. Le choix de ces termes peut varier, mais chaque fois l'ensemble correspondant des termes additifs peut être écrit sous forme de combinaisons linéaires des termes présents dans les formules. Le problème du choix des tenseurs linéairement indépendants peut jouer un rôle important lorsqu'on recourt à certaines hypothèses complémentaires sur le caractère des relations fonctionnelles (dépendance linéaire de certaines composantes, etc.). On tire de ces formules les données connues [2] quand sont remplies les conditions de symétrie suivantes:

$$A^{ij} = A^{ji}, \quad A^{ijk} = A^{ikj},$$
$$A^{ijkl} = A^{ijlk}, \quad A^{ijkl} = A^{jikl}, \quad A^{ijkl} = A^{klij}.$$

Ces conditions sont observées à condition d'imposer les restrictions supplémentaires aux coefficients invariants. Les formules correspondantes s'obtiennent à partir des formules écrites à l'aide de l'opération de symétrisation.

Textures

Classe $\infty/\infty \cdot m\,(g)$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = kg^{ij}, \quad A^{ijk} = 0,$$
$$A^{ijkl} = k_1 g^{ij} g^{kl} + k_2 g^{ik} g^{jl} + k_3 g^{il} g^{jk}.$$

Classe $\infty/\infty\,(g, E)$

$$A^i = 0, \quad A^{ij} = kg^{ij}, \quad A^{ijk} = kE^{ijk}, \quad A^{ijkl} = A^{ijkl}\ (\infty/\infty \cdot m).$$

*) Des formules analogues, en partie incorrectes, furent publiées dans [28]. Ici on a pris soin de corriger les erreurs.

Classe $m\cdot\infty : m\,(g,\ B=e_3^2)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\ A^{ijk}=0,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(\infty/\infty\cdot m)+k_4g^{ij}B^{kl}+k_5g^{ik}B^{jl}+k_6g^{il}B^{jk}+$$
$$+k_7g^{kl}B^{ij}+k_8g^{jl}B^{ik}+k_9g^{jk}B^{il}+k_{10}B^{ij}B^{kl}.$$

Classe $\infty : 2 : (g,\ B=e_3^2,\ E)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},$$
$$A^{ijk}=k_1E^{ijk}+k_2B^i_\alpha E^{\alpha jk}+k_3E^{ij\alpha}B^k_\alpha,\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}\ (m\cdot\infty : m).$$

Classe $\infty : m\,(g,\ B=e_3^2,\ \Omega=e_1e_2-e_2e_1)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij}+k_3\Omega^{ij},\ A^{ijk}=0,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}\ (m\cdot\infty : m)+k_{11}g^{ij}\Omega^{kl}+k_{12}g^{ik}\Omega^{jl}+k_{13}g^{il}\Omega^{jk}+$$
$$+k_{14}g^{kl}\Omega^{ij}+k_{15}g^{jl}\Omega^{ik}+k_{16}g^{jk}\Omega^{il}+k_{17}B^{ij}\Omega^{kl}+k_{18}B^{ik}\Omega^{jl}+k_{19}\Omega^{ij}B^{kl}.$$

Classe $\infty\cdot m\ (g,\ b=e_3)$

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j,$$
$$A^{ijk}=k_1g^{ij}b^k+k_2g^{ik}b^j+k_3p^{jk}b^i+k_4b^ib^jb^k,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}\ (\infty/\infty\cdot m)+k_4g^{ij}b^kb^l+k_5g^{ik}b^jb^l+k_6g^{il}b^jb^k+$$
$$+k_7g^{kl}b^ib^j+k_8g^{jl}b^ib^k+k_9g^{jk}b^ib^l+k_{10}b^ib^jb^kb^l.$$

Classe $\infty\ (g,\ b=e_3,\ E)$

$$A^i=kb^i,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j+k_3E^{ij\alpha}b_\alpha,$$
$$A^{ijk}=k_1g^{ij}b^k+k_2g^{ik}b^j+k_3g^{jk}b^i+k_4b^ib^jb^k+$$
$$+k_5\Omega^{ij}b^k+k_6\Omega^{ik}b^j+k_7\Omega^{jk}b^i,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}\ (\infty\cdot m)+k_{11}g^{ij}\Omega^{kl}+k_{12}g^{ik}\Omega^{jl}+$$
$$+k_{13}g^{il}\Omega^{jk}+k_{14}g^{kl}\Omega^{ji}+k_{15}g^{jl}\Omega^{ik}+k_{16}g^{jk}\Omega^{il}+k_{17}b^ib^j\Omega^{kl}+$$
$$+k_{18}b^ib^k\Omega^{jl}+k_{19}\Omega^{ij}b^kb^l\ (\Omega^{ij}=E^{ij\alpha}b_\alpha).$$

Système cristallin cubique

Classe $\bar{6}/4\ (O_h)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=kg^{ij},\ A^{ijk}=0,\ A^{ijkl}=A^{ijkl}\ (\infty/\infty\cdot m)+k_4O_h^{ijkl}.$$

Classe $3/4\ (O_h,\ E)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=kg^{ij},\ A^{ijk}=kE^{ijk},\ A^{ijkl}=A^{ijkl}\ (\bar{6}/4),$$

Classe $3/\bar{4}\ (g,\ T_d)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=kg^{ij},\ A^{ijk}=kT_d^{ijk},\ A^{ijkl}=A^{ijkl}\ (\bar{6}/4).$$

Classe $3/2\,(g,\ E,\ T_d)$ ou $(T_h,\ E)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=kg^{ij},\ A^{ijk}=k_1E^{ijk}+k_2T_d^{ijk},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}\ (\bar{6}/4)+k_5T_h^{ijkl}+k_6T_h^{iljk}+k_7T_h^{ikjl}.$$

Classe $\overline{6}/2\,(\boldsymbol{T}_h)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=kg^{ij},\ A^{ijk}=0,\ A^{ijkl}=A^{ijkl}(3/2).$$

Système cristallin tétragonal

Classe $m\cdot 4:m\,(\boldsymbol{O}_h,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=A^{ij}(m\cdot\infty:m)=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},$$
$$A^{ijk}=0,\ A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m)+k_{11}O_h^{ijkl}.$$

Classe $\overline{4}\cdot m\,(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{T}_d,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},$$
$$A^{ijk}=k_1T_d^{ijk}+k_2T_d^{ij\alpha}B^{k\cdot}_{\cdot\alpha}+k_3T_d^{ik\alpha}B^{j\cdot}_{\cdot\alpha},\ A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot 4:m).$$

Classe $4:2\,(\boldsymbol{O}_h,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=0,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\ A^{ijk}=A^{ijk}(\infty:2),$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot 4:m).$$

Classe $4:m\,(\boldsymbol{O}_h,\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=A^{ij}(\infty:m),\ A^{ijk}=0,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty:m)+k_{20}O_h^{ijkl}+k_{21}O_h^{jkl\alpha}\Omega^{i\cdot}_{\cdot\alpha}.$$

Classe $\overline{4}\,(\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{T}_d,\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=A^{ij}(\infty:m),$$
$$A^{ijk}=A^{ijk}(\overline{4}\cdot m)+k_4T_d^{ij\alpha}\Omega^{k\cdot}_{\cdot\alpha}+k_5\Omega^{i\cdot}_{\cdot\alpha}T_d^{\alpha jk}+k_6\Omega^{i\cdot}_{\cdot\alpha}T_d^{\alpha j\beta}B^{k\cdot}_{\cdot\beta},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(4:m).$$

Classe $4\cdot m\,(\boldsymbol{O}_h,\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3)$

$$A^i=kb^i,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j,\ A^{ijk}=A^{ijk}(\infty\cdot m),$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot 4:m),$$

Classe $4\,(\boldsymbol{O}_h,\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=kb^i,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j+k_3\Omega^{ij}\ (\Omega^{ij}=E^{ij\alpha}b_\alpha),$$
$$A^{ijk}=A^{ijk}(\infty),\ A^{ijkl}=A^{ijkl}(\infty)+k_{20}O_h^{ijkl}+k_{21}O_h^{jkl\alpha}\Omega^{i\cdot}_{\cdot\alpha}.$$

Système cristallin hexagonal

Classe $m\cdot 6:m\,(\boldsymbol{D}_{6h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\ A^{ijk}=0,\ A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m).$$

Classe $m\cdot 3:m\,(\boldsymbol{D}_{3h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\ A^{ijk}=kD_{3h}^{ijk},\ A^{ijkl}=A^{ijkl}(m\cdot\infty:m).$$

Classe $6:2\,(\boldsymbol{D}_{6h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=0,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\ A^{ijk}=A^{ijk}\,(\infty:2),$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(m\cdot\infty:m).$$

Classe $6:m\,(\boldsymbol{D}_{6h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=A^{ij}\,(\infty:m),\ A^{ijk}=0,\ A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(\infty:m).$$

Classe $3:m\,(\boldsymbol{D}_{3h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=A^{ij}\,(\infty:m),\ A^{ijk}=k_1D_{3h}^{ijk}+k_2D_{3h}^{ij\alpha}\Omega^{k\cdot}_{\cdot\alpha},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(\infty:m).$$

Classe $6\cdot m\,(\boldsymbol{D}_{6h},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3)$

$$A^i=kb^i,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j,\ A^{ijk}=A^{ijk}\,(\infty\cdot m),\ A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(\infty\cdot m),$$

Classe $6\,(\boldsymbol{D}_{6h},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=kb^i,\ A^{ij}=A^{ij}\,(\infty),\ A^{ijk}=A^{ijk}\,(\infty),\ A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(\infty).$$

Système cristallin trigonal

Classe $\overline{6}\cdot m\,(\boldsymbol{D}_{3d},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\ A^{ijk}=0,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(m\cdot\infty:m)+k_{11}D_{3d}^{ijkl}+k_{12}D_{3d}^{jikl}+k_{13}D_{3d}^{kijl}+k_{14}D_{3d}^{lijk}.$$

Classe $3:2\,(\boldsymbol{D}_{3h},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=0,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2B^{ij},\ A^{ijk}=A^{ijk}\,(\infty:2)+k_4D_{3h}^{ijk},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(m\cdot\infty:m)+k_{11}D_{3h}^{ij\alpha}E_{\alpha\cdot\cdot}^{\cdot kl}+k_{12}E^{\alpha ij}D_{3h\cdot\cdot\alpha}^{kl\cdot}+$$
$$+k_{13}E^{\alpha ik}D_{3h\cdot\cdot\alpha}^{jl\cdot}+k_{14}E^{\alpha kj}D_{3h\cdot\cdot\alpha}^{il\cdot},$$

Classe $\overline{6}\,(\boldsymbol{D}_{3d},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_3^2,\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1)$

$$A^i=0,\ A^{ij}=A^{ij}\,(\infty:m),\ A^{ijk}=0,$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(\infty:m)+k_{20}D_{3d}^{ijkl}+k_{21}D_{3d}^{jikl}+k_{22}D_{3d}^{kijl}+k_{23}D_{3d}^{lijk}+$$
$$+k_{24}D_{3d}^{ijk\alpha}\Omega^{l\cdot}_{\cdot\alpha}+k_{25}D_{3d}^{jik\alpha}\Omega^{l\cdot}_{\cdot\alpha}+k_{26}D_{3d}^{kij\alpha}\Omega^{l\cdot}_{\cdot\alpha}+k_{27}D_{3d}^{lij\alpha}\Omega^{k\cdot}_{\cdot\alpha}.$$

Classe $3\cdot m\,(\boldsymbol{D}_{3h},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3)$

$$A^i=kb^i,\ A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j,\ A^{ijk}=A^{ijk}\,(\infty\cdot m)+k_5D_{3h}^{ijk},$$
$$A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(\infty\cdot m)+k_{11}D_{3h}^{ijk}b^l+k_{12}D_{3h}^{ijl}b^k+k_{13}D_{3h}^{ikl}b^j+k_{14}D_{3h}^{klj}b^i.$$

Classe $3\,(\boldsymbol{D}_{3h},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{E})$

$$A^i=kb^i,\ A^{ij}=A^{ij}\,(\infty),$$
$$A^{ijk}=A^{ijk}\,(\infty)+k_8D_{3h}^{ijk}+k_9D_{3h}^{ij\alpha}\Omega^{k\cdot}_{\cdot\alpha},\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(\overline{6}).$$

Système cristallin rhomboédrique

Classe $m\cdot 2:m\,(\boldsymbol{D}_{2h},\ \boldsymbol{g})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=k_1g^{ij}+k_2D^{ij}_{2h}+k_3D^{i\alpha}_{2h}D_{2h\alpha}^{\cdot j}\ \text{(formule de Cayley-Hamilton)},$$

$$\begin{aligned}A^{ijk}=0,\quad A^{ijkl}=&\,k_1g^{ij}g^{kl}+k_2g^{ik}g^{jl}+k_3g^{il}g^{jk}+k_4g^{ij}D^{kl}_{2h}+k_5g^{ik}D^{jl}_{2h}+\\&+k_6g^{il}D^{jk}_{2h}+k_7D^{ij}_{2h}g^{kl}+k_8D^{ik}_{2h}g^{jl}+k_9D^{il}_{2h}g^{jk}+k_{10}g^{ij}M^{kl}+\\&+k_{11}g^{ik}M^{jl}+k_{12}g^{il}M^{jk}+k_{13}M^{ij}g^{kl}+k_{14}M^{ik}g^{jl}+\\&+k_{15}M^{il}g^{jk}+k_{16}D^{ij}_{2h}D^{kl}_{2h}+k_{17}D^{il}_{2h}M^{jk}+k_{18}D^{ij}_{2h}M^{kl}+\\&+k_{19}D^{ik}_{2h}M^{jl}+k_{20}M^{ij}D^{kl}_{2h}+k_{21}M^{ij}M^{kl}\ (M^{ij}=D^{i\alpha}_{2h}D_{2h\alpha}^{\cdot j}).\end{aligned}$$

Classe $2:2\,(\boldsymbol{D}_{2h},\ \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{g})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}\,(m\cdot 2:m),$$

$$\begin{aligned}A^{ijk}=&\,k_1E^{ijk}+k_2E^{ij\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot k}+k_3E^{ik\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot j}+k_4E^{ij\alpha}M^{k\cdot}_{\cdot\alpha}+\\&+k_5E^{ik\alpha}M^{j\cdot}_{\cdot\alpha}+k_6D^{i\alpha}_{2h}E_{\alpha\cdot\beta}^{\cdot j\cdot}M^{\beta k},\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(m\cdot 2:m).\end{aligned}$$

Classe $2\cdot m\,(\boldsymbol{D}_{2h},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{g})$

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=A^{ij}\,(m\cdot 2:m)=k_1g^{ij}+k_2b^ib^j+k_3D^{ij}_{2h},$$

$$\begin{aligned}A^{ijk}=&\,k_1g^{ij}b^k+k_2g^{ik}b^j+k_3g^{kj}b^i+k_4b^ib^jb^k+\\&+k_5D^{ij}_{2h}b^k+k_6D^{ik}_{2h}b^j+k_7D^{kj}_{2h}b^i,\quad A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(m\cdot 2:m).\end{aligned}$$

Système cristallin monoclinique

Classe $2:m\,(\boldsymbol{D}_{2h},\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{g})$

$$A^i=0,\quad A^{ij}=A^{ij}\,(m\cdot 2:m)+k_4\Omega^{ij}+k_5\Omega^{i\alpha}D_{2h\cdot\alpha}^{\cdot j\cdot},\quad A^{ijk}=0,$$

$$\begin{aligned}A^{ijkl}=&\,A^{ijkl}\,(m\cdot 2:m)+k_{22}g^{ij}\Omega^{kl}+k_{23}g^{ik}\Omega^{jl}+k_{24}g^{il}\Omega^{jk}+\\&+k_{25}g^{kl}\Omega^{ij}+k_{26}g^{jl}\Omega^{ik}+k_{27}g^{jk}\Omega^{il}+k_{28}g^{ij}\Omega^{k\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot l}+\\&+k_{29}g^{ik}\Omega^{j\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot l}+k_{30}g^{il}\Omega^{j\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot k}+k_{31}g^{kl}\Omega^{i\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot j}+\\&+k_{32}g^{jl}\Omega^{j\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot k}+k_{33}g^{jk}\Omega^{i\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot l}+k_{34}D^{ij}_{2h}\Omega^{kl}+\\&+k_{35}D^{ik}_{2h}\Omega^{jl}+k_{36}D^{kl}_{2h}\Omega^{ij}+k_{37}D^{ij}_{2h}\Omega^{k\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot l}+\\&+k_{38}D^{il}_{2h}\Omega^{j\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot k}+k_{39}D^{kl}_{2h}\Omega^{i\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot j}+k_{40}M^{kl}\Omega^{ij}+k_{41}M^{ij}\Omega^{k\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot l}.\end{aligned}$$

Classe $2\,(\boldsymbol{D}_{2h},\ \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{g})$

$$A^i=kb^i,\quad A^{ij}=A^{ij}\,(2:m),$$

$$\begin{aligned}A^{ijk}=&\,k_1g^{ij}b^k+k_2g^{ik}b^j+k_3g^{jk}b^i+k_4b^ib^jb^k+k_5D^{ij}_{2h}b^k+k_6D^{ik}_{2h}b^j+\\&+k_7D^{kj}_{2h}b^i+k_8\Omega^{ij}b^k+k_9\Omega^{ik}b^j+k_{10}\Omega^{kj}b^i+k_{11}\Omega^{i\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot j}b^k+\\&+k_{12}\Omega^{i\alpha}D_{3h\alpha}^{\cdot\cdot k}b^j+k_{13}\Omega^{k\alpha}D_{2h\alpha}^{\cdot\cdot j}b^i,\end{aligned}$$

$$A^{ijkl}=A^{ijkl}\,(2:m).$$

Classe m ($\boldsymbol{D}_{2h}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_2$)

$$A^i = k_1 b^i + k_2 c^i, \quad A^{ij} = k_1 g^{ij} + k_2 b^i b^j + k_3 c^i c^j + k_4 b^i c^j + k_5 c^i b^j,$$

$$\begin{aligned} A^{ijk} = {} & k_1 g^{ij} b^k + k_2 g^{ik} b^j + k_3 g^{jk} b^i + k_4 b^i b^j b^k + k_5 g^{ij} c^k + k_6 g^{ik} c^j + \\ & + k_7 g^{jk} c^i + k_8 c^i b^j b^k + k_9 b^i c^j b^k + k_{10} b^i b^j c^k + k_{11} b^i c^j c^k + \\ & + k_{12} c^i b^j c^k + k_{13} c^i c^j b^k + k_{14} c^i c^j c^k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{ijkl} = A^{ijkl}(2:m) = {} & k_1 g^{ij} g^{kl} + k_2 g^{ik} g^{jl} + k_3 g^{il} g^{jk} + k_4 g^{ij} b^k b^l + \\ & + k_5 g^{ik} b^j b^l + k_6 g^{il} b^j b^k + k_7 b^i b^j g^{kl} + k_8 b^i b^k g^{jl} + k_9 b^i b^l g^{jk} + \\ & + k_{10} g^{ij} b^k c^l + k_{11} g^{ik} b^j c^l + k_{12} g^{il} b^j c^k + k_{13} g^{kl} b^i c^j + k_{14} g^{jl} b^i c^k + \\ & + k_{15} g^{jk} b^i c^l + k_{16} g^{ij} c^k b^l + k_{17} g^{ik} c^j b^l + k_{18} g^{il} c^j b^k + k_{19} g^{kl} c^i b^j + \\ & + k_{20} g^{jl} c^i b^k + k_{21} g^{jk} c^i b^l + k_{22} c^i b^j b^k b^l + k_{23} b^i c^j b^k b^l + \\ & + k_{24} b^i b^j c^k b^l + k_{25} b^i b^j b^k c^l + k_{26} g^{ij} c^k c^l + k_{27} g^{ik} c^j c^l + \\ & + k_{28} g^{il} c^j c^k + k_{29} c^k c^l c^i c^j + k_{30} b^i b^j b^k b^l + k_{31} g^{jk} c^i c^l + k_{32} b^i b^j c^k c^l + \\ & + k_{33} b^i b^k c^j c^l + k_{34} b^i b^l c^j c^k + k_{35} c^i c^j b^k b^l + k_{36} c^i c^k b^j b^l + \\ & + k_{37} c^i c^l b^j b^k + k_{38} b^i c^j c^k c^l + k_{39} c^i b^j c^k c^l + k_{40} c^j c^i b^k c^l + k_{41} c^i c^j c^k b^l. \end{aligned}$$

Si au lieu de $\boldsymbol{D}_{2h}$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ on prend $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3^2$ comme tenseurs déterminants, la dernière formule pour les tenseurs du quatrième ordre peut être remplacée par la formule suivante:

$$\begin{aligned} A_4 = {} & k^{ijkl} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_l + k^{\alpha\beta 33} \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3 + k^{\alpha 33\beta} \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_\beta + k^{33\alpha\beta} \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta + \\ & + k^{3\alpha 3\beta} \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_\beta + k^{3\alpha\beta 3} \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta \boldsymbol{e}_3 + k^{\alpha 3\beta 3} \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_\beta \boldsymbol{e}_3 + k^{3333} \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{e}_3, \end{aligned} \qquad (*)$$

où la sommation est effectuée sur les indices i, j, k, l, α, β ne prenant que deux valeurs: 1 et 2. Un calcul élémentaire montre que cette formule se compose de 41 termes additifs dont l'indépendance linéaire est évidente.

On voit aisément que pour les tenseurs de l'ordre pair et, en particulier, pour les tenseurs du quatrième ordre pour les classes du système cristallin monoclinique 2 : m, 2 et m, les paramètres déterminants correspondants peuvent être remplacés par un même système de tenseurs $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3^2$, d'où la possibilité d'employer les mêmes formules. Ainsi donc, la formule (*) est valable pour les tenseurs du quatrième ordre de toutes les classes du système cristallin monoclinique.

De même, on voit facilement que les tenseurs du quatrième ordre du groupe cristallin rhomboédrique à 21 termes linéairement indépendants s'obtiennent à partir de la formule (*), où il ne faut garder que les termes avec $i = j$, $k = l$; $i = k$, $j = l$ et $i = l$, $j = k$ et $\alpha = \beta$.

Il est clair alors qu'il est souvent rationnel, lors de la construction des formules générales pour les fonctions tensorielles, de modifier la base initiale suivant le cas considéré.

Système cristallin triclinique

Classe $\bar{2}$ (C_i)

$$A^i = 0,\ A^{ij} \text{ — cas général avec 9 composantes,}$$

$$A^{ijk} = 0,\ A^{ijkl} \text{ — cas général avec 81 composantes.}$$

Classe 1 (e_1, e_2, e_3).

La forme générale de tous les tenseurs est celle en l'absence de symétrie.

5°. **Fonctions tensorielles pour les textures et cristaux en présence des arguments tensoriels complémentaires.** Admettons maintenant qu'en plus des tenseurs donnant les propriétés géométriques des textures et des cristaux, on trouve parmi les paramètres déterminants arguments indépendants, d'autres tenseurs. Il est évident que les groupes de symétrie de l'ensemble des paramètres déterminants sont alors des groupes ou des sous-groupes correspondants des textures ou des cristaux. Les sous-groupes, différents des groupes cristallographiques, peuvent avoir lieu seulement lorsqu'on envisage les textures. En ajoutant d'autres tenseurs aux tenseurs définissant la symétrie cristalline, on obtient de nouveau des groupes de symétrie cristalline, ou bien le groupe de symétrie se réduit à une transformation identique.

Tous les sous-groupes d'un groupe donné de symétrie cristalline sont contenus dans les 32 groupes cristallins. Par conséquent, en ajoutant d'autres tenseurs à ceux qui donnent la symétrie des cristaux, on arrive à des groupes de symétrie de l'ensemble des arguments qui appartiendront également à un des 32 groupes cristallins.

Le nombre de composantes linéairement indépendantes des tenseurs à déterminer ne se réduit, en général, qu'en présence d'une symétrie correspondante. Il est clair que les simplifications, dans le cas des cristaux, ne sont possibles que lorsque l'ensemble des paramètres déterminants admet un groupe non trivial de symétrie. Après avoir déterminé le type du groupe de symétrie cristalline pour l'ensemble des arguments tensoriels, on peut recourir, afin d'éclaircir la structure des composantes de la fonction tensorielle recherchée, à une des formules du paragraphe 4°.

Ainsi, les formules du paragraphe 4° peuvent être utilisées pour établir la structure des fonctions tensorielles dans le cas général pour les cristaux. La nature des formules respectives n'apparaît que lorsqu'on met en évidence les propriétés de symétrie de l'ensemble des arguments donnés, ce qui équivaut, pour les cristaux, à représenter les tenseurs déterminants au moyen de l'ensemble des

tenseurs caractérisant les classes cristallines indiquées dans le tableau.

Les considérations qu'on vient de communiquer permettent d'analyser avec succès un grand nombre de différents cas particuliers quand les tenseurs complémentaires sont spéciaux ou ont une forme spéciale en axes cristallophysiques.

En présence de tenseurs complémentaires, les scalaires k_s sont, en général, des fonctions des invariants compatibles des tenseurs complémentaires et des tenseurs donnant la symétrie des textures ou des cristaux. Les invariants compatibles variables sont dus aux tenseurs complémentaires. Le nombre d'invariants fonctionnellement indépendants est égal, en général, au nombre de composantes fonctionnellement indépendantes des tenseurs variables. Dans certains cas particuliers le nombre de composantes fonctionnellement indépendantes peut être plus petit.

Dans un système de coordonnées fixe les arguments scalaires ω_i, dont peuvent dépendre les coefficients k_s, peuvent être choisis, dans le cas général, de manière qu'ils conservent leur valeur pour les différents tenseurs variables, équivalents du point de vue de la symétrie des textures ou des cristaux respectivement. Ces arguments, établis en axes fixes, peuvent différer des invariants Ω_i lors de tout changement de coordonnées et coïncider avec eux ($\omega_i = \Omega_i$) dans un système de coordonnées fixe donné.

6°. **Tenseur de courbure de l'espace riemannien et la généralisation du théorème de Shur.** La présente théorie concerne toutes les régularités formulées en physique et en mathématiques sous forme d'équations vectorielles et tensorielles et qui sont plus au moins liées aux propriétés de symétrie géométrique.

Les applications connues sont très variées, citons, entre autres, la loi de Hooke pour les textures et les cristaux, les effets optiques et piézoélectriques, etc. A titre d'exemple envisageons le tenseur de la courbure de Christoffel-Riemann R_{ijkl}. Comme on sait, ce tenseur est antisymétrique par rapport aux indices k et l si l'on permute les indices i et j, et symétrique par la permutation des couples d'indices ij et kl. Dans l'espace tridimensionnel, parmi les composantes de R_{ijkl} six seulement peuvent prendre des valeurs indépendantes arbitraires. Ces six composantes définissent six composantes d'un tenseur symétrique du second ordre K^{mn} que l'on introduit par la formule

$$K^{mn} = E^{ijm} E^{kln} R_{ijkl}. \tag{6.1}$$

D'où

$$R_{ijkl} = \frac{1}{4} E_{ijm} E_{kln} K^{mn}. \tag{6.2}$$

On connaît [31] que les composantes du tenseur de courbure vérifient l'identité de Bianka

$$\nabla_r R_{ijmn} + \nabla_m R_{ijnr} + \nabla_n R_{ijrm} = 0,$$

où les indices m, n, r sont différents et $\nabla_\varkappa$ est le symbole de la dérivée covariante par rapport à la coordonnée $x^\varkappa$. On se convainc aisément que l'identité de Bianka est équivalente à l'identité suivante pour les composantes du tenseur K^{mn}:

$$\nabla_\alpha K^{m\alpha} = 0. \tag{6.3}$$

Si en des points de l'espace riemannien le tenseur de courbure admet une symétrie quelconque, en se basant sur la théorie développée dans le présent ouvrage, il est facile d'écrire des formules générales exprimant les composantes des tenseurs R_{ijkl} et K^{mn} par celles des tenseurs donnant les groupes de symétrie correspondants. Par exemple, pour la symétrie du type texture sont vraies les formules suivantes: pour la symétrie $\infty/\infty\cdot m$ et ∞/∞

$$K^{mn} = kg^{mn}; \tag{6.4}$$

pour la symétrie $\infty\cdot m$, $m\cdot\infty : m$, $\infty : 2$, $\infty : m$, ∞

$$K^{mn} = kg^{mn} + k_1 b^m b^n, \tag{6.5}$$

b^m étant les composantes du vecteur unitaire dirigé le long de l'axe de symétrie. On trouve les formules analogues toujours quand les composantes du tenseur K^{mn} admettent un groupe fini de symétrie quelconque. Ainsi, en présence de la symétrie répondant à l'une quelconque des cinq classes du système cristallin cubique, on a la formule

$$K^{mn} = kg^{mn}. \tag{6.6}$$

On voit que dans ce cas le tenseur K^{mn} est sphérique comme dans celui d'une isotropie parfaite.

A partir des relations (6.2) et (6.4) à (6.6) on peut écrire les formules correspondantes pour les composantes du tenseur R_{ijkl}.

La formule (6.4) et l'identité de Bianka (6.3) donnent

$$g^{m\alpha}\nabla_\alpha k = 0. \tag{6.7}$$

Cette dernière égalité est l'expression du théorème connu de Shur, selon lequel de l'isotropie du tenseur de courbure en chaque point découle la constance de la courbure dans tout l'espace, car on a, d'après (6.7),

$$k = \text{const}.$$

La démonstration qu'on a donné ci-dessus du théorème de Shur contient une généralisation de celui-ci consistant en ce qu'il n'est pas nécessaire d'exiger une isotropie parfaite de la courbure en cha-

que point d'espace pour que ce théorème soit vrai. Il suffit d'observer en tout point les conditions de symétrie du groupe 3/2, c'est-à-dire les conditions d'invariance des composantes du tenseur K^{mn} ou R_{ijkl} par les 12 transformations du groupe de symétrie 3/2.

Si la courbure est définie en chaque point par des vecteurs constants colinéaires b^i, l'identité de Bianka donne

$$\nabla^\lambda k + b^\lambda b^\mu \nabla_\mu k_1 = 0. \tag{6.8}$$

Les équations (6.8) représentent un système d'équations imposées à la courbure pour les espaces riemanniens correspondants.

Les auteurs expriment leur très vive gratitude à Y. Sirotine dont les connaissances approfondies dans la cristallophysique leur ont permis de se faire une idée nette de l'état de choses dans ce domaine, jusqu'à présent peu connu d'eux.

BIBLIOGRAPHIE AU SUPPLÉMENT I

1. SEDOV L. I. — Similarity and dimensional methods in mechanics (traduit du russe) New York, Academic Press, 1959.
2. NYE J. F. — Propriétés physiques des cristaux. Leur représentation par des tenseurs et des matrices. Paris, Dunod, 1961.
3. WEYL H. — The classical groups. Their invariants and representation. Princeton, N.J. and other Princeton univ. press, 1946.
4. DÖRING W. — Die Richtungsabhängigkeit der Kristallenergie, Annalen der Physik, 1958, 7. Folge, Bd. 1, Heft 1-3, S. 104-111.
5. SMITH G. F., RIVLIN R. S. — The anisotropic tensors, Quarterly of Applied Mathematics, 1957, vol. 15, N 3, pp. 308-314.
6. PIPKIN A. C., RIVLIN R. S. — The formulation of constitutive equations in continuum physics. Part I, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1959, vol. 4, № 2, pp. 129-144.
7. СИРОТИН Ю. И. — Анизотропные тензоры (SIROTINE Y. I. — Tenseurs anisotropes), Докл. АН СССР, 1960, т. 133, n° 2, стр. 321-324.
8. СИРОТИН Ю. И. — Целые рациональные базисы тензорных инвариантов кристаллографических групп (SIROTINE Y. I. — Bases rationnelles complètes des invariants tensoriels des groupes cristallographiques), Докл. АН СССР, 1963, т. 51.
9. ГУРЕВИЧ Г. Б. — Основы теории алгебраических инвариантов (GOURÉVITCH G. B. — Les bases de la théorie des invariants algébriques), Гостехиздат, М-Л., 1948.
10. МАЛЬЦЕВ А. И. — Основы линейной алгебры (MALTSEV A. I. — Eléments de l'algèbre linéaire), Гостехиздат, М., 1956.
11. SMITH F. G., RIVLIN R. S. — The strain-energy function for anisotropic elastic materials, Trans. Amer. Math. Soc., 1958, vol. 88, N 1, pp. 175-193.
12. SMITH F. G. — Further results on the stain-energy function for anisotropic elastic materials, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1962, vol. 10, № 2, pp. 108-118.
13. BHAGAVANTAM S., VENKATARAYUDU T. — Theory of groups and its application to physical problems. Andhra university. Waltair, 1951.
14. JAHN H. A. — Note on the Bhagavantam Suryanarayana method of enumerating the physical constants of crystals, Acta Crystallographica, 1949, vol. 2, Part 1, pp. 30-33.
15. ШУБНИКОВ А. В., ФЛИНТ Е. Е., БОКИЙ Г. Г. — Основы кристаллографии (CHOUBNIKOV A. V., FLINT E. E., BOKY G. G. — Eléments de la cristallographie), Изд. АН СССР, 1940.
16. ШУБНИКОВ А. В. — Симметрия и антисимметрия конечных фигур (CHOUBNIKOV A. V. — Symétrie et antisymétrie des figures finies), Изд. АН СССР, 1951.
17. ШУБНИКОВ А. В. — О симметрии векторов и тензоров (CHOUBNIKOV A. V. — Sur la symétrie des vecteurs et des tenseurs), Изв. АН СССР, сер. физ. 1949, т. XIII, n° 3, стр. 347-375.
18. СИРОТИН Ю. И. — Групповые тензорные пространства (SIROTINE Y. I. — Espaces tensoriels de groupes), Кристаллография, 1960, т. 5, вып. 2, стр. 171-179.

19. СИРОТИН Ю. И.— Построение тензоров заданной симметрии (SIROTINE Y. I. — Construction des tenseurs à symétrie donnée), Кристаллография, 1961, т. VI, вып. 3, стр. 331-340.
20. КОПЦИК В. А.— Полиморфные фазовые переходы и симметрия кристаллов (KOPTSIK V. A.— Transformations de phase polymorphes et symétrie des cristaux), Кристаллография, 1960, т. 5, вып. 6, стр. 932-943.
21. SPENCER A. J., RIVLIN R. S. — The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1959, vol. 2, N 4, pp. 309-336.
22. SPENCER A. J. M., RIVLIN R. S. — Finite integrity bases for five or fewer symmetric 3 × 3 matrices, Arch. Rat. Mech. Anal., 1959, vol. 2, № 5, pp. 435-446.
23. SPENCER A. J. M., RIVLIN R. S.— Further results in the theory of matrix polynomials, Arch. Rat. Mech. Anal., 1960, vol. 4, № 3, pp. 214-230.
24. SPENCER A. J. M., RIVLIN R. S.— Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. Part I, Arch. Rat. Mech. Anal., 1962, vol. 9, № 1, pp. 45-63.
25. SPENCER A. J. M.— The invariants of six symmetrix 3 × 3 matrices, Arch. Rat. Mech. Anal., 1961, vol. 7, № 1, pp. 64-77.
26. СЕДОВ Л. И.— Введение в механику сплошной среды (SÉDOV L. I.— Introduction à la mécanique des milieux continus), Физматгиз, 1962.
27. ЛОХИН В. В.— Система определяющих параметров, характеризующих геометрические свойства анизотропной среды (LOKHINE V. V.— Système de paramètres de définition caractérisant les propriétrs grométriques d'un milieu anisotrope), Докл. АН СССР, 1963, т. 149, nº 2, стр. 295-297.
28. ЛОХИН В. В.— Общие формы связи между тензорными полями в анизотропной сплошной среде, свойства которой описываются векторами, тензорами второго ранга и антисимметричными тензорами третьего ранга (LOKHINE V. V.— Les formes générales des relations entre les champs de tenseurs dans un milieu continu anisotrope dont les propriétés se décrivent par les vecteurs, par les tenseurs du second ordre et par les tenseurs antisymétriques du troisiéme ordre), Докл. АН СССР, 1963, т. 149, nº 6, стр. 1282-1285.
29. СЕДОВ Л. И., ЛОХИН В. В.— Описание с помощью тензоров точечных групп симметрии (SÉDOV L. I., LOKHINE V. V.— Description des groupes de symétrie ponctuels à l'aide des tenseurs), Докл. АН СССР, 1963, т. 149, nº 4, стр. 796-797.
30. ЛЮБАРСКИЙ Г. Я.— Теория групп и ее применение в физике (LUBARSKY G. I. — Théorie des groupes et son application à la physique), Гостехиздат, М., 1957.
31. РАШЕВСКИЙ П. К.— Риманова геометрия и тензорный анализ (RACHEVSKI P. K.— Géométrie riemannienne et analyse tensorielle), Гостехиздат, М., 1953.

SUPPLÉMENT II

MODÈLES DES MILIEUX CONTINUS À DEGRÉS DE LIBERTÉ INTERNES *

par *L. Sédov*

On sait aujourd'hui que la physique et la mécanique exigent l'élaboration, la mise en œuvre et l'utilisation de nouveaux modèles de corps aux propriétés plus complexes. Aussi le moment est-il opportun de mettre au point une théorie macroscopique consacrée non seulement au mouvement des gaz mais aussi à celui des solides déformables considéré en liaison étroite avec les phénomènes physico-chimiques se déroulant au sein de la particule et au cours de son interaction avec les particules voisines et les objets extérieurs au corps. La science mondiale s'est enrichie ces dernières années d'ouvrages théoriques faisant appel à de nouveaux types de forces généralisées et d'équations d'état, dont la plus grande partie est fondée sur des constructions mathématiques formelles.

Afin d'établir de nouvelles théories il est essentiel d'introduire, en tant que caractéristiques de définition et caractéristiques recherchées, de nouvelles notions et de définir mathématiquement les grandeurs correspondantes en vue de décrire les propriétés spatio-temporelles, la position et l'état des particules substantielles, du corps et des champs, en mettant aussi en évidence les grandeurs de définition élémentaires dans les lois générales régissant le mouvement et les phénomènes physico-chimiques.

Pour mieux dégager le problème, considérons le cas général des recherches de modèles schématisant les vastes classes de mouvements et de processus en Mécanique des milieux continus.

Donnons tout d'abord quelques exemples de grandeurs caractéristiques essentielles. L'étude physique du mouvement de continua matériels fait appel aux notions de temps et d'espace métrique à trois ou à quatre dimensions et ceci toujours dans deux systèmes de coordonnées (fig. 66) **) : celui de l'observateur x^1, x^2, x^3, x^4 et celui

*) Texte de l'exposé fait le 25 janvier 1968 à l'inauguration du IIIe congrès de la Mécanique en U.R.S.S. et publié dans la revue « Prikladnaïa matematika i mekhanika », 1968, t. 32, op. 5.

**) Certains auteurs pensent que la mécanique des milieux matériels continus en mouvement peut être développée, sans restrictions sensibles de l'aspect général, au moyen d'un système unique de coordonnées, cartésien en l'occurrence. Ce point de vue qui figure dans certains ouvrages et que l'on inculque de bonne foi aux élèves est erroné et nuit à la compréhension de la mécanique et à la formulation de ses problèmes.

de Lagrange ξ^1, ξ^2, ξ^3, $\xi^4 = t$ qui lui correspond. En physique newtonienne, on peut toujours admettre l'égalité $x^4 = \xi^4 = t$ et considérer le temps absolu comme une variable scalaire. Les coordonnées ξ^1, ξ^2, ξ^3 définissent la position des particules individualisées. En général, les deux systèmes de coordonnées sont des systèmes de référence curvilignes.

L'élément de longueur de l'espace métrique riemannien a pour expression

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \hat{g}_{ij}\, d\xi^i\, d\xi^j. \tag{1}$$

Les composantes du tenseur g_{ij} définissent la métrique et sont des caractéristiques fondamentales spatio-temporelles. En Mécanique

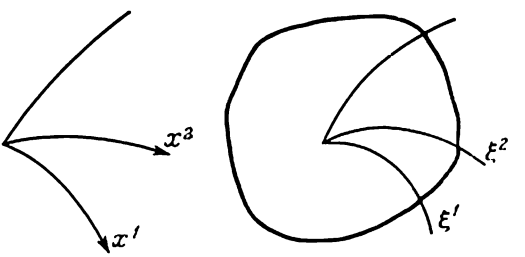


Fig. 66.

classique de Newton, le tenseur g_{ij} est euclidien. Il est pseudo-euclidien dans la relativité restreinte. Les composantes de ce tenseur sont définies auxiliairement par l'observateur par le choix arbitraire du repère x^1, x^2, x^3, x^4.

En relativité générale, le tenseur g_{ij} est déduit des équations traduisant des principes physiques. Les quantités différentielles invariantes définissant les propriétés du tenseur métrique g_{ij} de l'espace riemannien à quatre dimensions apportent un premier exemple concluant des grandeurs physiques recherchées non classiques de type nouveau.

La relation fondamentale recherchée dans le système de référence de l'observateur, relation définissant le comportement du

La confusion provient, d'une part, de ce qu'en mécanique des solides déformables on n'étudie généralement que des problèmes linéarisés où l'on peut admettre dans les calculs que le système de référence concomitant et celui de l'observateur sont confondus, d'autre part, de ce que dans la théorie des fluides la métrique du repère concomitant de Lagrange n'est mise en évidence que par la densité. Cependant l'on oublie souvent que toutes les caractéristiques substantielles, telles que la vitesse, l'accélération, le tenseur des taux de déformations, etc., sont introduites dans le repère de l'observateur en utilisant essentiellement la notion de repère concomitant.

milieu, est la loi du mouvement traduite par quatre fonctions

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4) \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

Il est commode d'introduire, outre les fonctions $x^i(\xi^k)$, les dérivées

$$x^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}, \quad \nabla_{k_1} x^i_j, \ldots, \nabla_{k_1}\nabla_{k_2} \ldots \nabla_{k_p} x^i_j, \ldots \quad (p = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

que l'on peut considérer comme les arguments essentiels des diverses fonctions physiques.

Le symbole ∇_k désigne ici la dérivée covariante par rapport à ξ^k en considérant les dérivées premières x^i_j d'indice j fixé comme composantes vectorielles d'indice i. Ces vecteurs représentent soit les composantes du vecteur vitesse, soit les rotations correspondantes, soit, si l'on compare la position actuelle du corps avec une certaine « position initiale » introduite mentalement, les composantes d'un tenseur lié à la déformation

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}) = \frac{1}{2}(g_{pq} x^p_i x^q_j - \overset{\circ}{g}_{ij}),$$

où $\overset{\bullet}{g}_{ij}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ sont les composantes du tenseur métrique correspondant à la « position initiale » laquelle est définie par convention d'ordre physique. Dans les cas particuliers les plus simples la position initiale est introduite sous forme d'un « solide invariable » qui à un certain instant « initial » coïncide, dans la partie tridimensionnelle, avec le corps déformable étudié (voir [1]).

Outre la loi du mouvement (2) il est nécessaire d'introduire les paramètres variables μ^A et leurs gradients (dérivées covariantes) de différents ordres

$$\mu^A = \mu^A(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4), \ \nabla_{k_1}\nabla_{k_2} \ldots \nabla_{k_q}\mu^A, \ldots \tag{4}$$
$$(A = 1, 2, \ldots N; \quad q = 1, 2, 3, \ldots).$$

On peut prendre pour paramètres complémentaires μ^A:

— l'entropie; la concentration des constituants d'un mélange; les composantes des tenseurs de déformations résiduelles et de la densité *) de dislocations (S; c_i; $\varepsilon^{(p)}_{ij}$; S_{ij}; . . .);

— les composantes A_i du vecteur potentiel électromagnétique pour le tenseur du champ électromagnétique

$$F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}$$

*) Grâce à l'introduction de nouveaux paramètres la théorie de plasticité est actuellement en voie de perfectionnement et de généralisation, ce qui entraîne l'élaboration de la théorie des dislocations (voir [2] par exemple).

défini dans un système de coordonnées inertial correspondant par la matrice (voir [3], par exemple):

$$F_{ij}=\begin{Vmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & cE_1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & cE_2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & cE_3 \\ -cE_1 & -cE_2 & -cE_3 & 0 \end{Vmatrix},$$

où c est la vitesse de la lumière, E_1, E_2, E_3 les composantes du vecteur champ électrique et B^1, B^2, B^3 les composantes du vecteur induction magnétique;

— les composantes du tenseur d'aimantation et de polarisation $\mathcal{P}_{ij}=\frac{1}{2}(F_{ij}-H_{ij})$, les H^{ij} étant définies par la matrice

$$H^{ij}=\begin{Vmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -D^1/c \\ -H_3 & 0 & H_1 & -D^2/c \\ H_2 & -H_1 & 0 & -D^3/c \\ D^1/c & D^2/c & D^3/c & 0 \end{Vmatrix},$$

où H_1, H_2, H_3 sont les composantes du vecteur champ magnétique et D^1, D^2, D^3 celles du vecteur induction électrique;

— les composantes des moments cinétiques internes m_{ih}, etc.

Les paramètres variables μ^A peuvent être scalaires, tensoriels ou spinoriels [4, 5, 6]. L'existence des paramètres variables μ^A qui, d'après (4), doivent être définis au cours de la résolution des problèmes implique que le modèle du milieu continu en question possède des degrés de liberté internes.

Une importante particularité propre à tous les modèles macroscopiques des milieux déformables et des champs réside en ce que les grandeurs recherchées, pour des corps de dimensions finies, dépendent fonctionnellement des paramètres de définition. Ainsi, l'énergie interne totale U que possède un corps déformable de dimensions finies sera toujours une fonctionnelle de $x^i(\xi^k)$ et $\mu^A(\xi^k)$.

Dans la pratique, on peut admettre la propriété généralisée d'additivité de l'énergie interne, ce qui permet d'utiliser pour l'énergie totale U la formule suivante:

$$U=\int_m u(g_{ij},\ x^i_j,\ \ldots,\ \nabla_{k_1}\nabla_{k_2}\ldots\nabla_{k_r}x^i_j,\ \mu^A,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \nabla_{k_1}\ldots\nabla_{k_s}\mu^A,\ S,\ K_B)\,dm+U_0, \qquad (5)$$

où m est la masse au repos, dm l'élément de masse au repos, u l'énergie interne locale rapportée à l'unité de masse; celle-ci représente une fonction physiquement définie seulement par les arguments

énumérés, S en est l'entropie et K_B ($B = 1, 2, \ldots$) les fonctions connues des coordonnées ξ^i (généralisation des constantes physiques données). Comme il est entendu dans la convention physique principale, la valeur de l'énergie spécifique locale u au point donné ne dépend pas des gradients d'ordre supérieur *) non mentionnés comme arguments de u (r et s sont des valeurs fixées).

La théorie classique de l'élasticité (opérant dans l'espace tridimensionnel euclidien) prévoit un cas simple, à savoir

$$u = u(\overset{\circ}{g}_{ij}, \varepsilon_{ij}, S, K_B).$$

Dans de nouveaux modèles plus complexes **) des milieux continus, les arguments de l'énergie interne spécifique u contiennent déjà des caractéristiques physico-chimiques complémentaires μ^A et des gradients d'ordre différent des grandeurs x^i_j et μ^A.

La présence de ces gradients dans l'expression de l'énergie interne conduit à réviser les conceptions actuelles des équations du mouvement et des processus, des conditions initiales et des conditions aux limites, du mécanisme des interactions, des conditions aux discontinuités et de beaucoup d'autres problèmes.

En élasticité classique, la constante U_0, expressément mise en évidence dans (5), n'est pas essentielle et prise ordinairement égale à 0. Dans le cas plus général, où il s'agit d'un corps composé de plusieurs parties, on doit tenir compte de la constante U_0 qui n'est plus considérée comme une quantité additive pour les divers éléments du corps. Car tout fractionnement du corps en parties ou sa pulvérisation s'effectuent aux dépens d'une énergie extérieure. Dans une première approximation, la constante U_0 permet de tenir compte du caractère non additif de l'énergie interne totale U. Il est très important d'évaluer les variations de U_0 engendrées par les modifications de la surface du corps au cours de la fissuration, de la formation et du développement des dislocations ou de la destruction du corps.

Pour des corps élastiques présentant des singularités isolées, la variation de la constante U_0 pour des processus équilibrés peut être obtenue en fonction de la variation globale de l'énergie élastique. L'apparition ou la disparition de certains défauts à l'intérieur du corps sous l'effet de processus internes ou actions externes connus sont accompagnées de pertes d'énergie puisée soit dans l'énergie élastique totale du corps, soit dans les flux extérieurs. Les varia-

*) Déjà Cauchy, en élaborant la théorie de l'élasticité, avait prévu la possibilité et jugé utile d'introduire les dérivées supérieures dans les arguments des fonctions données. Il résulte des théories statistiques que les dérivées de (3) d'ordre arbitraire peuvent apparaître dans les arguments de l'énergie interne spécifique u lors du passage à la limite d'un discontinu à un continu.

**) Rappelons, en particulier, le modèle du liquide avec des bulles [7].

tions de $\widehat{U_0}$ peuvent parfois être assimilées aux variations de la chaleur latente de fusion ou, plus généralement, de l'énergie de changement d'état.

L'on ne saurait trop souligner *) que la résolution du problème de la résistance des matériaux sur des bases physiques est intimement liée à l'étude de la variation de U_0. On est en droit d'imputer l'absence d'une théorie parfaite et de succès notables dans la résolution des principaux problèmes portant sur les critères de résistance des matériaux au peu d'attention allouée à la quantité U_0. En revanche, le progrès de la théorie des ruptures dans les corps fragiles est la conséquence de l'importance accordée à la variation de U_0.

Dans le cadre de la théorie de l'élasticité, les contraintes calculées peuvent devenir infiniment grandes dans de très petits éléments isolés sans entamer une destruction totale ou même locale notable. Donc quelquefois les critères de destruction fondés sur l'apparition, dans un champ élastique, de contraintes calculées supérieures à certaines valeurs limites ne jouent plus.

La destruction de différents ouvrages ou d'échantillons testés constitue, en général, un phénomène global au même titre que l'instabilité de mouvement et l'impossibilité d'équilibre ou de mouvement continu.

Les critères de destruction ne sont pas, en général, de nature locale. Cependant, souvent l'instabilité globale est déterminée par des conditions locales, pourtant dans certains cas celles-ci sont nécessaires sans être suffisantes à la rupture de l'équilibre ou à la destruction d'une construction donnée.

Construire un modèle d'un milieu continu, c'est d'établir les grandeurs caractéristiques et les systèmes d'équations fonctionnelles ou différentielles ainsi que diverses conditions supplémentaires permettant de formuler mathématiquement, dans les cas concrets, les problèmes de définition des lois du mouvement $x^i(\xi^k)$ et des processus physico-chimiques décrits par les fonctions $\mu^A(\xi^k)$.

La construction de modèles des milieux continus pour des classes connues d'objets et de phénomènes réels est un des problèmes principaux de la recherche physique. En résolvant ce problème, on s'appuie sur les hypothèses fondamentales de caractère universel ou particulier, sur les données expérimentales en tenant compte de la concordance des observations et des mesuses empiriques avec les conclusions et les calculs théoriques faits avec une précision nécessaire pour la pratique ou dictée par la nature du problème.

Le présent article a pour objet la description, l'analyse et le développement d'une méthode générale qui permet, en partant d'un nombre réduit d'hypothèses physiques, d'établir pour des modèles de milieux aux degrés de liberté internes les systèmes d'équa-

*) Voir, en particulier, le tome II de cet ouvrage.

tions fermés de caractère complexe avec des conditions aux limites supplémentaires et autres conditions concrétisant les modèles et tenant compte des particularités des problèmes posés. L'équation aux variations mise à la base de cette méthode est une généralisation naturelle et simple du principe variationnel de Lagrange: dans de nombreux cas importants elle coïncide avec les applications et les formulations bien connues de ce principe [8, 4, 6, 9, 1, 10].

On sait depuis longtemps que toutes les équations fondamentales de la relativité, de l'électrodynamique, de la mécanique analytique, de la thermodynamique des processus d'équilibre, de l'élasticité, de l'hydrodynamique et de plusieurs autres théories sont déduites de l'équation aux variations de Lagrange.

Dans de nombreuses théories physiques modernes ce principe des variations est dans la recherche scientifique un instrument rationnel, unique en cela sans doute.

L'analyse effectuée montre que l'équation aux variations de Lagrange pour continua matériels et champs physiques peut être considérée comme fondamentale pour n'importe quel modèle physique se rapportant tant aux phénomènes réversibles qu'aux phénomènes irréversibles.

Les équations aux variations ont permis d'associer et de combiner sur une même base les diverses méthodes phénoménologiques et statistiques de la théorie des processus irréversibles en thermodynamique et en mécanique. En particulier, il est devenu possible d'interpréter et d'évaluer dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles développée auparavant la loi associée des déformations élastiques résiduelles de la théorie mécanique de l'élasticité.

La théorie exposée présente une certaine nouveauté dans l'application de l'équation intégrale aux variations en ce qui concerne les objectifs suivants:

1 — description des phénomènes irréversibles qui sont effectivement réalisables dans des milieux continus;

2 — établissement de l'équation d'état;

3 — établissement des équations cinétiques;

4 — obtention des conditions initiales et des conditions aux limites;

5 — obtention des conditions aux fortes discontinuités, sauts au sein d'un milieu.

En développant une théorie moderne de modèles macroscopiques complexes des milieux et des champs, il faut se garder d'oublier que, même dans le cadre de la mécanique newtonienne, il est impossible de décrire les phénomènes présentant des degrés de liberté internes non négligeables au moyen de la seule équation fondamentale de la mécanique de Newton

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}. \tag{6}$$

L'équation (6) peut servir de base au développement de la mécanique analytique d'un système de points matériels, de la théorie du solide parfait, de l'élasticité adiabatique, de la théorie de l'écoulement d'un liquide incompressible parfait et dans certains autres cas, mais elle s'avère insuffisante quand il s'agit de rendre compte des effets calorifiques et électromagnétiques macroscopiques.

En particulier, l'équation (6) ne saurait être un point de départ pour l'établissement des lois macroscopiques régissant la croissance des déformations plastiques, pour l'étude des effets liés à l'évolution des dislocations continues, des processus ou des effets relatifs aux théories macroscopiques de polarisation électrique et d'aimantation des milieux, etc.

De même, l'équation connue des moments cinétiques pour les particules infinitésimales ou les corps de dimensions finies ne peut être déduite de l'équation (6) et constitue une relation fondamentale indépendante qui se base sur la symétrie des lois de la nature par rapport au groupe de rotations, tandis que l'équation (6) est une conséquence de la symétrie des lois de la nature par rapport au groupe de translations.

Pour de nombreux modèles classiques des milieux continus, l'équation différentielle des moments cinétiques se ramène à la condition de symétrie du tenseur des contraintes internes ou bien elle est automatiquement satisfaite lorsqu'on introduit ce tenseur comme une caractéristique qu'on définit en partant des hypothèses générales sur les propriétés du milieu.

Notons que le développement des théories statistiques en vue d'établir les lois macroscopiques sur la base de l'équation (6) opérant au niveau microscopique implique l'introduction d'hypothèses essentielles complémentaires, de nature universelle et particulière, qui ne découlent pas immédiatement de l'équation (6).

Tirons maintenant au clair la signification de l'équation fondamentale aux variations que l'on peut considérer comme équation de base pour les milieux macroscopiques aux degrés de liberté internes.

Pour plus de simplicité et de généralité, examinons la théorie étudiée dans le cadre de la relativité restreinte, en supposant l'espace-temps pseudo-euclidien.

Comme le montrent l'expérience et une analyse plus détaillée, il est très commode, naturel et, dans les cas importants, absolument nécessaire du point de vue physique de développer la théorie, en utilisant un espace-temps physique quadridimensionnel géométriquement déterminé et les notions de vecteurs et tenseurs quadridimensionnels.

Soient, dans un système fixe de coordonnées de l'observateur, des fonctions lisses par morceaux

$$x^i(\xi^k),\ \mu^A(\xi^k),\ S(\xi^k), \tag{7}$$

qui décrivent les mouvements et processus réels. Introduisons, mentalement, dans ce système de coordonnées une certaine classe suffisamment vaste de fonctions admissibles lisses par morceaux et qui contiennent, par hypothèse, le système des fonctions (7):

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}^i(\xi^k) &= x^i(\xi^k) + \delta x^i, \\ \tilde{\mu}^A(\xi^k) &= \mu^A(\xi^k) + \delta\mu^A, \\ \tilde{S}(\xi^k) &= S(\xi^k) + \delta S, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

de plus, d'après la signification des quantités $K_B(\xi^k)$, on pose

$$\delta K_B(\xi^k) = 0.$$

Les fonctions $\tilde{x}^i$, $\tilde{\mu}^k$, $\tilde{S}$ sont considérées aux points d'un domaine du système d'événements du quadrivolume V_0 spatio-temporel limité par une surface tridimensionnelle Σ_0. On suppose en outre que, dans la classe des fonctions admissibles, les variations δx^i, $\delta\mu^A$ et δS à l'intérieur du volume V_0 sont continues avec toutes leurs dérivées entrant dans les équations aux variations et sont suffisamment arbitraires de surcroît; les variations δx^i_j, $\delta\nabla_k x^i_j$, ..., $\delta\nabla_k\mu^A$, ... s'expriment par les fonctions $x^i_j(\xi^k)$ et $\mu^A(\xi^k)$ par les variations δx^i et $\delta\mu^A$ et leurs dérivées par rapport aux coordonnées x^i.

Soulignons les traits essentiels nouveaux de la théorie ébauchée:

1 — les variations δx^i sont définies comme composantes d'un quadrivecteur contravariant et les variations $\delta\mu^A$ comme composantes des tenseurs de même nature que les μ^A;

2 — aux frontières Σ_3 des volumes $V_4 \subset V_0$ les variations δx^i et $\delta\mu^A$ et leurs dérivées peuvent différer de zéro et être dans une certaine mesure arbitraires.

Notons l'équation fondamentale sous la forme

$$\delta \int_{V_4} \Lambda\, d\tau + \delta W^* + \delta W = 0, \tag{9}$$

où Λ est la densité de la fonction de Lagrange.

Pour un milieu matériel, Λ peut être donnée par la formule *)

$$\Lambda = -\rho u(g_{ij},\ x^j_j,\ \nabla_k x^i_j,\ \ldots,\ \mu^A,\ \nabla_k\mu^A,\ \ldots,\ S,\ K_B), \tag{10}$$

*) On peut ajouter à l'intégrale variée sur V_4 les termes qui mettent en évidence la quantité U_0 de la formule (5), variable, en général, du fait du développement de la frontière Σ_0 et des surfaces de discontinuité à l'intérieur de V_4. Dans la variante principale de la théorie que l'on expose ici, ce terme complémentaire n'est pas introduit. Dans les arguments de Λ on a spécialement mentionné, à côté des paramètres μ^A, l'entropie S, sans en mentionner les gradients. La théorie peut être directement étendue au cas où l'entropie n'est pas expressément marquée mais s'identifie à un des paramètres μ^A entrant dans Λ avec ses gradients de tout ordre.

où ρ est la masse volumique scalaire (quotient de la masse au repos par le volume tridimensionnel dans un repère concomitant), u est l'énergie interne par unité de masse au repos dans un repère concomitant. En relativité restreinte, la quantité u peut être considérée comme un scalaire quadridimensionnel. Le premier principe de la thermodynamique stipule que la fonction $u\rho\, d\tau$ peut être définie pour toute particule physique infinitésimale.

L'établissement des arguments et de la forme de la fonction u est un problème physique essentiel qui se pose lors de la concrétisation d'un modèle de milieu continu. Afin de pouvoir exprimer l'énergie interne en fonction de ses arguments il faut introduire quelques hypothèses dont certaines paraissent naturelles et tout à fait évidentes.

En pratique, on considère souvent les valeurs des paramètres variables comme des caractéristiques de petites perturbations, ce qui permet parfois de présenter la fonction u simplement comme une forme quadratique définie positive de petits paramètres essentiels variables. Dans ces cas le problème de la détermination de la fonction u se ramène à l'établissement des coefficients constants de la forme quadratique correspondante. Pour trouver ces coefficients, on peut se servir des conditions de symétrie [11, 12], des données expérimentales ou bien, dans certains cas, on peut relier les valeurs des coefficients aux constantes moléculaires à base des théories statistiques développées moyennant leurs propres hypothèses universelles et spécifiques au modèle donné. Ces coefficients sont semblables à ceux d'Young et de Poisson: ils peuvent être aisément déterminés de l'expérience. On sait les calculer statistiquement (en s'appuyant sur certaines hypothèses d'une grande portée). Il arrive pourtant que certaines valeurs statistiques calculées pour les solides ne sont pas en accord avec l'expérience. La concordance des calculs avec l'expérience est meilleure pour les gaz, mais leur vérification expérimentale est toujours nécessaire. Toutefois, les théories statistiques permettent d'esquisser quelques relations entre de tels coefficients, comme, par exemple, les coefficients de conduction thermique, de viscosité et de diffusion, relations qui ne ressortent pas d'une façon évidente des théories phénoménologiques.

En mécanique newtonienne, on remplace dans le système inertial la formule (10) par l'expression

$$\Lambda = \rho\,(^1/_2 v^2 - u),$$

où v est la vitesse des points du milieu continu, u le scalaire tridimensionnel égal à l'énergie interne.

Dans les théories déjà développées, on peut considérer la fonction Λ comme connue tant pour les modèles déterminés des milieux continus que pour le champ électromagnétique. En relativité générale, la partie de Λ liée à la gravitation est connue et sert à détermi-

ner le tenseur métrique g_{ij} représentant le champ gravitationnel. Diverses généralisations de la relativité générale sont toujours liées à la variation (ou à une autre présentation) de la densité du lagrangien Λ.

Notons l'importance du fait que, du point de vue physique, un système physique est donné ou connu seulement si l'énergie interne ou le lagrangien Λ sont donnés ou déterminés [1, 10, 13-15].

Ainsi donc, physiquement parlant, il est naturel d'exiger que dans l'équation (9) le lagrangien Λ soit donné en fonction des variables macroscopiques, ce qui nécessite l'utilisation de tout l'ensemble de données accumulées dans les diverses théories et expériences. Les hypothèses nécessaires que l'on fait intervenir pour construire la fonction Λ peuvent être toujours justifiées par diverses suppositions intuitives ou autres, très simples par nature.

L'on ne peut entreprendre d'établir la fonction Λ sans confronter directement les théories macroscopiques avec les principes physiques universels, l'expérience et les théories statistiques.

Essayons maintenant d'établir l'expression de la fonctionnelle δW^* donnée qui caractérise les interactions extérieures volumiques dans V_4 et superficielles sur Σ_3 de la région donnée du milieu dans V_4 avec les champs et les corps extérieurs, ainsi que certaines actions irréversibles des régions voisines du milieu et adjacentes au volume donné V_4 le long de la surface Σ_3.

Si le processus est adiabatique et réversible et s'il n'y a pas d'apport d'énergie de l'extérieur, on peut souvent admettre simplement qu'à l'intérieur de V_4 et sur la surface Σ_3 on a

$$\delta W^* = 0.$$

Pour les systèmes conservatifs de la mécanique céleste, on peut toujours poser $\delta W^* = 0$.

Dans le cas général des théories phénoménologiques, lorsqu'il y a apports extérieurs d'énergie volumique et superficiel et les processus sont irréversibles, les arguments de Λ contiennent les dérivées de différents ordres des $x^i(\xi^k)$ et $\mu^A(\xi^k)$ en ξ^k ou x^i et l'expression générale de δW^* peut être écrite de la façon suivante *) :

$$\delta W^* = \int\limits_{V_4} (\rho\theta\delta S - Q_i\delta x^i - M_A\delta\mu^A)\, d\tau - \\ - \int\limits_{\Sigma_3+S_\pm} \Big(\sum_{j_1\ldots j_p} Q_i^{kj_1\ldots j_p}\nabla_{j_1}\ldots\nabla_{j_p}\delta x^i + \\ + \sum_{j_1\ldots j_q} M_A^{kj_1\ldots j_q}\nabla_{j_1}\ldots\nabla_{j_q}\delta\mu^A\Big) n_k\, d\sigma. \qquad (11)$$

*) Pour choisir correctement les signes des produits scalaires donnant les apports d'énergie dans l'interprétation quadridimensionnelle, il faut tenir compte des remarques figurant au renvoi à la page 342.

On a désigné ici par $S_{\pm}$ les deux côtés de la surface tridimensionnelle S à l'intérieur de V_4 sur laquelle les caractéristiques du mouvement peuvent subir de fortes discontinuités ; par n_k, les composantes du vecteur unitaire de la normale extérieure de Σ_3 et de S_+ ou de S_-. Les composantes

$$Q\,(Q_i,\ Q_i^{kj_1\cdots j_p}),\ M\,(M_A,\ M_A^{kj_1\cdots j_q})$$

sont certaines « forces » extérieures généralisées données. La quantité θ joue le rôle de température absolue et on peut la compter parmi les données ou les inconnues, selon le cas. La variation δS de l'entropie dans (11) est introduite comme une quantité indépendante des variations δx^i et $\delta\mu^A$.

L'introduction de la fonctionnelle δW^* est liée au problème de la séparation des interactions internes et externes. Par exemple, si l'on considère le champ électromagnétique ou le champ gravitationnel comme extérieurs, les flux d'énergie respectifs des forces électromagnétiques pondéromotrices et de gravitation sont inclus dans l'expression de δW^*. Si, au contraire, ces champs appartiennent au modèle du milieu, il faut dégager les différentielles totales correspondantes dans l'expression de δW^* et les porter dans celle de Λ. Quand on porte les différentielles totales de δW^* dans $\delta \int \Lambda\, d\tau$, la signification de Λ change et la formule (10) peut être remplacée par une formule analogue, où à l'énergie interne se trouvent substituées l'énergie libre, l'enthalpie ou d'autres fonctions thermodynamiques d'état. Pour des processus irréversibles il est impossible de transposer entièrement le terme δW^* dans Λ, car, en général, la variation δW^* n'est pas holonome.

Le problème de déterminer les composantes des forces volumiques et superficielles généralisées Q et M se trouve en corrélation étroite avec la théorie des mécanismes dissipatifs et pour le résoudre l'on se voit dans la nécessité de faire appel à toutes sortes d'hypothèses et d'avoir recours à la thermodynamique des processus irréversibles développée antérieurement. Le problème de déterminer Q et M est analogue au problème fondamental de la mécanique classique concernant l'établissement des lois pour les forces définies par l'équation de Newton et par l'équation aux variations (9) dans notre cas. Les propriétés que possèdent les grandeurs entrant sous le signe de l'intégrale dans l'expression de δW^* sur la surface de discontinuité $S_{\pm}$ revêtent une signification physique particulière. La détermination de δW^* est liée au choix des paramètres essentiels x^i et μ^A, à la recherche de leurs variations et, en particulier, à la continuité de la variation aux discontinuités.

Il est important de noter que dans la détermination ou la donnée des quantités Λ et δW^* se mettent en évidence les bases générales des modèles les plus divers. Ceci permet de mettre à profit l'expé-

rience acquise dans divers domaines ainsi que d'établir des relations directes entre différentes théories. En outre, cela fournit des moyens complémentaires facilitant l'utilisation de certaines conclusions statistiques.

L'équation aux variations (9) est étroitement liée au premier et au second principe de la thermodynamique. Examinons de plus près ce fait dans le cadre de la mécanique classique. L'équation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique) peut être écrite (voir l'équation (2.18), chap. V) sous la forme

$$d\int_{V_3} \mathscr{E}\rho\, d\tau = \int_{V_3} (\boldsymbol{F}_{\text{mass}}\cdot d\boldsymbol{r} + dq^{(e)} + dq^{**})\,\rho\, d\tau + \int_{\Sigma_2} p_\alpha^\beta n_\beta\, dx^\alpha\, d\sigma \qquad \text{(A)}$$

et le second principe de la thermodynamique (voir § 5, chap. V) sous la forme

$$\int_{V_3} \theta\, dS\rho\, d\tau = \int_{V_3} (dq^{(e)} + dq')\,\rho\, d\tau. \qquad \text{(B)}$$

Ici $\mathscr{E}$ est l'énergie totale par unité de masse, la quantité θ joue dans le cas général le rôle de température absolue, S est l'entropie spécifique, dq' la chaleur non compensée, V_3 le volume mobile substantiel arbitraire du milieu et Σ_2 la surface délimitant V_3.

Les équations (A) et (B) sont écrites pour un volume V_3 tridimensionnel arbitraire et l'on a par définition

$$d\int_{V_3} \mathscr{E}\rho\, d\tau = \int_{V_3'} \mathscr{E}'\rho'\, d\tau' - \int_{V_3} \mathscr{E}\rho\, d\tau. \qquad \text{(C)}$$

Les grandeurs non primées correspondent à l'instant t et les grandeurs primées à l'instant $t + dt$, le temps dt étant le même pour toutes les particules dans l'équation de l'énergie. La relation (A) peut être également envisagée comme conséquence de l'équation de l'énergie en supposant que la quantité dt qui se manifeste par l'intermédiaire des accroissements dx^i, $dq^{(e)}$, etc. soit différente pour différents particules et instants t. Dans ce cas, la relation (A) n'est plus une équation de l'énergie mais une conséquence des équations de l'énergie pour l'ensemble de particules occupant le volume V_3.

Prenons un volume V_4 quadridimensionnel arbitraire dans l'espace x^1, x^2, x^3, t. Les sections de ce volume par des surfaces t = const forment les différents volumes tridimensionnels V_3. Examinons maintenant les relations (A) pour tous les V_3 possibles correspondant aux différentes valeurs t = const.

En intégrant les égalités (A) par rapport au temps et en tenant compte de (B) et de (C), on arrive à une relation qui représente une conséquence d'un ensemble de relations du type (A) pour des volumes V_3 correspondants:

$$-d\int_{V_4}\mathscr{E}\rho\,d\tau\,dt+\int_{V_4}(F_{\text{mass}}\cdot dr+\theta\,dS-dq'+dq^{**})\,\rho\,d\tau\,dt+$$
$$+\int_{\Sigma_3}p_\alpha^\beta n_\beta\,dx^\alpha\,d\sigma\,dt=0. \qquad \text{(D)}$$

Si en intégrant l'égalité (A) on admet que tous les V_3 correspondent à un même volume mobile de substance, les dt étant égaux pour toutes les particules, la relation (D) devient une équation ordinaire de l'énergie pour un intervalle de temps fini, car on a dans ce cas

$$d\int_{V_4}\mathscr{E}\rho\,d\tau\,dt=\int_{V_3(t_2)}\mathscr{E}\rho\,d\tau-\int_{V_3(t_1)}\mathscr{E}\rho\,d\tau.$$

L'hypothèse naturelle fondamentale s'exprime alors de la façon suivante: la détermination des quantités Λ, δW^* et δW dans l'équation aux variations *) (9) est soumise à la condition qui exige que l'équation (9) coïncide exactement avec (D) lorsque les variations de toutes les grandeurs sont des accroissements réels infiniment petits des paramètres essentiels au bout du temps dt ou, autrement dit, que soient vérifiées les égalités suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\delta x^i&=\frac{dx^i}{dt}\,dt=v^i\,dt,\\ \delta\mu^A&=\frac{d\mu^A}{dt}\,dt=\dot{\mu}^A\,dt,\\ \delta S&=\dot{S}\,dt.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(E)}$$

La considération ci-dessus est à la base de l'interprétation physique de différents termes et fonctions entrant dans l'équation (9) lorsque les variations sont définies par les égalités (E). Il en découle que pour le cas général des variations δx^i, $\delta\mu^A$ et δS arbitraires mais permises par les contraintes (la condition $\delta\,(\rho\,d\tau)=0$ par exemple), on pourrait toujours donner à l'équation (9) la forme

$$-\delta\int_{V_4}\mathscr{E}\rho\,d\tau\,dt+\int_{V_4}(F_{\text{mass}}\cdot\delta r+\theta\,\delta S-\delta q'+\delta q^{**})\,\rho\,d\tau\,dt+$$
$$+\int_{\Sigma_3}p_\alpha^\beta n_\beta\delta x^\alpha\,d\sigma_2\,dt+\int_{V_4}\delta\Omega\,d\tau\,dt=0; \qquad \text{(F)}$$

*) On démontre plus loin que la quantité δW est déterminée lorsque Λ et δW^* sont donnés: l'établissement des équations d'état se ramène précisément à ceci. Une partie de δW est introduite dans (9') par l'intégrale de surface; δW peut également contribuer à la somme $dq^{(e)}+dq^{**}$.

on a noté $\delta\Omega$ une fonctionnelle identiquement nulle pour des mouvements-processus réels : $d\Omega \equiv 0$.

En mécanique classique on a

$$-\mathscr{E}\rho = -\frac{\rho v^2}{2} - \rho u \quad \text{et} \quad \Lambda = \frac{\rho v^2}{2} - \rho u.$$

On en déduit aisément que l'expression de $\delta\Omega$ doit contenir le terme

$$\delta\Omega_1 = \rho\left[\delta v^2 - \frac{d}{dt}(v_\alpha \delta x^\alpha)\right].$$

Il est évident que $d\Omega_1 = 0$. On obtient donc

$$\left[-\delta\frac{v^2}{2} + \delta v^2 - \frac{d}{dt} v_\alpha \delta x^\alpha\right]\rho\, d\tau\, dt =$$

$$= \delta\frac{v^2}{2}\rho\, d\tau\, dt - \left[\frac{\partial \rho v_\alpha \delta x^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^\beta v_\alpha \delta x^\alpha}{\partial x^\beta}\right] d\tau\, dt.$$

Pour obtenir le deuxième terme du crochet on recourt à l'équation de continuité, (F) se récrit alors sous la forme

$$\delta\int_{V_4} \Lambda\, d\tau_4 + \int_{V_4} [\theta\, dS + \boldsymbol{F}_{\text{mass}}\cdot\delta\boldsymbol{r} - \delta q' + \delta q^{**}]\,\rho\, d\tau_4 +$$

$$+\int_{\Sigma_3} [(p^\beta_\alpha - \rho v^\beta v_\alpha) N_\beta - N_4 \rho v_\alpha]\,\delta x^\alpha\, d\sigma_3 + \int_{V_4} (\delta\Omega - \delta\Omega_1)\, d\tau\, dt = 0. \qquad (9')$$

Ici $N_\beta = \lambda n_\beta$, $N_4 = -\lambda\mathscr{D}$ sont les cosinus directeurs dans l'espace x^1, x^2, x^3, t de la quadrinormale à la surface Σ_3 ayant pour équation $f(x^1, x^2, x^3, t) = 0$; dans le repère cartésien on a

$$\lambda = \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}},$$

où n_1, n_2, n_3 sont les composantes tridimensionnelles de la normale à la surface bidimensionnelle Σ_2 qui a pour équation $f(x^1, x^2, x^3, t = \text{const}) = \text{const}$; l'expression

$$\mathscr{D} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)^2}}$$

est la vitesse du mouvement de la surface Σ_2 ; $d\sigma_3$ est l'élément de surface tridimensionnelle Σ_3.

En général, les équations d'Euler qui découlent de l'équation aux variations (9) ou (9') dépendent de la forme de la fonctionnelle

$\delta(\Omega - \Omega_1)$. La présence du terme $\delta(\Omega - \Omega_1)$ s'explique par la présence éventuelle des « forces giroscopiques généralisées » qui font partie de l'équation d'Euler mais n'interviennent pas dans l'équation de l'énergie, bien que ces forces fournissent un travail généralisé différent de zéro sur les accroissements virtuels des paramètres essentiels.

Dans le cas général la fonctionnelle $\delta(\Omega - \Omega_1)$ se définit aisément en comparant l'équation (9) à l'équation (D), si δW^*, la densité du lagrangien Λ et, par conséquent, l'énergie interne u sont données.

Le problème de l'expression générale de $\delta\Omega$ a été étudié en 1964 dans [14]. Lorsque $\delta(\Omega - \Omega_1) \neq 0$, un exemple d'une force giroscopique nous est fourni par la force de Lorentz $\frac{e}{c}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H})$ perpendiculaire à la vitesse de la charge mobile e et, par suite, n'effectuant aucun travail dans le cas de mouvements réels. Le choix des « forces giroscopiques généralisées » représente certainement un problème dont la solution univoque est apportée dans ce qui suit à l'aide de l'équation (9), lorsque l'on a défini la fonction Λ et la fonctionnelle δW^*. D'autre part, pour une relation énergétique fixée (D), la fonctionnelle $\delta(\Omega - \Omega_1)$, de même que Λ et δW^*, correspondant à cette fonctionnelle et à l'équation de l'énergie, peuvent être différents par suite de la différence des « forces giroscopiques généralisées ».

Il est possible et commode d'étudier les processus de dissipation en s'appuyant sur l'équation de l'entropie dans les lois des mouvements et des processus réels. L'équation qui définit la variation de l'entropie des particules est déduite plus bas des équations d'Euler dans le problème variationnel général (9). L'accroissement positif de l'entropie dû aux processus internes irréversibles est nécessairement assuré par les lois qui définissent Λ et les forces généralisées Q et M pour les phénomènes réels.

Le sens principal de l'équation (9) suggère que la quantité δW peut être représentée par l'intégrale de surface étendue à $\Sigma_3 + S_\pm$. Si les variations δx^i, $\delta\mu^A$ et leurs dérivées sont différentes de zéro sur $\Sigma_3 + S_\pm$, la variation δW se détermine à partir de (9) à l'aide de $\delta \int \Lambda \, d\tau$ et δW^*.

Lorsque la quantité δW est définie sur $\Sigma_0 + S_\pm$ (pour δx^i, $\delta\mu^A$ et leurs dérivées quelconques) non seulement par (9), mais aussi par les conditions extérieures, on verra surgir, comme il sera montré plus loin, les conditions initiales, les conditions aux limites et les conditions aux discontinuités.

Dans le cas des variations δx^i et $\delta\mu^A$ avec leurs dérivées d'ordre voulu nulles sur $\Sigma_3 + S_\pm$, mais arbitraires (linéairement indépendantes) à l'intérieur de V_4, l'équation (9) se ramène aux équations

d'Euler *)

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p}\nabla_i x_q^p + \nabla_s\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^i}x_q^s\right) + \frac{\partial\Lambda}{\partial K_B}\nabla_i K_B + Q_i + M_A\nabla_i\mu^A = \rho\theta\nabla_i S, \quad (12)$$

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta S} = \frac{\partial\Lambda}{\partial S} = -\rho\theta, \quad \frac{\delta\Lambda}{\delta\mu^A} = M_A. \quad (13)$$

Ici $\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p}$, $\frac{\delta\Lambda}{\delta\mu^A}$ et $\frac{\delta\Lambda}{\delta S}$ désignent les dérivées variationnelles, par exemple

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p} = \frac{\delta\Lambda}{\partial x_q^p} - \nabla_h\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_h x_q^p} + \nabla_h\nabla_s\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_s\nabla_h x_q^p} - \dots \quad (14)$$

En multipliant les équations (12) par x_4^i et en sommant sur l'indice i on obtient

$$\rho\theta\frac{dS}{d\xi^4} = Q_i\frac{\partial x^i}{\partial\xi^4} + M_A\frac{d\mu^A}{d\xi^4} + \frac{\partial\Lambda}{\partial K_B}\frac{dK_B}{d\xi^4} + \nabla_s F^s, \quad (15)$$

où

$$F^s = x_4^i x_p^s\frac{\delta\Lambda}{\delta x_p^i}, \quad \frac{d}{d\xi^4} = \frac{\partial x^i}{\partial\xi^4}\nabla_i,$$

car

$$x_4^s\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p}\nabla_s x_q^p + x_4^p\nabla_s\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p}x_q^s\right) = \nabla_s\left(x_4^i x_q^s\frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^i}\right)$$

en vertu de l'égalité

$$0 = \frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p}(x_4^s\nabla_s x_q^p - x_q^s\nabla_s x_4^p) = \frac{\delta\Lambda}{\delta x_q^p}\left(\frac{\partial^2 x^p}{\partial\xi^q\,\partial\xi^4} - \frac{\partial^2 x^p}{\partial\xi^4\,\partial\xi^q}\right).$$

L'égalité (15) est une équation de la production de l'entropie dans une particule, car, par hypothèse, la coordonnée ξ^4 représente le temps. Pour obtenir les dérivées par rapport au temps propre $d\tau = (\hat{g}_{44})^{1/2}\,d\xi^4$, il suffit de multiplier les deux membres de la relation (15) par $(\hat{g}_{44})^{-1/2}$.

Les équations d'Euler contiennent les équations des impulsions et de l'énergie et peuvent renfermer, selon la signification des paramètres μ^A, les équations de Maxwell, les équations de la cinétique chimique et d'autres types d'équations des paramètres recherchés μ^A, caractéristiques des degrés de liberté internes. On peut montrer [2] que tous les modèles macroscopiques connus des milieux continus,

---

*) Ces équations sont obtenues en égalant à zéro les coefficients de δx^i, $\delta\mu^A$ et δS dans l'intégrale de volume compte tenu des égalités suivantes:

$$\delta\Lambda = \partial\Lambda + \delta x^i\nabla_i\Lambda, \quad \delta\mu^A = \partial\mu^A + \delta x^i\nabla_i\mu^A, \quad \delta\,d\tau = \nabla_i\delta x^i\,d\tau.$$

y compris ceux des milieux plastiques, se déduisent de l'équation fondamentale (9).

Les équations d'Euler constituent en général les équations aux dérivées partielles dont l'ordre est lié à celui des dérivées entrant dans les arguments du lagrangien Λ, ordre généralement assez élevé.

Lorsque $\Lambda\, d\tau$ et δW^* sont des scalaires quadridimensionnels définis par (10) et (11), on déduit de l'équation fondamentale (9) après variation de la première intégrale et intégration correspondante par parties

$$\delta W = \int_{\Sigma_3+S_\pm} \Big[\sum_{j_1\ldots j_p} (P_i^{kj_1\ldots j_p} + Q_i^{kj_1\ldots j_p})\, \nabla_{j_1} \ldots \nabla_{j_p}\, \delta x^i + \\ + \sum_{j_1\ldots j_q} (N_A^{kj_1\ldots j_q} + M_A^{kj_1\ldots j_q})\, \nabla_{j_1} \ldots \nabla_{j_q}\, \delta\mu^A \Big] n_k\, d\sigma + \\ + \int_{\Sigma_3+S_\pm} \nabla_s \Omega^{sk} n_k\, d\sigma. \qquad (16)$$

Ici $P_i^{kj_1\ldots j_p}$ et $N_A^{kj_1\ldots j_q}$ sont des quantités (composantes des tenseurs) s'exprimant par Λ et par les dérivées de x^i et de μ^A; elles s'obtiennent au cours des transformations de la variation

$$\delta \int_{V_4} \Lambda\, d\tau$$

par intégration par parties. La technique de ces transformations ne conduit pas, en général, à une détermination univoque des composantes $P_i^{kj_1\ldots j_p}$ et $N_A^{kj_1\ldots j_q}$. Ceci s'explique par la possibilité d'écrire dans (16), à gauche, la dernière intégrale qui est identiquement nulle lorsque Ω^{sk} est un tenseur antisymétrique à composantes continues possédant les dérivées continues du premier et du second ordres aux points du volume limité par la surface $\Sigma_3 + S_\pm$.

Cette proposition est évidente en vertu du théorème de Gauss-Ostrogradsky, car on déduit de l'égalité $\Omega^{sk} = -\Omega^{ks}$ que $\nabla_s \nabla_k \Omega^{sk} = 0$.

On peut prendre comme composantes de Ω^{sk} toute forme linéaire du type des premiers termes des expressions sous le signe de l'intégrale dans la formule (16). Il est clair que les formules qui expriment les composantes tensorielles

$$P_i^{kj_1\ldots j_p} + Q_i^{kj_1\ldots j_p}, \quad N_A^{kj_1\ldots j_q} + M_A^{kj_1\ldots j_q}$$

au moyen des paramètres caractérisant le mouvement et l'état des particules ne sont pas déterminées d'une façon univoque par suite du choix arbitraire de Ω^{sk}.

Ainsi on se heurte à la non-univocité de la notion de tenseur énergie-impulsion ainsi qu'à l'arbitraire du choix, pour les équations d'Euler données, des équations d'état, en général, et de la notion fondamentale de contraintes internes, en particulier.

La dépendance des composantes tensorielles énumérées dans (16) des paramètres de définition peut être envisagée et interprétée comme des équations d'état du milieu physique. Ce sont des équations généralisant la loi de Hooke.

Ainsi donc, pour un système fixe d'équations d'Euler les équations d'état ne se déterminent pas de façon univoque. Une analyse plus détaillée montre que les conditions complémentaires initiales et aux limites sur de fortes discontinuités traduisant des interactions physiques à la frontière ou à l'intérieur du corps, aux discontinuités, ne suffisent pas pour éliminer la non-univocité relevée dans les équations d'état.

On peut, pour un système fixe d'équations d'Euler, modifier la densité du lagrangien Λ par addition du terme divergent; on s'apercevra sans peine que cela entraîne également la modification des équations d'état. Néanmoins, un lagrangien complètement fixé peut être utilisé en vue de déterminer physiquement le modèle du milieu continu. Or, il ne suffit pas de fixer le système d'équations d'Euler pour avoir une information complète ou même indispensable sur un modèle concret du milieu.

Naturellement, les contraintes sont définies univoquement lorsque les équations d'état sont établies. Mais l'essence même de la non-univocité en question réside en ce que toutes les lois du mouvement et des processus de variation des paramètres μ^A dans les problèmes concrets demeurent identiques pour certains types différents d'équations d'état.

Il faut souligner que l'ambiguïté signalée n'est pas inhérente à la méthode d'établissement des équations d'état à l'aide de l'équation aux variations (9). On aboutit au même résultat en utilisant l'équation thermodynamique généralisée de la chaleur reçue sous forme différentielle [14].

La nature de cette ambiguïté peut être expliquée si l'on recourt aux raisonnements généraux d'ordre physique suivants.

On sait que le problème des contraintes internes dans des solides parfaits en mouvement n'a pas de solution déterminée. On peut toujours supposer qu'au sein d'un solide il existe un système arbitraire de contraintes internes équivalent à zéro, dont la présence ou l'absence ne peuvent être décelées. L'existence d'un tel système de contraintes ne revêt pas d'importance.

On comprend aisément que dans le cas des corps déformables, pareillement à celui des solides parfaits, on peut imaginer divers systèmes de contraintes n'exerçant pas d'action sur les lois du mouvement dont la présence ou l'absence sont, donc, indécelables. Pour

des systèmes de contraintes différents les équations du mouvement et les conditions complémentaires sont identiques, mais les équations d'état diffèrent.

Evidemment, le problème d'ambiguïté ne se pose pas si les équations d'état sont définies à l'avance. Néanmoins, quand on établit le système d'équations d'état dans les problèmes de construction de nouveaux modèles, le choix des équations dépend du problème à résoudre. Le problème devient particulièrement important lorsque la densité du lagrangien dépend de l'ordre de succession des gradients des caractéristiques essentielles.

Illustrons la proposition ci-dessus sur l'exemple des équations de la théorie de l'élasticité où les équations d'état se présentent sous la forme

$$p^{ij} = \rho \frac{\partial u}{\partial e_{ij}}. \tag{17}$$

Prenons au lieu de (17) les équations d'état sous la forme

$$p^{*ij} = p^{ij} + \tilde{p}^{ij}, \quad \tilde{p}^{ij} = \nabla_s \nabla_k N^{iksj} \quad (N^{iksj} = -N^{ikjs}), \tag{18}$$

telles que les quantités N^{iksj} soient antisymétriques comme indiqué par rapport aux indices s, j et représentent les composantes du tenseur qui, pour tous les problèmes, dépend identiquement mais de façon arbitraire des paramètres d'état et de leurs dérivées *), quels qu'ils soient. On s'aperçoit aisément que toutes les lois du mouvement et des déformations se définissent indépendamment des contraintes complémentaires $\tilde{p}^{ij}$ qui satisfont identiquement aux équations d'équilibre

$$\nabla_j \tilde{p}^{ij} = 0.$$

En outre, on a pour un volume V arbitraire délimité par une surface fermée Σ

$$\int_V (\nabla_j \tilde{p}^{ij})\, \delta x_i \, d\tau = \int_\Sigma (\tilde{p}^{ij} \delta x_i + \nabla_k N^{iksj} \nabla_s \delta x_i)\, n_j \, d\sigma =$$

$$= \int_\Sigma \nabla_s (\nabla_k N^{iksj} \delta x_i)\, n_j \, d\sigma = 0.$$

Dans ce cas, à côté des contraintes $\tilde{p}^{ij}$ on voit apparaître les contraintes superficielles du troisième ordre **) $\nabla_k N^{iksj}$. Les composantes

*) En élasticité, dans les problèmes d'équilibre, en l'absence de forces volumiques extérieures, on peut chercher les contraintes également sous la forme $p^{ij} = \tilde{p}^{ij}$; toutefois, en introduisant la loi de Hooke ou une autre équation d'état, les quantités N^{iksj} deviennent des fonctions des coordonnées et non des fonctions universelles (identiques pour tous les problèmes) des caractéristiques des déformations. En particulier, les composantes $\tilde{p}^{ij}$ sont, conformément à (18). symétriques si $N^{iksj} = \omega^{ik}\omega^{sj}$, où ω^{pq} est un tenseur antisymétrique quelconque.

**) Pour plus de détail voir L. Sédov, ZAMP, vol. 20, fasc. 5, pp. 653 à 658, 1969.

normales du gradient ∇_s de la fonction sous le signe de l'intégrale de surface incluses dans les conditions aux limites sont identiquement nulles en tout point de Σ. L'intégrale étendue à tout élément superficiel arbitraire $\Delta\sigma$ de Σ se ramène, d'après la formule de Gauss-Ostrogradsky, à l'intégrale suivant le contour Γ délimitant l'élément. Les interactions sur l'élément $\Delta\sigma$ sont alors les interactions le long du contour Γ et l'on peut les considérer comme internes. Lorsque $\delta x_i = 0$ sur Γ, l'intégrale par rapport à $\Delta\sigma$ est nulle. Il s'ensuit alors que les contraintes complémentaires p^{ij} et $\nabla_k V^{iksj}$ ensemble ne contribuent pas aux flux énergétiques des interactions (pour des déplacements arbitraires δx_i possibles) entre les particules voisines séparées les unes des autres par des éléments d'une surface quelconque Σ, ni, par suite, entre les corps extérieurs sur la frontière du corps Σ_0. Une transformation analogue appliquée aux composantes p^{ij} définies par la formule (17) dans laquelle u est une énergie spécifique interne aboutit à l'équation de l'énergie avec échange de travail mécanique entre les particules séparées les unes des autres par les éléments $\Delta\sigma$ de la surface Σ pour $\delta x_i \neq 0$. Dans ce cas, l'échange d'énergie entre les particules voisines s'effectue uniquement aux dépens des contraintes ordinaires p^{ij} du deuxième ordre. Soulignons à cet égard que les interactions superficielles internes dans des modèles plus complexes ne se réduisent pas uniquement aux contraintes ordinaires du deuxième ordre; c'est pourquoi les raisonnements qui précèdent présentent un intérêt.

L'équation aux variations (9) permet d'approfondir les notions d'équations d'état, de conditions initiales, de conditions aux limites et aux fortes discontinuités qui ne se déduisent pas directement des équations différentielles sans hypothèses complémentaires. Il s'avère que les conditions et les équations mentionnées ci-dessus doivent être analysées dans leur ensemble.

Les résultats qui suivent sont obtenus par la transformation de (16) pour δW telle que l'expression sous le signe de l'intégrale ne contienne que les variations δx^i, $\delta\mu^A$ et les dérivées covariantes $\nabla_n^{(\alpha)} \delta x^i$ et $\nabla_n^{(\beta)} \delta\mu^A$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots$) indépendantes sur $\Sigma + S_\pm$ par rapport à la normale. Il est de fait que les variations δx^j et $\nabla_j \delta x^i$ ainsi que certains gradients supérieurs $\nabla_j, \ldots, \nabla_{jp} \delta x^i$ sur $\Sigma + S_\pm$ peuvent être considérés comme indépendants.

Pour les cas particuliers simples, les transformations mentionnées de la formule (16) destinées à obtenir les conditions aux limites ont été effectuées par Mindlin *) [17]. Les conditions aux discontinuités ont été obtenues à l'aide des transformations particulières correspondantes par M. Lourié.

---

*) La transformation générale dans l'espace-temps quadridimensionnel pour un ordre fini quelconque des gradients des variations a été effectuée par V. Gelnorovitch.

Supposons la surface $\Sigma_3 + S_\pm$ lisse. Pour cela il suffit que soit lisse la surface S (car le volume V_4 et la surface Σ_3 sont choisis arbitrairement). Les transformations considérées conduisent à la formule

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma+S_\pm} (\mathcal{P}_{i0}\delta x^i + \mathcal{P}_{i1}\nabla_n\delta x^i + \ldots + \mathcal{P}_{i(r-1)}\nabla_n^{(r-1)}\delta x^i + \\ + \mathcal{M}_{A0}\delta\mu^A + \mathcal{M}_{A1}\nabla_n\delta\mu^A + \ldots + \mathcal{M}_{A(s-1)}\nabla_n^{(s-1)}\delta\mu^A)\, d\sigma. \quad (19)$$

Ici, les composantes vectorielles $\mathcal{P}_{i0}, \mathcal{P}_{i1}, \ldots, \mathcal{P}_{i(r-1)}$ de même que les composantes tensorielles $\mathcal{M}_{A0}, \ldots, \mathcal{M}_{A(s-1)}$ sont définies univoquement et s'expriment au moyen de $P_i^{kj_1\ldots j_\nu} + Q_j^{kj_1\ldots j_\nu}$ et $N_A^{kj_1\ldots j_\nu} + M_A^{kj_1\ldots j_\nu}$ qui ne sont pas définies univoquement.

Les composantes vectorielles $\mathcal{P}_{i\alpha}$ et tensorielles $\mathcal{M}_{A\beta}$ définies aux points des éléments $d\sigma$ sur la frontière $\Sigma_3 + S_\pm$ possèdent une particularité essentielle: elles dépendent non seulement de l'orientation de ces éléments comme c'est habituellement le cas pour des contraintes ordinaires, mais aussi de la courbure et d'autres propriétés géométriques différentielles plus fines de ces éléments *).

Les vraies caractéristiques du milieu obtenu sont justement les vecteurs $\mathcal{P}_\alpha$ et les tenseurs $\mathcal{M}_\beta$. Leur dépendance des particularités géométriques des éléments de surface par lesquels se produisent des interactions et des paramètres essentiels s'exprime par la fonction de Lagrange Λ et par les $Q_i^{kj_1\ldots j_\nu}$ et $M_A^{kj_1\ldots j_\nu}$ qui entrent dans l'expression de δW^*. Il va sans dire que seules les combinaisons des $Q_i^{kj_1\ldots j_\nu}$ et $M_A^{kj_1\ldots j_\nu}$ servant à définir $\mathcal{P}_{i\alpha}$ et $\mathcal{M}_{A\beta}$ sont essentielles dans la formule (11) de δW^*.

Si la quantité δW est donnée sur une partie de la frontière Σ_0, on peut, en s'appuyant sur la formule (19) et ayant en vue l'arbitraire de δx^i, $\delta\mu^A$ et de leurs gradients normaux sur Σ_0, obtenir

*) Il est très facile de passer de la formule (16) à la formule (19) si la surface $\Sigma + S_\pm$ ne présente pas d'arêtes ni de points coniques; en présence de telles singularités la formule (19) est également vérifiée, mais alors la valeur de l'intégrale (19) doit être considérée comme une limite lorsque la surface $\Sigma + S_\pm$ lisse tend vers une surface aux arêtes. A cause des singularités et des discontinuités de la fonction sous le signe de l'intégrale dans (19) qui dépend du vecteur n et de ses dérivées tangentielles, lors du passage à la limite (vers la surface $\Sigma + S_\pm$ tridimensionnelle aux arêtes bidimensionnelles), on voit apparaître des intégrales complémentaires étendues aux surfaces bidimensionnelles des arêtes. On peut obtenir ces intégrales en appliquant l'intégrale (16), dépourvue de singularités sur les arêtes, directement à la surface aux arêtes et en passant ensuite à la formule (19); au cours de cette transformation la seconde intégrale du terme divergent, égale à zéro sur la surface lisse $\Sigma + S_\pm$, fournit pour la surface aux arêtes des intégrales étendues aux arêtes, faciles à calculer et qui ne s'annulent pas en général.

aux points A sur la partie considérée Σ les conditions suivantes :

$$\mathcal{P}_{i\alpha} = f_{i\alpha}(A), \quad \mathcal{M}_{A\beta} = g_{A\beta}(A) \tag{20}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4; \quad A = 1, 2, \ldots, N; \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, r-1;$$
$$\beta = 0, 1, 2, \ldots, s-1),$$

où $f_{i\alpha}(A)$ et $g_{A\beta}(A)$ sont, en général, des fonctions données aux points A. Sur la partie spatiale tridimensionnelle de la frontière Σ_0, qui correspond à l'instant t_0 = const, les égalités (20) représentent les conditions initiales dans le volume tridimensionnel occupé par le corps.

Les conditions (20) sur la partie tridimensionnelle Σ formée par la frontière bidimensionnelle Σ_2 du corps et, en même temps, par la variable temporelle t peuvent être considérées comme les conditions aux limites sur les frontières du volume tridimensionnel variable occupé par le corps. Les égalités (20) sur la frontière actuelle pour t = const $> t_0$ peuvent être considérées, en général, comme de simples relations définissant les seconds membres sur la base des lois du mouvement dégagées par les conditions initiales et les conditions aux limites.

Essayons maintenant d'établir les conditions sur une surface tridimensionnelle S de forte discontinuité située à l'intérieur d'un volume quadridimensionnel V_4 du milieu continu. Admettons que les recherches préliminaires et les hypothèses correspondantes ont permis d'inclure dans δW^* toutes les actions extérieures réparties sur S et appliquées au milieu (par exemple, la variation de la constante « additive » U_0 et, en particulier, le dégagement de chaleur au cours des réactions chimiques sur le front de combustion ou de détonation, aussi bien que l'absorption d'énergie aux discontinuités le long de S peuvent parfois être considérés comme extérieurs. Ces mêmes effets peuvent être interprétés comme des processus intérieurs à condition de rendre complexe et de varier la densité du lagrangien Λ, en dégageant notamment les variations de l'intégrale de surface complémentaire étendue à la surface de discontinuité S).

En posant nulles sur Σ toutes les variations δx^i et $\delta\mu^A$ avec toutes leurs dérivées faisant partie de δW, on obtient sur la surface de discontinuité S

$$0 = \delta W = \int_S [(\mathcal{P}_{i0}\delta x^i)_+ + (\mathcal{P}_{i0}\delta x^i)_- + \ldots + (\mathcal{P}_{i(r-1)}\nabla_n^{(r-1)}\delta x^i)_+ +$$
$$+ (\mathcal{P}_{i(r-1)}\nabla_n^{(r-1)}\delta x^i)_- + (\mathcal{M}_{A0}\delta\mu^A)_+ + (\mathcal{M}_{A0}\delta\mu^A)_- + \ldots +$$
$$+ (\mathcal{M}_{A(s-1)}\nabla_n^{(s-1)}\delta\mu^A)_+ + (\mathcal{M}_{A(s-1)}\nabla_n^{(s-1)}\delta\mu^A)_-]\, d\sigma. \tag{21}$$

Dans ce qui suit on attribuera à toutes les grandeurs de la formule (21) qui dépendent du sens de la normale sur S un même sens de la normale.

Compte tenu de la définition de $\mathcal{P}_{i\alpha}$, de $\mathcal{M}_{A\beta}$ et de l'opérateur ∇_n^k, on a

$$\mathcal{P}_{i\alpha}(n) = \mp\mathcal{P}_{i\alpha}(-n),\ \mathcal{M}_{A\beta}(n) = \mp\mathcal{M}_{A\beta}(-n),\ \nabla_n^{k-1} = \mp\nabla_{(-n)}^{k-1}. \quad (22)$$

Le signe « moins » correspond aux valeurs paires de α, β et k et le signe « plus », aux valeurs impaires.

Comme il a été indiqué, on répond à la condition principale de la classe des fonctions admissibles en supposant que la solution recherchée et les fonctions comparées dans le volume V_4 soient continues par morceaux avec toutes leurs dérivées partielles présentes dans l'équation aux variations fondamentale (9). En introduisant la surface S de forte discontinuité à l'intérieur du volume V_4, on s'est inspiré surtout de l'idée que, si l'on traverse mentalement la surface S, les solutions recherchées et chacune des fonctions variées admissibles subissent des discontinuités *). Celles-ci peuvent être de nature différente suivant, notamment, l'ordre et la forme des dérivées ou des fonctions elles-mêmes subissant des discontinuités sur S. A titre d'exemple, prenons les fortes discontinuités du type des fissures pour lesquelles les fonctions cherchées sont discontinues comme toutes leurs dérivées partielles; ou bien les discontinuités du type des dislocations pour lesquelles de petits déplacements normaux à la surface S sont continus, tandis que les déplacements le long du plan tangent à la surface sont discontinus lors du passage d'une face S_+ à l'autre S_-; ou encore les discontinuités comme celles de l'onde de choc dans la dynamique classique des gaz, lorsque toutes les coordonnées x^i (déplacements) sont continues sur S, tandis que les dérivées $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$ peuvent présenter des discontinuités.

Si on compte au nombre des arguments de la fonction Λ les dérivées d'ordre supérieur

$$\frac{\partial^k x^i}{\partial \xi^{j_1} \ldots \partial \xi^{j_k}},$$

on voit apparaître l'éventualité de très nombreuses discontinuités prononcées de différents types.

Dans les problèmes relevant de la dynamique des gaz et des théories élémentaires de la mécanique des solides, différents cas peuvent se présenter quand le type de la discontinuité superficielle est donné ou quand il se détermine au cours de la résolution du problème.

Par suite, en utilisant les équations aux variations, il est indispensable d'introduire ou de trouver les classes des fonctions recelant

*) Dans le cas général, les valeurs des discontinuités que subissent les fonctions cherchées sont également à déterminer. Cependant, il existe des problèmes où certaines discontinuités des quantités cherchées sont fixées par les conditions supplémentaires du problème.

la solution recherchée *). Si l'on suppose, en particulier, que la classe des fonctions admissibles soit définie aux points de la surface S par les conditions suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}(\nabla_n^\alpha \delta x^i)_+ = (\nabla_n^\alpha \delta x^i)_- \quad (i=1,\,2,\,3,\,4;\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha=0,\,1,\,\ldots,\,r_1-1;\ r_1 \leqslant r)\\ \text{avec } (\nabla_n^\alpha \delta x^i)_+,\ (\nabla_n^\alpha \delta x^i)_- \text{ arbitraires et indépendants}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } \alpha=r_1,\,r_1+1,\,\ldots,\,r-1,\\ (\nabla_n^\beta \delta \mu^A)_+ = (\nabla_n^\beta \delta \mu^A)_- \quad (A=1,\,2,\,\ldots,\,N;\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \beta=0,\,1,\,\ldots,\,s_1-1;\ s_1 \leqslant s),\end{array}\right\} \tag{23}$$

avec $(\nabla_n^\beta \delta \mu^A)_+$, $(\nabla_n^\beta \delta \mu^A)_-$ arbitraires et indépendants pour $\beta = s_1, \ldots, s-1$, on obtiendra, en traversant la surface S, la classe des fonctions admissibles $x^j(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ continues avec leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $r_1 - 1$ et celle des fonctions $\mu^A(x^1, x^2, x^3, x^4)$ continues avec leurs dérivées partielles covariantes jusqu'à l'ordre $s_1 - 1$. Notons de surcroît que les dérivées de ces fonctions d'ordre plus élevé normales à S peuvent présenter une discontinuité arbitraire. Outre les conditions (23), on suppose ici que toutes les quantités entrant dans l'équation (9) soient continues de chaque côté de S lors du déplacement le long de S.

Etant donné que les grandeurs $\nabla_n^\alpha \delta x^i$ et $\nabla_n^\beta \delta \mu^A$ sont arbitraires et indépendantes, grâce à (22) et à (23) on tire de (21) les conditions suivantes sur la surface de discontinuité:

$$\left.\begin{array}{c}(\mathcal{P}_{i\alpha})_+ = (\mathcal{P}_{i\alpha})_-, \quad (\mathcal{M}_{A\beta})_+ = (\mathcal{M}_{A\beta})_-\\ \text{pour } \alpha=0,\,1,\,\ldots,\,r_1-1, \quad \beta=0,\,1,\,\ldots,\,s_1-1,\\ (\mathcal{P}_{i\alpha})_+ = (\mathcal{P}_{i\alpha})_- = 0, \quad (\mathcal{M}_{A\beta})_+ = (\mathcal{M}_{A\beta})_- = 0\\ \text{pour } \alpha=r_1,\,r_1+1,\,\ldots,\,r-1, \quad \beta=s_1,\,s_1+1,\,\ldots,\,s-1.\end{array}\right\} \tag{24}$$

Les conditions (24) peuvent être considérées comme les conditions de continuité (ou de conservation, lorsque la discontinuité S est traversée par les lignes d'univers des particules) des quantités $\mathcal{P}_{i\alpha}$ et $\mathcal{M}_{A\beta}$ sur S. Cette propriété des $\mathcal{P}_{i\alpha}$ et $\mathcal{M}_{A\beta}$ constitue leur caractéristique physique importante.

Une étude plus détaillée des problèmes touchant aux solutions discontinues et, en particulier, des problèmes liés aux frontières variables de la surface de discontinuité S (par exemple, lors de la propagation des dislocations isolées par les particules à l'intérieur du milieu, lors du développement des fissures et dans bien d'autres

*) Ces hypothèses sont analogues aux hypothèses très générales sur la continuité et la dérivabilité des diverses fonctions en mécanique des milieux continus.

cas) permet de généraliser l'équation aux variations fondamentale (9) et d'introduire une variation supplémentaire de la surface S ou de ses bords par rapport aux coordonnées lagrangiennes ξ^i.

Par suite, pour obtenir les relations complémentaires correspondant, dans des corps réels, à ce type de discontinuités complexes il faut, en général, modifier les fonctionnelles variées dans l'équation fondamentale (9) en introduisant dans δW^* ou $\delta \int \Lambda \, d\tau$ des termes complémentaires contenant les variations correspondantes des coordonnées lagrangiennes. La nécessité de tenir compte des effets énergétiques particuliers liés à la formation ou à la propagation éventuelle des discontinuités de nature différente par les particules du milieu conditionne cette dernière opération.

BIBLIOGRAPHIE AU SUPPLÉMENT II

1. СЕДОВ Л. И.— Математические методы построения новых моделей сплошных сред (SÉDOV L. I.— Méthodes mathématiques de construction de nouveaux modèles des milieux continus), УМН, 1965, т. 20, вып. 5.
2. BERDITCHEVSKI V. L., SEDOV L. I.— A dynamic theory of continual dislocations (traduit du russe), Moscow, 1967.
3. СЕДОВ Л. И.— О пондеромоторных силах взаимодействия электромагнитного поля и ускоренно движущегося материального континуума с учётом конечности деформаций (SÉDOV L. I.— Sur les forces pondéromotrices d'interaction du champ électromagnétique avec un continuum matériel en mouvement, compte tenu de la finitude des déformations), ПММ, 1965, т. 20, вып. 1, стр. 4-17.
4. ГОЛУБЯТНИКОВ А. Н.— Сплошная среда со спинорными и векторными характеристиками (GOLOUBIATNIKOV A. N. — Milieu continu avec les caractéristiques spinorielles et vectorielles), Докл. АН СССР. 1966, т. 169, n° 2.
5. ЖЕЛНОРОВИЧ В. А.— Спинор как инвариантный объект (GELNOROVITCH V. A.— Le spinor en tant qu'être invariant), ПММ, 1966, n° 6.
6. ЖЕЛНОРОВИЧ В. А.— Модели сред с внутренними механическими и электромагнитными моментами (GELNOROVITCH V. A.— Modèles des milieux aux moments intérieurs mécaniques et électromagnétiques), Сб. статей, посвященный юбилею Л. И. Седова. М., « Наука », 1968.
7. КОГАРКО Б. С.— Об одной модели кавитирующей жидкости (KOGARKO B. S.— Sur un modèle du liquide cavitant), Докл. АН СССР, 1961, т. 137, n° 6, стр. 1331-1333.
8. БЕРДИЧЕВСКИЙ В. Л.— Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа (BERDITCHEVSKI V. L.— Construction des modèles des milieux continus à l'aide du principe variationnel), ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
9. СЕДОВ Л. И.— О тензоре энергии — импульса и о макроскопических внутренних взаимодействиях в гравитационном поле и в материальных средах (SÉDOV L. I.— Sur le tenseur énergie — impulsion et les interactions macroscopiques internes dans le champ gravitationnel et dans les milieux matériels), Докл. АН СССР, 1965, т. 164. n° 3.
10. SEDOV L. I.— Variational methods of constructing models of continuous media. Symposia, Vienna, June 22-28, 1966. Irreversible aspects of continuum mechanics, Springer-Verlag, 1968.
11. ГОЛУБЯТНИКОВ А. Н.— Нелинейные спинорные функции (GOLOUBIATNIKOV A. N.— Fonctions spinorielles non linéaires), Докл. АН СССР, 1965, т. 165, n° 2.
12. ЛОХИН В. В., СЕДОВ Л. И.— Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов (LOKHINE V. V., SÉDOV L. I.— Fonctions tensorielles non linéaires de plusieurs arguments tensoriels), ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, стр. 393-417; voir Supplément I du présent ouvrage.

13. SEDOV L. I. — Introduction to the mechanics of a continuous medium. Eddison-Wesley, 1965.
14. SEDOV L. I.— Some problems of designing new models of continuum media. Proc. 11th Internat. congr. of appl. mech., Munich, 1964, Springer Verlag, 1966, pp. 9-19.
15. Présent ouvrage.
16. СЕДОВ Л. И., ЭГЛИТ М. Э.— Построение неголономных моделей сплошных сред с учётом конечности деформаций и некоторых физико-химических эффектов (SÉDOV L. I., ÉGLITE M. E.— Modèles non holonomes des milieux continus compte tenu de la finitude des déformations et de certains effets physico-chimiques), Докл. АН СССР, 1962, т. 142, nº 1, стр. 54-57.
17. MINDLIN R. D.— Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity, Internat. J. Solids Structures, 1965, vol. 1, N 4, pp. 417-438.
18. ЛУРЬЕ М. В.— Применение вариационного принципа для исследования разрывов в сплошной среде (LOURIÉ M. V.— Application du principe variationnel à l'étude des discontinuités dans un milieu continu), ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Accélération 33, 40, 182
Addition des tenseurs 56
Additivité (non-additivité) de l'énergie interne 209, 276
Adiabatique
— d'Hugoniot 414 à 421
— de Poisson 224, 416 à 420
Aimantation 304
Air, propriétés 288 à 290
Anisotropie 167
Applications biunivoques continues 27
Apport de chaleur
— — selon la loi de Fourier 263
— — total de l'extérieur 225
— de l'énergie au milieu 266, 337, 349

Biunivocité des fonctions de l'équation du mouvement 26, 27

Cavitation 15, 466
Chaleur
— Joule 336, 350
— non compensée 242, 261
— spécifique 219
— — à pression constante 219
— — à volume constant 219
Champ
— électrique 304 et sq
— électromagnétique 307
— magnétique 304 et sq
— scalaire 36
— solénoïdal 117
— de vecteurs potentiel 45
— vectoriel 36
— des vitesses potientel 46
— uniforme 40
Centre des masses 140
Circulation d'un vecteur 113
Coefficient(s)
— d'allongement relatif 67
— de corrélation 80, 83, 84
— de diffusion 300
— de la dilatation cubique 76
Coefficient(s)
— de Lamé 171
— phénoménologiques 299, 300
Coefficient de Poisson 173
— de thermodiffusion 300
— de viscosité cinématique 173, 260
— — deuxième 173, 259
— — dynamique 173
Combustion 13, 419, 425
Composantes
— de l'accélération 33, 40, 182
— du produit vectoriel 188
— du tenseur des contraintes 147, 159
— — des déformations 68 à 86
— — métrique (fondamental) 60, 61
— — des taux de déformation 106, 184
— —, contravariantes 56
— —, covariantes 57
— —, mixtes 59
— —, physiques 181
— —, principales 64
— du vecteur des contraintes, physiques 147
— — gradient d'une fonction scalaire 39, 80, 81, 183, 184
— — vitesse 32
Condensation des gaz 466
Conditions
— d'adhérence aux frontières 377
— d'écoulement 378
— d'équilibre chimique 283
— à la frontière libre 380
— à l'infini 375
— initiales 376
— aux limites 377
— à la surface libre dans un fluide parfait 380
— aux surfaces de discontinuité 402, 403, 406, 411
Conducteur électrique 329
Conductibilité 332
Conduction de chaleur 220
— thermique 262

Connexité d'un domaine de l'écoulement
— multiple 116
— simple 117
Constante
— de Boltzmann 218
Constante des gaz 218
— — parfaits 218
Constitution des corps réels 17
Continuum (milieu continu) 21, 22
Contraction 63
Contraintes internes 137, 142 à 148
Coordonnées 24 à 29
— eulériennes 33 à 35
— initiales 25
— lagrangiennes 25 à 29
— d'un point 24
Corps
— élastique 166
— matériel 127
Couple
— massique réparti 152
— surfacique réparti 152
Courant
— de conduction 329
— de déplacement 331
— de Hall 333
Critères
— d'irréversibilité de transformations 266
— de réversibilité de transformations 266
— de similitude 464
Cycle 201
— de Carnot 225, 233

Débit d'une source (d'un puits) 48
Déformation 65
— finie 67, 74
— infiniment petite (infinitésimale) 67, 74
— pure 98
Densité
— de charge 302
— de courant 303
— d'énergie cinétique 194
— de la fonction de Lagrange 512
— d'une force massique 136
— — surfacique 137
— massique moyenne 127
— — réelle 127
— de travail des forces surfaciques internes 211
Dérivation
— des composantes des tenseurs et des vecteurs, covariante 80 à 84
— covariante répétée, indépendante de l'ordre de l'opération 93
— d'un vecteur 79
Dérivée
— convective 39
— locale 36
— particulaire 36
— suivant une direction 38
Description du mouvement du milieu continu
— eulérienne 33
— lagrangienne 24
Détonation 425
Diffusion 131, 269, 290 à 300
Discontinuité 390, 392
—, conditions aux surfaces de 395, 402, 403, 411
— faible 396
— forte 396
—, propagation par les particules du milieu 412
— tangentielle 404
Dispersion des ondes 390
Dissipation de l'énergie mécanique dans un fluide visqueux 261
Distribution des vitesses
— — dans un élément infinitésimal 102
— — dans un solide parfait 105
Divergence
— d'un vecteur 112, 180
— de la vitesse 111

Ecoulement
— autour des dièdres rentrant et saillant, supersonique 428, 429
— autour d'une sphère 458
— potentiel 45, 382
— de translation 46
Effet
— gyromagnétique 154
— Joule 220
— magnétothermique 243
Energie
— du champ électromagnétique 336
— cinétique d'un volume de milieu continu 191
— interne comme potentiel thermodynamique 247
— — d'un fluide parfait incompressible 252
— — d'un gaz parfait 218
— — d'un mélange 273
— — d'un système 209
— libre 247

Energie libre
— — d'un mélange 275
— totale d'un système 207
Enthalpie 247
Entropie 235, 275, 244
— d'un gaz parfait 236
— pour un milieu multiparamétrique 241
Equation
— caractéristique 75
— de la chaleur 264
— — reçue 210, 211, 252, 264, 338
— de Clapeyron 165, 218
Equation
— de continuité 127, 181
— — dans le cas des phénomènes de diffusion 131
— — pour les mélanges 129
— — en variables d'Euler 128
— — — de Lagrange 133
— de l'énergie 400
— de l'entropie 401
— d'état d'un gaz parfait 218, 237
— fondamentale de la théorie de l'élasticité 149
— générale de la variation de l'entropie 291
— des impulsions 141, 334
— de Laplace 306
— de la loi de conservation de l'énergie 210
— des moments 149, 352
— — cinétiques 153, 154, 155
— — pour le point matériel 149
— — pour le système de points 149
— d'onde 313, 341
— d'Oumov-Poynting 336
— de Poisson 307
— de la quantité de mouvement 139, 140
— séculaire 74, 159
Equations
— de compatibilité des déformations 87, 94, 95
— différentielles du champ gravitationnel 305
— de l'équilibre des masses 272
— d'état 283, 292
— — d'un mélange 282
— d'Euler en coordonnées cylindriques et sphériques 183
— de l'hydrodynamique magnétique pour un milieu à conductibilité infinie 393
— de Lamé 176
— des lignes de courant 42
Equations
— de Maxwell 338
— — pour le champ électromagnétique dans le vide 307, 309
— — pour les conducteurs
— — dans des corps matériels aimantés et polarisés 338
— — en électrostatique 305
— — dans l'espace de Minkowski 311, 339
— — en formalisme quadridimensionnel 311
— — sous forme intégrale 306, 339
— — — — tensorielle 339
— — dans un système de coordonnées arbitraire 313
— du mouvement
Equations
— — en déplacements d'un corps élastique 176
— — d'un fluide parfait 163 à 165
— — — visqueux incompressible 175
— — du milieu continu 145
— — sous la forme de Groméco-Lamb 163
— de Navier-Stokes 174, 184
— de Sach 288
— universelles de la mécanique et de la thermodynamique 400
Equilibre thermodynamique 212
Espace
— des états 201
— euclidien 22, 60, 92
— métrique 22, 60
— Minkowski 313, 317, 320
— non euclidien 60
— pseudo-euclidien 28, 60, 313
Etat
— initial 69
— d'un milieu, équilibré 214
— — déséquilibré 214
— neutre 69
Explosion ponctuelle 424, 447 à 451

Fluide
— compressible 253
— incompressible 252, 253
— parfait 161 à 166, 252
— visqueux 166, 259
Fonction
— caractéristique 383
— de courant 382
— des dissipations 268, 295
— harmonique 382

Force
— concentrée 135
— des contraintes internes 137
— électromagnétique 136
— extérieure 137
— — généralisée 513
— de frottement interne 138
— de gravitation 136
— d'inertie 136
— interne 137
— de Lorenz 334
— massique 136
— pondéromotrice 334 et sq
— — selon Abraham 358
— — selon Minkowski 358
— répartie 135
— surfacique 137
— thermodynamique généralisée 267
— volumique 136
Forme bilinéaire fondamentale 60
Formule
— d'Euler 105
Formule
— de dimension 432
— de Gibbs 260
— de Mayer 219

Gaz
— partait 217 à 219, 236, 253 à 255, 277 à 280, 286, 299, 418
— de Van der Waals 257, 258
Girotropie 167, 169
Grandeurs
— contravariantes 53
— covariantes 53
— dimensionnées 431, 435
— sans dimension 435, 439, 440
— à dimensions indépendantes 437

Hydrodynamique magnétique 14, 361 à 369, 395
Hypocissoïde 427
Hypothèse de continuité 21

Individualisation des points d'un continuum 25
Instabilité d'une discontinuité 403
Interaction(s)
— électromagnétiques 302 à 304, 310
— énergétiques dans le champ, du champ avec le milieu 335 à 352
— de gravitation 301, 305 à 308
— magnétiques 303
— de particules élémentaires 302 à 304, 310

Invariant(s)
— scalaires d'un tenseur 63, 64, 75
— du tenseur des contraintes 160
— — des déformations 75
— d'un vecteur 63
Irréversibilité de mouvements discontinus 393, 401
Isotherme d'un gaz parfait 223, 224
Isotropie 167

Jonglerie avec les indices 59 à 62

Laplacien 184
Linéarisation
— des conditions aux frontières 387
— des problèmes de la mécanique des milieux continus 387, 390
Ligne
— de courant 41 à 43
— de rotation 119
— de vecteurs 41, 119
Loi
— de l'action et de la réaction 143
— d'aimantation 344
Loi
— de la conduction de Fourier 263
— de conservation de la charge totale 331
— — de l'énergie 206, 210, 437
— — de la masse 127
— — du moment cinétique 149 à 152, 437
— de Coulomb 302, 303
— de Guldberg-Waage 285
— de Hooke 167 à 172
— de Navier-Stokes 167 à 172, 298
— de Newton, deuxième 136
— d'Ohm 332, 343
— de polarisation 344
— régissant les lignes du champ magnétique et celles de rotation « figées», 364 à 369

Machine frigorifique 228
Mélange comme un milieu parfait biparamétrique 284
Milieu
— anisotrope 167
— biparamétrique 217 à 237, 246 à 251, 258
— à conductibilité infinie 333, 393
— continu 21
— girotrope 167

Milieu
— incompressible 132
— isotrope 167
— multiparamétrique 197, 238
Modèle(s)
— du corps élastique 166
— du fluide conducteur en hydrodynamique magnétique 361 et *sq*
— d'un fluide parfait compressible 162, 253
— — — incompressible 164, 252
— — linéaire visqueux 166, 175, 259
— — visqueux 166
— d'un gaz parfait 162, 253
— d'un liquide parfait incompressible 164
— mathématique d'un milieu 161
— de la mécanique des milieux continus 11 à 16
— à mémoire 197
Module d'Young 173
Moment
— cinétique 149 à 152
— — du champ 353
— de la densité des forces pondéromotrices 353
— d'un dipôle magnétique 304
— d'une force pondéromotrice 353
— pondéromoteur 353 à 361
Moteur thermique 228, 242
Mouvement(s)
— absolu 452
— automodèles 384, 449
— d'un continuum 25
— d'un corps dans un gaz parfait 460
— discontinus 392
— irrotationnel 115
— isotherme d'un gaz 165
— d'un mélange 269
— non stationnaire 40
— — unidimensionnel 383
— de l'onde de choc 449
— par ondes cylindriques 384
— — planes 384
— — sphériques 384
— plan 381
— potentiel 115
— d'un point 24
— de révolution 383
— rotationnel 115
— d'un solide dans un fluide visqueux 451, 452, 457, 458
— — parfait 65
— stationnaire 40, 381

Nœuds (surfaces nodales) des ondes stationnaires 389
Nombre
— — de Froude 460, 467
— de Mach 428, 460
— de Reynolds 455 et sq

Onde(s)
— de choc 424
— de combustion 419, 425
— cylindriques 384
— de détonation 425
— d'explosion 424
— planes 384
— progressives 389
— sphériques 384
— stationnaires 389
Opérations sur les tenseurs
— d'alternation 56
— de multiplication par un nombre 56
— de symétrisation 56
Ordre d'un tenseur 55

Paradoxe
— de Gibbs 280
— des horloges 326
Paramètres
— d'état 196 à 200
— de définition 196 à 200, 441, 442
— holonomes 200
— macroscopiques 196
Paramètres
— non holonomes 201
Passage des variables d'Euler aux variables de Lagrange 35
— — de Lagrange aux variables d'Euler 34
Perturbations, petites 386
Piston
— plan 422
— sphérique 423
Plasma 302
Point
— critique 44
— singulier 44
— — des équations différentielles des lignes de courant 44
— — au sein d'un milieu 376
Polaire de choc 427
Polarisation 303, 338 à 352
Portance 454
Postulat de la constance de la vitesse de la lumière 318
Potentiel
— chimique 275
— thermodynamique 246 à 251, 275
— — de Gibbs 247
— vecteur 341
— des vitesses 46

Principe(s)
— de non-décroissement de l'entropie des systèmes isolés 245
— de relativité 28, 317
— de la thermodynamique 206
— — premier 206
— — second 228, 233, à 241
— — — pour un mélange 281
— — — pour un volume fini d'un milieu continu 265
Problème(s)
— de Boussinesq 461
— de Cauchy 44, 376
— de l'écoulement 452
— de l'explosion forte 448
— — ponctuelle 424, 447
— aux limites 376
— de la mécanique des milieux continus 11 à 16, 372
— sur le mouvement d'un mélange 269, 290
— du piston 422, 423, 444
Processus 201 et sq
— abiabatique 221, 224, 254
— — irréversible 245
— — réversible 245
— barotrope 165
— continu 202
— déséquilibré 213
— de diffusion 131, 270
— sans diffusion 131
— équilibré 213
Processus
— fermé 243
— irréversible 213
— non stationnaire 40
— ouvert 243
— physico-chimiques essentiels de la mécanique des milieux continus 19
— aux points de discontinuité 202
— réversible 213
— stationnaire 40
Produit
— indéterminé des tenseurs 61
— de vecteurs de base
— — — dyadique 54
— — — polyadique 54, 55
— vectoriel 188
Pseudotenseur 187
Puits 47, 48

Quadrivecteur force pondéromotrice 341
— densité de courant 329
Quantité de mouvement
— d'un point matériel 139
Quantité
— d'un système de points 139
— d'un volume individuel fini du milieu continu 140

Référentiel inertial 317, 319, 372
Rendement d'un cycle de Carnot 229 à 232
Repère concomitant 28
Résistance 454
Rhéologie 162
Rotation
— pure 99
— d'un vecteur 112
Rotationnel d'un vecteur 187

Saut
— de compression 405, 413, 419, 425
— — droit 428
— — oblique 428
— de détente 405, 413, 419, 425
— d'énergie interne 413
— immobile 420
Scalaire 63
Similitude
— lors de l'écoulement d'un fluide incompressible visqueux autour d'un corps 464
— lors de l'écoulement d'un gaz compressible autour d'un corps 465
— géométrique 463
— physique 462, 463
Simulation 462 à 469
— dans les centrifugeuses 468
Simulation
— de l'équilibre des constructions élastiques 467
— selon Froude 467
— de la navigation des navires 467
Solutions discontinues 393 et sq
Somme des tenseurs 56
Source 47, 48
Spin 304
Spin-tenseur 55
Spinor 55, 152
Structure des discontinuités 392
Superposition des solutions 388
Surface(s)
— de courant 45
— de discontinuité 390 à 421
— équipotentielle 37, 46
— isotherme 37
— de niveau 37
— de rotation 119

Surface(s)
— tensorielle 64
— — du tenseur des contraintes 157 à 160
— de vecteur 45, 119
Symbole(s)
— de Christoffel 80, 84, 87, 179
— de Kronecker 50
Symétrie
— géométrique d'un milieu 167
— du tenseur des contraintes 156
Système
— de coordonnées 24
— de référence
— — concomitant 28, 29, 326
— — de l'observateur 28, 373
— — propre 325, 326
— thermodynamique de paramètres 200
— — isolé 246

Taux
— d'allongement unitaire 105
— de production de l'entropie 267, 295
Temps
— absolu 22
— propre 325
—, relativité de la notion de 324
Tenseur
— antisymétrique 56, 107, 185, 189
— des contraintes 146
— — dans un fluide parfait 162
— — internes 147
— des déformations 68, 100
— du deuxième ordre 55, 62, 185, 189
— énergie-impulsion 317, 341, 356 à 360
— de Lévi-Chivita 187
Tenseur
— métrique fondamental 60
— de Minkowski 341
— du moment du champ électromagnétique 356 à 360
— — pondéromoteur du champ électrique 355 à 360
—, nombre de composantes 62
— d'ordre *p* 62
— — zéro 62
— du premier ordre 62
— de Riemann-Christoffel 92, 93
— sphérique 162
— symétrique 56
— des taux de déformation 100

Théorème(s)
— de Carnot 222
— de Cauchy-Helmholtz sur la décomposition de la vitesse 110
— des forces vives 191 à 196
— de Gauss-Ostrogradski 122 à 124
— de Helmholtz sur les rotations cinématiques 120
— — — dynamiques 371
— de Lagrange 370
— des produits des puissances 437 à 441
— de Stokes 114
— de Thomson 369
Théorie
— des dislocations 506
— de l'élasticité 15, 149, 167, 387
— du fluage 15
— des ondes 388
— d'Onsager 269, 295
— de la plasticité, 15, 506
— de la relativité 23
— — générale 28, 321, 338 à 361, 505
— — restreinte 28, 311 à 329
Transformation
— affine 98
— — infiniment petite 102, 108
— des composantes de *dr* 52
— — d'un tenseur 55, 58, 59
— de coordonnées 49, 319
— de Galilée 316, 322
— de Lorentz 317 à 324
— — finie spéciale 324
— — infinitésimale 323
— — orthogonale 323
— des produits polyadiques 55, 58
— des symboles de Christoffel 87
— de vecteurs de base contravariants 57
— — — covariants 52
— — champ magnétique et champ électrique 327
— — principaux du champ électromagnétique 340
Transformation (mouvement)
— adiabatique 221, 224
— irréversible 290 à 300
— isotherme 221, 254
— réversible 282, 288
— polytrope 222
Transmission de la chaleur à un milieu, mécanismes physiques 220, 262
Travail
— des forces internes dans un fluide parfait 252
— — — — visqueux 260

Travail
— — massiques extérieures 191, 204, 205
— — — internes 191
— — surfaciques extérieures 192
— — — internes 193
Trivecteur densité de courant 329
Tube
— de courant 45, 132
— de rotation 119
— de vecteur 45, 119, 132

Variables
— eulériennes 33 à 35
— lagrangiennes 24 à 29
Vecteur 30 à 33, 53
— axial 186, 189
— champ électrique 304 et sq
— — magnétique 304 et sq
— courant de chaleur 262
— déplacement 78, 85
— du flux de diffusion 131, 270, 271, 292 à 300
— gradient d'une fonction scalaire 38
Variables
— induction électrique 338 et sq
— — magnétique 338 et sq
— d'Oumov-Poynting 336
— polaire 187, 189, 190
— rotation 107, 110, 112, 364
Vecteurs de base 30, 32, 51, 52, 54
— — contravariants 57, 58, 61
— — covariants 30, 32, 51, 52, 61
— —, dépendance par rapport au temps 65, 351
— — unitaires (non unitaires) 31, 181
Ventre (surface ventrale) des ondes stationnaires 389
Vitesse
— de déformation pure 106
— de la lumière 308, 312, 318
— des points de la surface de discontinuité 396
— de la propagation d'ondes progressives 390

Unités de mesure
— — de base (fondamentales) 431
— — dérivées 432

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse: Editions Mir,
1er Rijski péréoulok, 2
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Imprimé en Union Soviétique

DANS LA MÊME COLLECTION

OUVRAGE PARU

MOUVEMENT DES PARTICULES CHARGÉES DANS LES CHAMPS ÉLECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES

(introduction classique à la physique atomique et nucléaire)

par L. ARTSIMOVITCH, S. LOUKIANOV

Les auteurs du livre L. Artsimovitch, de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., et S. Loukianov, docteur ès sciences physiques et mathématiques, ont destiné ce manuel aux étudiants en physique et mathématiques des Universités scientifiques et techniques, il sera également très utile aux professeurs de physique des écoles supérieures. Cet ouvrage a pour base le cours professé par les auteurs pendant plusieurs années à la Faculté de physique de l'Université de Moscou.

Ils y traitent des problèmes de la physique des particules chargées, sans recourir à la mécanique quantique : mouvement des particules dans des champs macroscopiques extérieurs, interaction des particules, mouvement des particules aux grandes vitesses et dans le plasma. Microscopie électronique, séparation électromagnétique des isotopes, plasma chaud, accélérateurs, autant d'exemples d'application toujours croissante en de nombreux domaines de la technique actuelle des matières de la physique atomique étudiées dans ce livre.